组合泛函方程论

Theory of Combinatorial Functional Equations



刘彦佩　著

中国科学技术大学出版社

“十二五”国家重点图书出版规划项目

作者简介

刘彦佩，北京交通大学教授，1939年生，天津宝坻区人。1963年毕业于中国科学技术大学数学系并留校工作。三个月后被调到中国科学院数学研究所。1986年晋升为研究员。1989年被国务院学位委员会评选为博士研究生导师。1994年调入北京交通大学。在基础理论方面，20世纪70年代末，提出用演生网（派生图，或平面性辅助图）判定图的平面性，开辟了图论研究的一个新方向，解决了确定图的最大亏格问题。所创立的方法，之后被完备成联树法。为曲面嵌入建立了最简洁表示论。80年代最终完成缺一个三角形的完全图最小亏格的确定并简化了曲面地图着色定理。90年代揭示图的同调与上同调定理，第一次简单地证明了高斯关于辨别组结在平面上投影的猜想，以及一并推广了拓扑学中琼斯多项式和图论中塔特多项式。新世纪以来，着重研究以图为代表的组合结构的代数化，完备了地图及其计数理论。将曲面、嵌入、地图以及根图等统一为一种多面形理论。发现了一批组合泛函方程，建立了它们的定性理论并且提供了求出解的有限正项和表示的统一方法。在应用理论方面，主要做与运筹学、系统论以及计算机科学有关的组合优化研究。至今，已单独出版学术专著18部（其中英文8部），发表专业文章460余篇（合作篇数近半）。其学术小传被选入《20世纪中国知名科学家学术成就概览》（数学卷第四分册）。

定价：88.00 元

ISBN 978-7-312-03534-0



上架建议：数学

当代科学技术基础理论与前沿问题研究

中国科学技术大学

校友文库

组合泛函方程论

Theory of Combinatorial Functional Equations

刘彦佩 著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书旨在为组合泛函方程建立一种普遍的定性理论，求出解的正项和表示．内容包括差分方程、常微分方程、偏微分方程以及居中心地位的介子泛函方程．之所以冠以“组合”一词，是因为它们全是本书作者在研究组合地图的各种分类计数中发现或由其他方程演化而来的．借此，本书试图引起人们在将来的工作中对这些方程的注意．

本书适合于大学数学专业、计算机科学专业、工程专业高年级本科生、研究生使用，同时也适于高中数学教师参考．

图书在版编目(CIP)数据

组合泛函方程论/刘彦佩著．—合肥：中国科学技术大学出版社，2015.1
（当代科学技术基础理论与前沿问题研究丛书：中国科学技术大学校友文库）
“十二五”国家重点图书出版规划项目
ISBN 978-7-312-03534-0

Ⅰ．组…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．泛函方程—研究　Ⅳ．O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 284623 号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
http://press.ustc.edu.cn
印刷　合肥市宏基印刷有限公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　710 mm×1000 mm　1/16
印张　29
字数　560 千
版次　2015 年 1 月第 1 版
印次　2015 年 1 月第 1 次印刷
定价　88.00 元

总　　序

大学最重要的功能是向社会输送人才，培养高质量人才是高等教育发展的核心任务. 大学对于一个国家、民族乃至世界的重要性和贡献度，很大程度上是通过毕业生在社会各领域所取得的成就来体现的.

中国科学技术大学建校只有短短的五十余年，之所以迅速成为享有较高国际声誉的著名大学，主要就是因为她培养出了一大批德才兼备的优秀毕业生. 他们志向高远、基础扎实、综合素质高、创新能力强，在国内外科技、经济、教育等领域做出了杰出的贡献，为中国科大赢得了"科技英才的摇篮"的美誉.

2008 年 9 月，胡锦涛总书记为中国科大建校五十周年发来贺信，对我校办学成绩赞誉有加，明确指出：半个世纪以来，中国科学技术大学依托中国科学院，按照全院办校、所系结合的方针，弘扬红专并进、理实交融的校风，努力推进教学和科研工作的改革创新，为党和国家培养了一大批科技人才，取得了一系列具有世界先进水平的原创性科技成果，为推动我国科教事业发展和社会主义现代化建设做出了重要贡献.

为反映中国科大五十年来的人才培养成果，展示我校毕业生在科技前沿的研究中所取得的最新进展，学校在建校五十周年之际，决定编辑出版《中国科学技术大学校友文库》50 种. 选题及书稿经过多轮严格的评审和论证，入选书稿学术水平高，被列入"十一五"国家重点图书出版规划.

入选作者中，有北京初创时期的第一代学生，也有意气风发的少年班毕业生；有"两院"院士，也有中组部"千人计划"引进人才；有海内外科研院所、大专院校的教授，也有金融、IT 行业的英才；有默默奉献、矢志报国的科技将军，也有在国际前沿奋力拼搏的科研将才；有"文革"后留美学者中第一位担任美国大学系主任的青年教授，也有首批获得新中国博士学位的中年学者 …… 在母校五十周年华诞之际，他们通过著书立说的独特方式，向母校献礼，其深情厚谊，令

人感佩!

《文库》于 2008 年 9 月纪念建校五十周年之际陆续出版，现已出书 53 部，在学术界产生了很好的反响. 其中，《北京谱仪Ⅱ：正负电子物理》获得中国出版政府奖；中国物理学会每年面向海内外遴选 10 部“值得推荐的物理学新书”，2009 年和 2010 年，《文库》先后有 3 部专著入选；新闻出版总署总结“‘十一五’国家重点图书出版规划”科技类出版成果时，重点表彰了《文库》的 2 部著作；新华书店总店《新华书目报》也以一本书一个整版的篇幅，多期访谈《文库》作者. 此外，尚有十数种图书分别获得中国大学出版社协会、安徽省人民政府、华东地区大学出版社研究会等政府和行业协会的奖励.

这套发端于五十周年校庆之际的文库，能在两年的时间内形成现在的规模，并取得这样的成绩，凝聚了广大校友的智慧和对母校的感情. 学校决定，将《中国科学技术大学校友文库》作为广大校友集中发表创新成果的平台，长期出版. 此外，国家新闻出版总署已将该选题继续列为“十二五”国家重点图书出版规划，希望出版社认真做好编辑出版工作，打造我国高水平科技著作的品牌.

成绩属于过去，辉煌仍待新创. 中国科大的创办与发展，首要目标就是围绕国家战略需求，培养造就世界一流科学家和科技领军人才. 五十年来，我们一直遵循这一目标定位，积极探索科教紧密结合、培养创新拔尖人才的成功之路，取得了令人瞩目的成就，也受到社会各界的肯定. 在未来的发展中，我们依然要牢牢把握“育人是大学第一要务”的宗旨，在坚守优良传统的基础上，不断改革创新，进一步提高教育教学质量，努力践行严济慈老校长提出的“创寰宇学府，育天下英才”的使命.

是为序.

侯建国

中国科学技术大学校长
中国科学院院士
第三世界科学院院士
2010 年 12 月

序

本书旨在专门讨论组合泛函方程, 内容包括差分方程、常微分方程、偏微分方程以及介子泛函方程. 之所以冠以“组合”一词, 是因为它们都在组合学中有意义. 事实上, 它们全是本书作者近 30 年来在各种地图同构分类的计数中发现或由其他方程演化而来的. 考虑到普遍性, 本书试图引起人们在将来的工作中对这些方程的注意.

这部专著分三个重要阶段.

第一阶段是在 Tutte 平面根三角剖分的计数过程中, 解二次函数方程重根法的基础上, 发现非二次函数方程采用特征曲线的解法 (重根法, 或二次法, 可视为特例). 同时将参数方程转化为差分方程和微分方程.

这一阶段有两个主要任务.

任务 1: 发现尽可能多的具有相当普遍性的地图类. 通过对每类地图进行合适的分解, 可以对于适合的参数, 导出在任何给定参数下, 这类地图根同构类数的计数函数所满足的方程.

这里, 有两个关键点.

一个是选择适合的计数参数, 因为如果选择不当, 就会难以找到合适的分解.

另一个是找到合适的分解, 因为即使找到了一个分解, 如不合适也是枉然. 在这个过程中, 所建立起来的各种类型的无限集合的分解理论, 也为下两个阶段建立更具普遍性的方程奠定了理论根基.

任务 2: 求出这个满足给定方程的所需要的解. 这些方程的未定元一般至少是两个变元的函数, 同时还带至少一个由这个未定元决定的, 但少一个变元的函数, 我们称之为侧函数, 由此导致直接求解困难.

如果能首先将侧函数求出来, 那么原方程在原则上可以直接求解.

为了确定侧函数, 先要选择一个或几个参数, 通过特征曲线或曲面建立一个至少减少一个变元的方程组, 设法用 Lagrange 隐函数定理 (或 Lagrange 反演),

求出这些侧函数. 将原方程变为通常的多变量函数方程. 如果方程是二次的, 这样的一类消元法就是 Tutte 在研究平面三角化时所说的二次法.

这里, 也有两个关键点.

一个是如何对方程选择参数. 这种参数必将决定所得的方程组是否相容, 以及求解这个方程组能否回避可能产生的复杂性.

另一个就是如何变换这些参数, 使得反演出的结果有利于进一步地尽量简化到正项和, 甚至单项 (即无和) 显式.

本书的第 3 章至第 7 章中所出现的方程, 多可采用这种消元法求解. 这里, 完全没有必要如此, 而只需在扩张整域中进行运算就够了. 在第 1 章中, 之所以提到 Lagrange 反演, 是因为这些方程在应用实例中屡见不鲜.

下面的两个阶段都是讨论从无穷计数参数演化来的方程, 称为介子泛函方程, 或者简称介子方程.

关于介子泛函, 第 2 章仅就与求解有关的方面提供本书所需要的一个预备理论基础.

第二阶段是关于平面型介子方程的发现, 用无穷维的矩阵分析和 Lagrange 反演求解其中的一些方程.

在第 8 章中, 所讨论的都是外面型介子泛函方程, 建立了其适定性理论, 求出了其解的正项和递推形式. 这类方程都是在研究非外平面的平面地图的计数根同构类数时发现的. 由线性性, 还可以用无穷维的矩阵分析和 Lagrange 反演, 求它们解的正项和或单项显式.

在第 9 章中, 所讨论的都是内面型介子泛函方程, 建立了其适定性理论, 求出了解的正项和递推形式. 因为这类方程全是在研究非外平面的平面地图的计数根同构类数时发现或衍生出来的, 根据适定性, 它们的解也可以从相应的计数得到. 由非线性性, 至今无论从这个递推形式, 还是从相应的计数中, 都未发现直接显式. 虽然给定地图基图上的所有劈对以及每一对的重数, 然后通过自伴同构群的阶, 由根地图计数的结果就可以直接得到一个无和显式, 不过, 这个式子的表达似会过于复杂.

第三阶段是曲面型介子方程的发现, 以及通过计数理论导出其中一些方程解的显式, 为直接求解提供了明确的目标. 这些都围绕地图的计数.

在第 10 章中, 所讨论的都是曲面型介子泛函方程, 建立了它们的适定性理论, 求出了解的正项和递推形式.

这些方程全是在研究曲面上地图的计数根同构类数时发现或衍生出来的. 根据适定性, 它们的解也可以从相应的计数得到.

对于这些方程, 在这本书中, 都求出了其解的正项和递推形式. 但从这些递推

形式出发, 还没有导出直接显式. 不过, 从相应的地图计数, 通过地图基图的自伴同构群的阶, 都已经得到了解的无和显式.

虽然本书的主要内容完全不依赖地图计数, 但根据这里提供的理论, 地图计数确可以视为一个应用实例. 这就是为什么几乎每一节之后都列举出一些地图的缘由. 以备必要时验证相关理论的结果.

本书中的新结果都得到过国家自然科学基金 (批准号: 11201024;11371052) 的部分资助. 尤其感谢北京交通大学理学院数学系对本书的完成所给予的支持和帮助.

刘彦佩

于北京稻田村

2014 年 9 月

编 委 会

“十一五”国家重点图书

中国科学技术大学校友文库

第一辑书目

◎*Topological Theory on Graphs*（英文） 刘彦佩

◎*Advances in Mathematics and Its Applications*（英文） 李岩岩、舒其望、沙际平、左康

◎ *Spectral Theory of Large Dimensional Random Matrices and Its Applications to Wireless Communications and Finance Statistics*（英文） 白志东、方兆本、梁应昶

◎*Frontiers of Biostatistics and Bioinformatics*（英文） 马双鸽、王跃东

◎*Spectroscopic Properties of Rare Earth Complex Doped in Various Artificial Polymer Structure*（英文） 张其锦

◎ *Functional Nanomaterials: A Chemistry and Engineering Perspective*（英文） 陈少伟、林文斌

◎*One-Dimensional Nanostructres: Concepts, Applications and Perspectives*（英文） 周勇

◎*Colloids, Drops and Cells*（英文） 成正东

◎*Computational Intelligence and Its Applications*（英文） 姚新、李学龙、陶大程

◎*Video Technology*（英文） 李卫平、李世鹏、王纯

◎*Advances in Control Systems Theory and Applications*（英文） 陶钢、孙静

◎ *Artificial Kidney: Fundamentals, Research Approaches and Advances*（英文） 高大勇、黄忠平

◎*Micro-Scale Plasticity Mechanics*（英文） 陈少华、王自强

◎*Vision Science*（英文） 吕忠林、周逸峰、何生、何子江

◎非同余数和秩零椭圆曲线 冯克勤

◎代数无关性引论 朱尧辰

◎非传统区域 Fourier 变换与正交多项式 孙家昶

◎消息认证码 裴定一

◎完全映射及其密码学应用　吕述望、范修斌、王昭顺、徐结绿、张剑
◎摄动马尔可夫决策与哈密尔顿圈　刘克
◎近代微分几何：谱理论与等谱问题、曲率与拓扑不变量　徐森林、薛春华、胡自胜、金亚东
◎回旋加速器理论与设计　唐靖宇、魏宝文
◎北京谱仪Ⅱ·正负电子物理　郑志鹏、李卫国
◎从核弹到核电——核能中国　王喜元
◎核色动力学导论　何汉新
◎基于半导体量子点的量子计算与量子信息　王取泉、程木田、刘绍鼎、王霞、周慧君
◎高功率光纤激光器及应用　楼祺洪
◎二维状态下的聚合——单分子膜和 LB 膜的聚合　何平笙
◎现代科学中的化学键能及其广泛应用　罗渝然、郭庆祥、俞书勤、张先满
◎稀散金属　翟秀静、周亚光
◎SOI——纳米技术时代的高端硅基材料　林成鲁
◎稻田生态系统 CH_4 和 N_2O 排放　蔡祖聪、徐华、马静
◎松属松脂特征与化学分类　宋湛谦
◎计算电磁学要论　盛新庆
◎认知科学　史忠植
◎笔式用户界面　戴国忠、田丰
◎机器学习理论及应用　李凡长、钱旭培、谢琳、何书萍
◎自然语言处理的形式模型　冯志伟
◎计算机仿真　何江华
◎中国铅同位素考古　金正耀
◎辛数学·精细积分·随机振动及应用　林家浩、钟万勰
◎工程爆破安全　顾毅成、史雅语、金骥良
◎金属材料寿命的演变过程　吴犀甲
◎计算结构动力学　邱吉宝、向树红、张正平
◎太阳能热利用　何梓年
◎静力水准系统的最新发展及应用　何晓业
◎电子自旋共振技术在生物和医学中的应用　赵保路
◎地球电磁现象物理学　徐文耀
◎岩石物理学　陈颙、黄庭芳、刘恩儒
◎岩石断裂力学导论　李世愚、和泰名、尹祥础
◎大气科学若干前沿研究　李崇银、高登义、陈月娟、方宗义、陈嘉滨、雷孝恩

目　次

绪　　论

若将函数都视为带一个或多个未定元的无穷级数, 其上的差分、微分、积分, 特别是介子运算, 均可视为线性泛函 (前三者都是从函数空间到它本身, 后者为由函数空间到向量空间). 这些方程都是带有泛函的方程. 自然, 函数本身也可视为在全同变换下的泛函.

仅以单个未定元为例, 函数 $f = f(x)$ 的形式为

$$f_x = \sum_{i \geqslant 0} a_i x^i, \tag{1}$$

其中 a_i $(i \geqslant 0)$ 为与 x 无直接因果关系的函数 (常数为其一个特例). 记 $\mathcal{F}$ 为所有这种函数构成的空间. 本书所关心的差分有两种一般形式. 令 $\Delta u = z - x$. 第一类 (或称*直差分*) 是

$$\delta_{z,x} f\Big|_{x=u} = \frac{f(z)-f(x)}{\Delta u} = \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \in \mathcal{F}. \tag{2}$$

第二类 (或称*斜差分*) 是

$$\partial_{z,x} f\Big|_{x=u} = \frac{xf(z)-zf(x)}{\Delta u} = \frac{xf(z)-zf(x)}{z-x} \in \mathcal{F}. \tag{3}$$

将介子泛函视为一个函数空间 $\mathcal{F} = \langle y^0(=1), y^1, y^2, \cdots \rangle$ 到无穷维向量空间 $\mathcal{V} = \langle \mathbf{1}, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots \rangle$ 的一类变换, 用 $\int_y$ 表示, 即

$$\int_y y^i = \begin{cases} \boldsymbol{y}_i, & i \geqslant 1, \\ \mathbf{1}, & i = 0, \end{cases} \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{y}_i$ $(i \geqslant 0)$ 为向量空间 $\mathcal{V}$ 的一组基 (或生成元).

介子泛函的前身可以看作 19 世纪 Blissard (J., 生卒年份不详) 曾用过的一种算子, 参见文献 [3]. 20 世纪, Rota (Gain-Carlo, 1932～1999) 曾用这个算子作

为函数空间本身两个坐标系之间的变换, 称之为阴影, 提供整数分拆数 (或集合剖分数) 的一个简洁表示, 参见文献 [91]. 随之, 出现了一系列的代数研究. 因为变换间的两空间不同, 本书只能称我们的变换为介子 (或介子泛函), 以区别阴影 (或阴影泛函).

虽然这些方程的解都有计数方面的意义, 但本书所着眼的是如何从方程本身将其解提取出来. 时至今日, 在尚未能求解的方程中, 尽管有些已经通过计数公式的变换可以给出解的形式, 绝大部分仍然既未能通过计数公式的变换, 也未能通过方程本身求出其解的形式. 本书对正文中的方程, 在同一个理论路线下, 毫无例外地不仅给出了在更广的意义下的定性理论, 而且提供了解的正项和表示, 以便在此基础上进一步研究有效化, 甚至智能化实现.

在前两章中, 提供了有关基础方面的知识和介子泛函的概念, 讨论了一些基本的代数性质. 以下诸章均讨论各种类型泛函方程的定性理论与解的结构.

第 3 章选择普通多项式型一元函数方程, 即

$$\begin{cases} a_0(x)+a_1(x)f+a_2(x)f^2+\cdots+a_n(x)f^n=0, \\ f(0)=a, \end{cases} \tag{5}$$

其中 $a\geqslant 0$ 为一个常数, $n\geqslant 1$, 讨论了它的 6 种类型. 并讨论了它们在整域扩张 $\mathcal{R}\{x\}$ 上有且仅有一个解的条件, 以及求这个解的一般方法. 同时, 也研究了一些具有特殊形式的此类方程更适用的也更行之有效的求解方法.

第 4 章选择多元函数方程的一般形式

$$\begin{cases} a_0(\boldsymbol{x};\hat{f})+a_1(\boldsymbol{x};\hat{f})f+a_2(\boldsymbol{x};\hat{f})f^2+\cdots+a_n(\boldsymbol{x};\hat{f})f^n=0, \\ f(\boldsymbol{0})=a, \end{cases} \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_0,x_1,\cdots,x_{k-1})$(自然, $\boldsymbol{0}$ 为 $x_0=x_1=\cdots=x_{k-1}=0$ 的情形), $\hat{f}=f|_{(x_0x_1\cdots x_{k-1}=0)\bigvee(x_0=1)\bigvee\cdots\bigvee(x_{k-1})=0}$ (也称为 f 的侧函数), $k\geqslant 2$, 讨论了它的 3 种类型. 除在整域扩张 $\mathcal{R}\{x\}$ 上的定性讨论, 以及导出解的正项和表示外, 还顺便讨论这些方程借助特征曲线 (实际上, 也是一类消去法) 的求解. 这可以视为 $n=2$ 时 Tutte(William Thomas, 1917~2002) 所用二次方法被拓广到更高次的情形.

第 5 章讨论了带有差分运算的多元函数方程, 分为单变直差式、多变直差式、单变斜差式、多变斜差式和直斜混合式 5 种类型. 虽然也可转化为单变元和多变元函数方程求解, 但这里只用在扩张整域 $\mathcal{R}\{x,y\}$ 上的运算.

只要能确定方程式 (6) 中出现的所有侧函数, 就能将方程式 (6) 转化为方程式 (5). 在第 6 章专门讨论了为确定这些侧函数而建立的常微分方程. 除从方程式 (6) 所引出的常微分方程外, 还有 Riccati 型常微分方程. 例如文献 [57](268 页)

中,

$$\begin{cases} 2x^2\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -1+(1-x)f - xf^2, \\ f_0 = f(0) = 1; \end{cases} \tag{7}$$

[62](213 页) 中,

$$\begin{cases} 4x^2\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -1+(1-2x)f - xf^2, \\ f_0 = f(0) = 1; \end{cases} \tag{8}$$

以及 Tutte[103] 在研究平面地图四色和时发现的方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2}\left(2z+5f-3z\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right) = 48z, \\ f|_{z=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

第 7 章讨论了带有偏微分运算的多元函数方程. 这些方程有两个来源: 一类源自曲面的四角化, 例如球面、柱面、环面、射影面和 Klein 瓶. 这是沿着一种新的思路发现的. 另一类源自各种地图在曲面上同构类的总和. 诸如

$$\begin{cases} axy\left(2y\dfrac{\partial f}{\partial y} - x\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = -1+(1-xyh)f, \\ f|_{x=0,y=0} = 1, \end{cases} \tag{10}$$

其中 $h = f|_{x=1}$, $a \in \mathbb{R}_+$, $a \neq 0$. 当 $a = 1$ 和 $a = 2$ 时, 分别参见文献 [73](192 页) 和 [67](206 页). 又如方程

$$\begin{cases} ax^3y\dfrac{\partial f}{\partial x} = \left(1-ax^2y+\dfrac{xy}{1-x}\right)f - \dfrac{x^2y}{1-x}h - xy - 1, \\ f|_{x=0,y=0} = 1, \end{cases} \tag{11}$$

其中 $h = f|_{x=1}$, $a \in \mathbb{R}_+$, $a \neq 0$, 以及方程

$$\begin{cases} 2ax^4y\dfrac{\partial f}{\partial x^2} = \left(1-ax^2y+\dfrac{x^2y}{1-x^2}\right)f - \dfrac{x^2y}{1-x^2}h - 1, \\ f|_{x=0,y=0} = 1, \end{cases} \tag{12}$$

其中 $h = f|_{x=1}$, $a \in \mathbb{R}_+$, $a \neq 0$.

前面所讨论的都是有限变元的. 此后三章讨论的则全是无穷变元带有介子泛函的方程. 由于上面谈的有限情形都可视为在各种不同条件下的特例, 介子泛函方程在本书中占了近 2/3 的篇幅.

在第 8 章中, 所讨论的都是线性形式的介子泛函方程, 给出了 8 种类型. 例如, 植树型:

$$\begin{cases} f = y_1 + \int_y \Big(\dfrac{y^2 f}{1-yf}\Big), \\ f|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = 0, \end{cases} \tag{13}$$

参见文献 [22,24]. 普树型:

$$\begin{cases} f = 1 + x\int_y \big(y\delta_{x,y}(uf|_{x=u})\big), \\ f|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = 1, \end{cases} \tag{14}$$

参见文献 [22,24]. 注意, 原方程有误, 以此为准. 单圈型:

$$\begin{cases} f = x^2 f_{\text{Tree}} + x\int_y (y\partial_{x,y} f|_{x=u}), \\ f|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = 0, \end{cases} \tag{15}$$

其中 f_{Tree} 已由方程式 (14) 的解确定, 参见文献[22,24]. 超轮型:

$$\begin{cases} f = x^2 + x^2\int_y \Big(\dfrac{y}{x-yf}\Big), \\ f|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = 0, \end{cases} \tag{16}$$

其中 $\boldsymbol{y} = (y_2, y_3, y_4, \cdots)$. 从而 $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{i}} = y_2^{i_1} y_3^{i_2} y_4^{i_3} \cdots$. 冬梅型:

$$\begin{cases} \Big(1 - \dfrac{xy_3}{1-y_2}\Big) f = 1 + x\int_y \big(y\delta_{x,y}(uf|_{x=u})\big), \\ f|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = 1, \end{cases} \tag{17}$$

参见文献 [22,24]. 注意, 在 $\delta_{x,y}$ 下的 $uf|_{x=u}$ 更正了原文的笔误 $u + uf|_{x=u}$, 而且始条件也不同了. 无裂外面型:

$$\begin{cases} f = x^2 + \int_y \Big(\dfrac{xy\partial_{x,y}(f|_{x=u})}{1-xy}\Big), \\ f|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = 0, \end{cases} \tag{18}$$

参见文献 [30]. 受限外面型:

$$\begin{cases} f = 1 + x^2 f + x\int_y \big(y\delta_{x,y}(uf|_{x=u})\big), \\ f|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = 1, \end{cases} \tag{19}$$

参见文献 [29]. 普通外面型:

$$\begin{cases} g = 1 + x^2\varphi(x) g + x\int_y \big(y\delta_{x,y}(ug|_{x=u})\big), \\ g|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = 1, \end{cases} \tag{20}$$

其中 $\varphi(x)\in\mathcal{R}_+\{x\}$, 使得对任何整数 $n\geqslant 0$, $\phi_m=\partial_x^m\varphi\in\mathbb{R}_+$, $\phi_{2i+1}=0\ (i\geqslant 0)$.

第 9 章提供了 9 种类型的介子泛函方程. 除内面 Halin 型:

$$\begin{cases}\left(1-x\int_y\dfrac{y^2}{x-yg}\right)g=x^2y_3,\\ g|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=0,\quad \dfrac{\partial g}{\partial x}\Big|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=0\end{cases}\tag{21}$$

外, 全是非线性的. 参见文献 [65](41 页, 式 (2.2.6)). 例如, 普通内面型:

$$\begin{cases}g=1+x^2g^2+x\int_y\Big(y\delta_{x,y}(ug|_{x=u})\Big),\\ g|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}\Rightarrow x=0}=1,\end{cases}\tag{22}$$

参见文献 [58](204 页). 无环内面型:

$$\begin{cases}g=\int_y\dfrac{1}{1-\partial_{x,y}(u^2g|_{x=u})},\\ g|_{x=0\Rightarrow\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=1,\end{cases}\tag{23}$$

参见文献 [67](179 页). 无隔内面型:

$$\begin{cases}f=x^2+x\int_y\dfrac{y\partial_{x,y}f|_{u=x}}{1-\partial_{x,y}f|_{u=x}},\\ f|_{x=0\Rightarrow\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=0,\end{cases}\tag{24}$$

其中 $f\in\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3,\cdots)$. 单内面型:

$$\begin{cases}x^2f^2+x\int_y\Big(y\delta_{x,y}\big(uf\big|_{x=u}\big)\Big)=\int_y\Big(\big((1+xy)f-1\big)f\big|_{x=y}\Big),\\ f\big|_{x=0\Rightarrow\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=1,\end{cases}\tag{25}$$

其中 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3,\cdots)\in\mathcal{V}$, 参见文献 [39], 或 [67](194 页). 内面 Euler 型:

$$\begin{cases}f=1+x^2f^2+x^2\int_y y^2\delta_{x^2,y^2}\big(f\big|_{u=x^2}\big),\\ f\big|_{x=0\Rightarrow\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=1,\end{cases}\tag{26}$$

其中 $f\in\mathcal{F}$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3,\cdots)\in\mathcal{V}$, 参见文献 [25] 或 [67](122 页). 无隔 Euler 内面型:

$$\begin{cases}f=x^2+x^2\int_y\dfrac{y^2\delta_{x^2,y^2}f\big|_{u=x^2}}{(1-\partial_{x^2,y^2}f\big|_{u=x^2})^2-(xy\delta_{x^2,y^2}f\big|_{u=x^2})^2},\\ f\big|_{x=0\Rightarrow\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=0,\end{cases}\tag{27}$$

其中 $f\in\mathcal{F}$, $\boldsymbol{y}=(y_2,y_4,y_6,\cdots)$, 参见文献 [25], 或 [65](186 页). 无环 Euler 内面型:

$$\begin{cases} f=\int_y \dfrac{1-\partial_{x^2,y^2}(uf\big|_{u=x^2})}{1-2\partial_{x^2,y^2}(uf\big|_{u=x^2})-x^2y^2\delta_{x^2,y^2}(uf\big|_{u=x^2}^2)}, \\ f\big|_{x=0\Rightarrow\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=1, \end{cases} \tag{28}$$

其中 $f\in\mathcal{F}$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3,\cdots)$. 在文献 [25] 或 [65](186 页) 中, 可见到方程式 (28) 的第一式或它的等价形式. 单二部内面型:

$$\begin{cases} (f-1)\int_y f\big|_{x=y}=x^2f^2+x^2\int_y\Big(y^2\delta_{x^2,y^2}f\big|_{u=x^2}\Big), \\ f\big|_{x=0\Rightarrow\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=1. \end{cases} \tag{29}$$

在文献 [57](231 页), 或 [59](271 页) 中, 可看到方程式 (29) 的第一式或它的等价形式.

第 10 章讨论了曲面型的介子泛函方程. 这里提供 5 种类型. 例如, 曲面限端型:

$$\begin{cases} x\int_y y\big(1+\partial_{x,y}(f-1)\big|_{u=x}\big)=(1-x^2)f-x^3\dfrac{\partial f}{\partial x}-1, \\ f_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=1, \end{cases} \tag{30}$$

其中 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3,\cdots)$. 曲面无桥型:

$$\begin{cases} x\int_y y\big(\partial_{x,y}(g-a)\big|_{u=x}\big)=(1-x^2)g-x^3\dfrac{\partial g}{\partial x}-b, \\ g_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=a, \end{cases} \tag{31}$$

其中 a, $b\in\mathbb{Z}_+\subseteq\mathbb{R}_+$. 在文献 [65](180 页) 中, 可以看到形如式 (31) 的方程. 不过要注意, 在那里, 偏微分项的系数不是 x^2, 而是 x^3, 斜差分号 $\partial_{x,y}$ 下的 f 应为 $f-1$. 事实上, 方程式 (30) 与方程式 (29) 之间的不同, 除在介子泛函下的部分外, 还有常数项. 方程式 (29) 的 $y\big(1+\partial_{x,y}(f-1)\big|_{u=x}\big)$, 在方程式 (30) 中变成了 $y\big(\partial_{x,y}(g-1)\big|_{u=x}\big)$. 曲面无环型:

$$\begin{cases} f=b+xf\int_y yf\big|_{x=y}+x\sum\limits_{i\geqslant 1}\int_y y\Big(y\dfrac{\partial f\big|_{y_i=y^i}}{\partial y}\Big), \\ f\big|_{x=0\Rightarrow\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=a, \end{cases} \tag{32}$$

其中 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3,\cdots)$, a, $b\in\mathbb{R}_+$, 参见文献 [67](方程式 (7.4.8), 204 页). 曲面 Euler 型:

$$\begin{cases} 2x^4\dfrac{\partial g}{\partial x^2} = -b + (1-x^2)g - x^2\displaystyle\int_y y^2\delta_{x^2,y^2}g\big|_{u=x^2}, \\ g|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = a, \end{cases} \tag{33}$$

其中 $a,\ b \in \mathbb{Z}_+ \subseteq \mathbb{R}_+$, 参见文献 [67](142 页). 曲面普通型:

$$\begin{cases} f = a + x^2 f + x^3\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\displaystyle\int_y y\delta_{x,y}(uf\big|_{u=x}), \\ f|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = a, \end{cases}$$

其中 $a \in \mathbb{Z}_+ \subseteq \mathbb{R}_+$. 参见文献 [76].

第 1 章　基本知识

为方便, 全书采用通常的逻辑符号约定: 用 $\vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall$ 和 $\exists$ 分别表示或, 与, 否定, 蕴涵, 等价, 任意和存在.

1.1　集合与映射

一个集合, 就是将一些我们感兴趣的最基本的个体放在一起所组成的一个研究对象. 如果一个集合由所有我们感兴趣的最基本的个体组成, 则称它为*通集*, 记作 Ω. 其中的每一个最基本的个体称为*元素*. 这些元素可以为实体 (客观存在), 也可以为虚体 (主观臆造). 通常, 用大写字母表示集合, 例如 $A, B, C, \cdots$; 用小写字母表示元素, 例如 $a, b, c, \cdots$. 将 "a 为集合 A 的一个元素" 用 "$a \in A$" 表示. 如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素, 则 A 称为 B 的一个*子集*, 即 $A \subseteq B$. 没有元素的集合称为空集, 即 $\emptyset$.

可见, 任何一个集合 A 都有 A 本身和空集 $\emptyset$ 作为子集. 记 $\mathcal{O}$ 为由通集 Ω 的所有子集组成的集合, 或者说*集族*, 即 $\mathcal{O} = \{A | A \subseteq \Omega\}$, 或者 2^{Ω}. 自然, $\emptyset, \Omega \in \mathcal{O}$.

对于任何两个集合 $A, B \in \mathcal{O}$, 用 $\cup$ 和 $\cap$ 表示它们之间的运算, 分别称为*并*和*交*, 即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}, \quad A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

集合 A 减集合 B 就是从 A 中除去属于 B 的元素, 所得结果用 $A \backslash B$ 表示, 称为 A 与 B 的*差*. 如果 $B \subseteq A$, 这个差还可用 $A - B$ 表示. 若 $A = \Omega$, 则记 $B^{\mathrm{c}} = \Omega - B$, 称为 B 的*补*.

运算 $\cup$ 和 $\cap$ 都满足交换律和结合律, 可采用记号

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad 和 \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i, \tag{1.1.1}$$

其中 $A_i \in \Omega$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $n \geqslant 1$ 为任何给定的正整数. 它们之间还满足分配律. 这些与算术中的情形相仿. 然而, 集合的幂同律、吸收律、单补律和通界律在算术中则是没有的 (参见 [68], §1.1). 在此基础上, 可以导出下面的结论.

定理 1.1.1 对任何 $A, X \subseteq \Omega$, 有

$$\begin{cases} (A \cap X = A) \vee (A \cup X = X) & \Rightarrow & A = \emptyset, \\ (A \cap X = X) \vee (A \cup X = A) & \Rightarrow & A = \Omega. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

定理 1.1.2 对任何 $A, B \subseteq \Omega$, 有

$$A \cap B = A \quad \Leftrightarrow \quad A \cup B = B. \tag{1.1.3}$$

定理 1.1.3 对任何 $A, B, C \subseteq \Omega$, 有

$$(A \cap B = A \cap C) \wedge (A \cup B = A \cup C) \quad \Leftrightarrow \quad B = C. \tag{1.1.4}$$

定理 1.1.4 对任何 $A \subseteq \Omega$, 有

$$(A^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = A. \tag{1.1.5}$$

定理 1.1.5 对任何 $A, B \subseteq \Omega$, 有

$$(A \cup B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cap B^{\mathrm{c}}, \quad (A \cap B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \cup B^{\mathrm{c}}. \tag{1.1.6}$$

令 $A, B \subseteq \Omega$. 从 A 到 B 的一个映射就是对 A 的每一个元素与 B 的一个元素给出一个对应. 集合 A 中的元素称为这个映射的后像, 或者原像, B 中的元素称为前像或者像.

记

$$A \times B = \{(x, y) \big| \ \forall x \in A, \forall y \in B\},$$

称之为笛卡儿积. 一个集合 X 与它本身的笛卡儿积也称乘方. 例如, $X \times X = X^2$. 一般地, $X^{n-1} \times X = X^n$, 其中 $n \geqslant 1$. 规定 $X^0 = \emptyset$ 和 $X^1 = X$.

运算并、交和差都是从 $2^{\Omega} \times 2^{\Omega}$ 到 2^{Ω} 的映射. 而补运算则是从 2^{Ω} 到它自身的映射.

从 A 到 B 的一个单射是指这样的一个映射 $\alpha\colon A \to B$, 使得对 $\forall a, b \in A$,

$$a \neq b \quad \Rightarrow \quad \alpha(a) \neq \alpha(b).$$

单射也称为 1–1 映射. 一个满射则是这样的一个映射 $\beta: A \to B$, 使得对 $\forall b \in B$,

$$\exists a \in A, \quad \beta(a) = b.$$

例如, 并、交以及差都是满射, 而不是单射. 如果一个映射既是单射又是满射, 则称之为*双射*, 或者说 1–1 对应. 例如, 补运算就是一个双射.

如果在一个集合中允许两个元素是相同的, 或者带相同的标志, 则称之为*带重集*; 否则, 称为*非重集*.

如果两个带重集 A 和 B 之间有一个双射, 则称它们有相同的*基数*, 即 $|A|=|B|$. 例如, 正整数的集合与正偶数的集合具有相同的基数. 两个有限集的元素个数相同, 当且仅当它们的基数相同. 基数有限的集合称为*有限集*; 否则, 称为*无限集*. 对于有限集 X 和 T, 有

$$|X \times Y| = |X| \times |Y| = |X||Y|.$$

若用 X^Y 表示所有从 X 到 Y 映射的集合, 则 $|X^Y| = |Y|^{|X|}$.

两个带重集 A 和 B *同构*, 就是指这两个带重集之间有一个双射, 使得有相同标志元素的像也带相同的标志. 用 $A \cong B$ 表示 A 与 B 同构. 可见, 同构的集合具有相同的基数.

定理 1.1.6 两个非重集 A 和 B 同构的充要条件是

$$|A| = |B|. \tag{1.1.7}$$

证明 必要性可从同构和集合的基数概念的意义直接导出. 反之, 由于 A 与 B 的基数相同, 它们之间存在一个双射. 由于无重元素, 这个双射本身就提供了一个同构. 充分性成立. □

对于带重集, 虽然要复杂些, 但还算简单. 只要将有相同标志的元素区别成子集, 按元素数从大到小排个次序, 视子集中的元素互不相同, 再依次用定理 1.1.6 中的式 (1.1.7) , 即可识别两个带重集的同构.

判定系统 $(2^A; \cup, \cap, ^c)$ 与 $(2^B; \cup, \cap, ^c)$ 是否同构, 由于涉及运算规则, 故通常不会那么简单.

推论 1.1.1 对于非重集 A, 令 ϕ 是从 A 的所有元素发出的一个单射, 则 $A \cong \phi(A)$, 其中 $\phi(A) = \{y | \exists x \in A, \phi(x) = y\}$.

证明 因为这时 ϕ 也是一个满射, 由定理 1.1.6, 即可得欲证的结论. □

若 A 是带重集, 经将定理 1.1.6 推广到带重集相仿的讨论, 也可得推论 1.1.1 对于带重集的情形.

在一个集合 $A\neq\emptyset$ 上, 如果有一个运算, 记为 $\diamond$, 使得满足下面的群性 1~ 群性 4, 则称 A 的这个结构为一个群, 用 $(A;\diamond,1_{(\diamond)})$ 表示:

群性 1(封闭律) 对 $\forall x,y\in A$, $x\diamond y\in A$;

群性 2(结合律) 对 $\forall x,y,z\in A$, $(x\diamond y)\diamond z=x\diamond(y\diamond z)$;

群性 3(幺元律) $\exists 1_{(\diamond)}$(或简记为 1) $\in A$, 使得 $\forall x\in S$, $x\cdot 1_{(\diamond)}=x$;

群性 4(逆元律) 对 $\forall x\in S,\exists y\in S$, $x\diamond y=1_{(\diamond)}$.

如果在群中的运算还满足交换律, 则这个群称为交换群, 或者 Abel 群. 对于 Abel 群, 运算 $\diamond$ 总是用 $+$ 代替; 同时, 其幺元用 0 代替.

如果在一个 Abel 群 $(A;+,0)$ 上, 还有另一个运算, 用 $\cdot$ 表示, 使得只满足群性 1~ 群性 3, $0=1_{(+)}\neq 1_{(\cdot)}=1$, 以及

分配律 对 $\forall a,b,c\in A$,

$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c,\quad c\cdot(a+b)=c\cdot a+c\cdot b, \tag{1.1.8}$$

则称 A 的这个结构为一个环, 用 $(A;+,\cdot,0,1)$ 表示. 在一个环上, 如果运算 $\cdot$ 也满足交换律, 则称它为交换环.

如果一个交换环 $(A;+,\cdot,0,1)$ 还满足下面的消去律, 则称之为一个整域:

消去律 对 $a,b,c\in A$, $c\neq 0$, 如果 $a\cdot c=b\cdot c$, 则 $a=b$.

在一个交换环 $(A;+,\cdot,0,1)$ 上, 对 $\forall a\in A,a\neq 0$, 都存在 a^{-1}, 使得 $a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$, 则称之为一个域.

所谓 F 上的一个空间 (准确地说, 向量空间或线性空间), 常记为 $(\mathcal{X},F;+,\bullet)$ (或简记为 $\mathcal{X}$), 就是指一个 Abel 群 $(\mathcal{X},+)$, 或同样地简记为 $\mathcal{X}$, 伴之以一个域 (或整域) $(F,+,\bullet)$, 或简记为 F, 并满足下面的四条公理: 空间性 1~ 空间性 4. 其中, 二元运算 "+" 称为向量和, "$\bullet$" 称为标量积. 在 Abel 群 $\mathcal{X}$ 和域 F 上的加法用同样的记号. 标量积 $a\bullet\boldsymbol{A}$, 或简记为 $a\boldsymbol{A}$, 是对于 $a\in F$ 和 $\boldsymbol{A}\in\mathcal{X}$ 的, 而且与 F 中的乘法用相同的记号. $\mathcal{X}$ 中的元称为向量, F 中的元称为标量.

空间性 1 对 $\forall a\in F,\forall\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathcal{X},a(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=a\boldsymbol{A}+a\boldsymbol{B}$;

空间性 2 对 $\forall a,b\in F,\forall\boldsymbol{A}\in\mathcal{X},(a+b)\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{A}$;

空间性 3 对 $\forall a,b\in F,\forall\boldsymbol{A}\in\mathcal{X},(ab)\boldsymbol{A}=a(b\boldsymbol{A})$;

空间性 4 对 $\forall\boldsymbol{A}\in\mathcal{X},1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

似乎在空间的向量与标量之间需要说明的仅是在符号上的区别. 分别用 $\mathbf{0}_{\mathcal{X}}$ 和 0_F 表示 $\mathcal{X}$ 和 F 的零元. 然而, 由空间性 1~ 空间性 4 可以看出, $\forall\boldsymbol{A}\in\mathcal{X},0_F\boldsymbol{A}=\mathbf{0}_{\mathcal{X}}$; $\forall a\in F$, $a\mathbf{0}_{\mathcal{X}}=\mathbf{0}_{\mathcal{X}}$. 这种区别总是可以略而不计, 并简单地用 0 表示 0_F 和 $\mathbf{0}_{\mathcal{X}}$. 设有域 F 上的空间 $\mathcal{X}$ 的一个子集 $\mathcal{Y}\subseteq\mathcal{X}$, 若 $\mathcal{Y}$ 本身也是一个

空间, 并且其中的运算与 $\mathcal{X}$ 的相同, 则称 $\mathcal{Y}$ 为 $\mathcal{X}$ 的一个子空间, 记为 $\mathcal{Y} \subseteq_{\text{vect}} \mathcal{X}$ (或在不致混淆时, 简记为 $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$). 零元 0 属于任何空间, 而且它本身也是一个空间, 称为零空间或平凡空间, 用 $\{0\}$ 表示. 任何一个非零二阶向量与 0 形成一个子空间, 记为 $\mathcal{J}$.

1.2 函数与变换

当 $\mathcal{O} = 2^{\mathbb{X}}$ ($\mathbb{X}$ 为数的集合) 时, 集合 $A \in \mathcal{O}$ 和 $B \in \mathcal{O}$ 之间的映射 ϕ 就是函数. 集合 A 和 B 分别称为 ϕ 的定义域和值域. 集合 $D = \{x|\exists y \in B, y = \phi(x)\} \subseteq A$ 和 $Y = \{y|\exists x \in A, y = \phi(x)\} \subseteq B$ 分别称为 ϕ 的原像集和像集. 如果 $D \subseteq X^n$ (n 是一个正整数), 则函数 ϕ 称为 n 元函数, 常记为 $\phi = \phi(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为行向量. 若 $n = 1$, 则称 ϕ 为单变量函数; 若 $n \geqslant 2$, 称之为多变量函数. 若 $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, 则 ϕ 称为齐函数.

本书所涉及的有整数集 $\mathbb{Z}$、有理数集 $\mathbb{Q}$、实数集 $\mathbb{R}$ 和复数集 $\mathbb{C}$. 若无特别说明, 关于定义域和值域, 都在实数集中讨论函数.

两个函数 f 和 g 相等, 即 $f = g$, 是指它们有相同的定义域和值域, 并且对公共定义域上的任何元素 x, 都有 $f(x) = g(x)$.

若一个函数 ϕ 具有这样的性质: 对 $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$,

$$\phi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \phi(\boldsymbol{x}) + \phi(\boldsymbol{y}), \tag{1.2.1}$$

则称 ϕ 为一个线性函数; 否则, 称为非线性函数. 记 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$, 即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的内积. 用上标 “T” 表示向量的转置.

定理 1.2.1 一个齐函数 ϕ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是线性的, 当且仅当存在常向量 $\boldsymbol{a}$, 使得

$$\phi = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}). \tag{1.2.2}$$

证明 因为 ϕ 是齐函数, 所以有

$$\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \tag{1.2.3}$$

由线性性, 即式 (1.2.1) , 若用 $-\boldsymbol{x}$ 代替 $\boldsymbol{y}$, 则由式 (1.2.4) , 有 $\phi(\boldsymbol{x}) + \phi(-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$. 从而

$$\phi(-\boldsymbol{x}) = -\phi(\boldsymbol{x}). \tag{1.2.4}$$

在式 (1.2.1) 的基础上, 对任何正整数 n, 归纳地可得

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\phi(\boldsymbol{x}_i). \tag{1.2.5}$$

若取 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, 则对任何正整数 n, 有

$$\phi(n\boldsymbol{x})=n\phi(\boldsymbol{x}). \tag{1.2.6}$$

由于 $(n/m)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$, 即 $n\boldsymbol{x}=m\boldsymbol{y}$, 从式 (1.2.6), 得 $n\phi(\boldsymbol{x})=m\phi(\boldsymbol{y})$, 即

$$\phi\left(\frac{m}{n}\boldsymbol{y}\right)=\phi(\boldsymbol{x})=\frac{m}{n}\phi(\boldsymbol{y}). \tag{1.2.7}$$

这就意味, 由式 (1.2.4) 可知式 (1.2.6) 对于任何有理数 n 成立. 进而, 由有理数的稠密性和函数 ϕ 的连续性, 终得对 $\forall \boldsymbol{a}\in\mathbb{R}$, 有

$$\phi(a\boldsymbol{x})=a\phi(\boldsymbol{x}). \tag{1.2.8}$$

下面证明必要性. 因为 ϕ 是线性的, 即对 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$, $\phi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\phi(\boldsymbol{x})+\phi(\boldsymbol{y})$, 所以对于任何 $x\in\mathbb{R}$, 有

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{1}_i,$$

其中 $\mathbf{1}_i$ 是仅第 i 个分量为 1、其他分量全为 0 的向量. 由式 (1.2.5) 和式 (1.2.8), 得

$$\phi(\boldsymbol{x})=\phi\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{1}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\phi(\mathbf{1}_i).$$

从而有式 (1.2.2) , 其中 $\boldsymbol{a}=(\phi(\mathbf{1}_1),\phi(\mathbf{1}_2),\cdots,\phi(\mathbf{1}_n))$. 必要性得证.

由于 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}')=\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{a}\boldsymbol{y}'$, 由式 (1.2.1) , 即可得充分性. □

对函数 $\phi(\boldsymbol{x})$, 作变量替换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{t}+\boldsymbol{a}$ 的运算, 称为平移. 不难看出, 任何非齐函数都可由齐函数通过平移得到.

令 $\boldsymbol{A}=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m}$ 是一个 $n\times m$ 矩阵. 通过 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}$ 将 n 个变量 $\boldsymbol{x}$ 用 m 个变量 $\boldsymbol{z}$ 代替, 这称为对函数 ϕ 作线性变换.

定理 1.2.2　在一个环上, $m\times n$ 的线性变换形成一个线性空间.

证明　根据定义空间的四条公理: 空间性 1~ 空间性 4, 所有 $m\times n$ 矩阵对于加法形成一个 Abel 群, 因此线性变换形成一个线性空间. □

虽然定理 1.2.2 在线性代数中已屡见不鲜, 但这里所要注意的则是它的适用范围已远超出了 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 等. 或者说, 环中的元素可以是符号而不是数.

只有方阵才对于矩阵的乘法存在逆, 将那些存在逆的矩阵称为*可逆的*. 又知, 一个矩阵可逆当且仅当其行列式非零.

定理 1.2.3 在一个环(不论交换与否)R 上, 所有行列式非零的矩阵形成一个非交换环.

证明 从环的定义, 即可导出欲证的结论. □

给定两个单变量函数 f 和 g. 如果 g 的值域是 f 的定义域, 则它们的*合成*常记为 $f\circ g=fg$, 即对于任何允许的 x, $f\circ g(x)=f(g(x))$. 但注意, 当 $g=f$ 时, 一般 $f\circ g\neq f^2$. 例如, 若 $f(x)=x+1$, 则 $f\circ f(x)=f(f(x))=f(x+1)=x+2$, 但 $f^2=(x+1)^2=x^2+2x+1$. 为避免混淆, 记 $f\circ f=f^{\circ 2}$, 归纳地, 可知 $f\circ f^{\circ n-1}=f^{\circ n}$ $(n\geqslant 3)$. 当 $f(x)=x$ 时, 有 $f^{\circ n}=f$ ($n\geqslant 1$). 为运算方便, 总是规定 $f^{\circ 1}=f$. 这样的函数就是*幺函数*, 也用 1 表示. 函数 $f(x)=x^n$ $(n\geqslant 0)$, 称为*幂函数*. 其中, n 为*次数*. 注意, 当 $n=0$ 时, 幂函数 $f(x)=1$.

给定三个单变量函数 $h:A\to B$, $g:B\to C$ 和 $f:C\to D$, 且 f 和 g 都是满射. 下面看一看 $f\circ g\circ h=fgh$ 的意义. 由于对 $\forall x\in A$,

$$(fg)h(x)=fg(h(x))=f(gh(x))=f(gh)(x),$$

可见 $(fg)h=f(gh)$. 这就是说, 合成运算满足结合律. 从而 fgh 有确定的意义.

任何一个函数 $f:A\to B$ 都有一个*左幺元*, 记为 1_A, 以及一个*右幺元*, 记为 1_B, 使得

$$1_Af=f=f1_B. \tag{1.2.9}$$

这也称为*幺元律*.

设函数 $r:S\to T$, $S\subseteq A$, $T\subseteq B$. 如果对 $\forall x\in S$, 都有 $r(x)=f(x)$, 则称 r 为 f 的*限制*, 即 $r=f|_S$; 反之, f 为 r 的*扩张*.

设函数 $i:S\to A$. 若对 $\forall x\in S$, 都有 $i(x)=x$, 则称之为*内蕴*. 可见, $i=1_A|_S$.

任一函数都可表示为两个函数, 即一个单射和一个满射的合成. 假设 f 的像集为 $U\subseteq B$, 则 $f=r\circ i$, 其中限制 $r=f|_A:A\to U$ 是一个满射, 内蕴 $i:U\to B$ 是一个单射.

给定两个函数 $f:A\to B$ 和 $g:B\to A$, 可以作合成运算. 如果 $f\circ g=1_B$, 则称 f 为 g 的*左逆*, g 为 f 的*右逆*. 如果一个函数既有左逆又有右逆, 则由幺元律式 (1.2.9) 知, 这个左逆和右逆必相等, 并统称之为*逆*. 用 f^{-1} 表示函数 f 的逆.

定理 1.2.4 一个定义域非空的函数有左逆, 当且仅当它是一个单射; 一个定义域非空的函数有右逆, 当且仅当它是一个满射; 一个定义域非空的函数有逆, 当且仅当它是一个双射.

证明　假设 $g:B\to A$ 有一个左逆 $f:A\to B$, 则 $fg=1_B$. 从而, $g(x_1)=g(x_2)$ 意味 $x_1=f(g(x_1))=f(g(x_2))=x_2$. 这就是说, g 是一个单射. 反之, 假设 $g:B\leftarrow A$ 是一个单射. 由于 $B\neq\emptyset$, 令 $x_0\in B$. 由于 g 是单射, 故对 $\forall x\in A$, 至多有一个 $y\in B$, 使得 $g(y)=x$. 令函数

$$f(x)=\begin{cases}y(g(y)=x), & \text{当 } x \text{ 属于 } g \text{ 的像集时},\\ x_0, & \text{其他}.\end{cases}$$

容易验证, 对任何 $y\in B$, $f(g(y))=y$, 即 $fg=1_B$. 从而, g 有左逆. 第一个结论得证.

类似地, 从第一个结论的证明也可导出第二个结论. 第三个结论从前两个结论直接导出. □

在这个定理中, 条件 $B\neq\emptyset$ 无关紧要, 它也可以看作是此定理的一种退化情形. 由这个定理可导出: 一个函数是一个双射、一个函数既有左逆又有右逆和一个函数有逆三者是同一回事. 由逆的唯一性, 可得

$$\left(g^{-1}\right)^{-1}=g. \tag{1.2.10}$$

进而, 可验证两个函数合成的逆服从脱衣规则:

$$(fg)^{-1}=g^{-1}f^{-1}. \tag{1.2.11}$$

因为函数的合成不满足交换律, 所以必须注意运算次序.

若引进一个未定元 x (不一定是数!), 称 x^n (整数 $n\geqslant 0$) 为 n 次单项式. 规定 $x^0=1$. 多项式就是单项式的线性组合. 例如

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\ \left(=\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_{[n+1]}^{\mathrm{T}}=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\right) \tag{1.2.12}$$

就是一个 n ($n\geqslant 1$) 次多项式的一般形式. 其中

$$\boldsymbol{a}=(a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n),\quad \boldsymbol{x}_{[n+1]}=(1,x,x^2,\cdots,x^n).$$

将 $\boldsymbol{a}$ 称为这个多项式的系数.

如果 R 是一个环, 其上的运算为加 (+) 和乘 (·, 常略去不写!), 0 和 1 分别为零元和幺元, 令

$$P_R=\{\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}'_{[n+1]}|\forall\boldsymbol{a}\in R^{n+1},n\geqslant 0\},$$

则在 P_R 上也可引进运算加 (+) 和乘 (·, 常略去不写!) 如下:

$$\sum_{i=0}^{s}a_ix^i+\sum_{i=0}^{t}b_ix^i=\sum_{i=0}^{\max\{s,t\}}(a_i+b_i)_ix^i,$$

其中 $a_i=0\ (i>s\geqslant 0)$, $b_i=0\ (i>t\geqslant 0)$,

$$\Big(\sum_{i=0}^{s}a_ix^i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{t}b_jx^j\Big)=\sum_{k=0}^{s+t}c_kx^k,$$

式中

$$c_k=\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant s,0\leqslant j\leqslant t\\ i+j=k}}a_ib_j=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}a_ib_{k-j}.$$

定理 1.2.5 $(P_R;+,\cdot,0,1)$ 是一个环.

证明 首先, 对于加法和乘法, 都可检验满足群性 1(封闭律) 和群性 2(结合律), 甚至交换律. 也可验证分配律, 即式 (1.1.8) . 然后注意到, 在式 (1.2.12) 中, 当 $\boldsymbol{a}=(0,0,0,\cdot)=\boldsymbol{0}$ 时所确定的多项式为零元, 当 $\boldsymbol{a}=(1,0,0,\cdot)=\boldsymbol{0}$ 时所确定的多项式为幺元. 对于加法, 由 $\boldsymbol{a}$ 所确定的多项式的逆为由 $-\boldsymbol{a}$ 所确定的多项式. 但对乘法不能论证逆的存在. 从而, $(P_R;+,0)$ 是一个 Abel 群, $(P_R;\cdot,1)$ 具有群性 1～群性 3. 再考虑到分配律, 即得定理. □

记 $R=(P_R;+,\cdot,0,1)$. 由于 $R\subseteq R[x]$, 称环 $R[x]$ 为环 R 的一个扩张. 一般地, $m\ (m\geqslant 2)$ 元、 $n\ (n\geqslant 2)$ 次多项式

$$p_n(\boldsymbol{x}_m)=\sum_{i=0}^{n}p_i(\boldsymbol{x}_{m-1})x_m^i, \tag{1.2.13}$$

其中 $p_i(\boldsymbol{x}_{m-1})$ 为 $m-1$ 元、i 次多项式, 依次用定理 1.2.5, 即可知 $R[\boldsymbol{x}]$ 是 R 的扩张环. 由此可见, 讨论一元多项式在理论上是有普遍意义的.

定理 1.2.6 一个多项式 $p(x)$ 有一个因子 $x-a$, 当且仅当 $p(a)=0$.

证明 因为 $p(x)$ 有一个因子 $x-a$, 即存在一个次小于 $p(x)$ 的多项式 $q(x)$ 使得 $p(x)=(x-a)q(x)$. 从而, $p(a)=0$.

反之, 因为 $p(a)=0$, 设 $p(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n$, 有

$$\begin{aligned}p(x)&=\sum_{i=0}^{n}c_ix^i-\sum_{i=0}^{n}c_ia^i=\sum_{i=1}^{n}c_i(x^i-a^i)\\&=(x-a)\Big(c_1+\sum_{i=2}^{n}c_i\sum_{j=0}^{i-1}a^jx^{i-1-j}\Big).\end{aligned}$$

从而, $p(x)$ 有因子 $x-a$. □

定理 1.2.7 在一个无限域上, 两个多项式是同一个函数, 当且仅当它们的系数相同.

证明 因为在无限域上的多项式函数环与多项式环同构, 故这里无需区别它们. 充分性是自然的, 只需证必要性. 因为相同的多项式有相等的次数, 设多项式 $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 和 $q(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$ 是相同的. 如果 $a_i\neq b_i$ $(0\leqslant i\leqslant n)$, 则由定理 1.2.6 知, $d(x)=p(x)-q(x)$ 至多在 n 个点上 $d(x)=0$, 其他点处都有 $d(x)\neq 0$. 这与 $p(x)$ 和 $q(x)$ 相同矛盾. □

在定理 1.2.7 中, 无限域不能改为有限域. 例如, 在模 3 整数域 $\mathbb{Z}_3$ 上, 多项式 $p(x)=x^3-x$ 与函数 $q(x)=0$ 相同, 但它们的系数不同.

定理 1.2.8 有且仅有一个次数不超过 n 的多项式, 满足给定 $n+1$ 个不同点上的值.

证明 假设 a_i $(0\leqslant i\leqslant n)$ 为 $n+1$ 个互不相同的点. 已知 $p(a_i)=y_i$ $(0\leqslant i\leqslant n)$. 现在, 可以构造一个 n 次多项式 $p(x)$, 使得 $p(a_i)=y_i$ $(0\leqslant i\leqslant n)$, 即

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\left(\frac{q_i(x)}{q_i(a_i)}\right), \tag{1.2.14}$$

其中

$$q_i(x)=\prod_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}^{n}(x-a_i).$$

注意: 因为 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 互不相同, 故 $q_i(a_i)\neq 0$ $(0\leqslant i\leqslant n)$.

下面看一看唯一性. 假设还有一个 n 次多项式 $r(x)$, 满足 $r(a_i)=y_i$ $(0\leqslant i\leqslant n)$. 因为 $p(a_i)-r(a_i)=0$ $(0\leqslant i\leqslant n)$, n 次多项式 $p(x)-r(x)$ 至多有 $n+1$ 个一次因子. 由定理 1.2.6 知, 只能有 $p(x)-r(x)=0$, 即 $p(x)=r(x)$. □

在这个定理的证明中, 式 (1.2.14) 提供了用 $n+1$ 个互不相同的值表示 n 次多项式的一个显式. 这个公式也称 Lagrange 插值. 用 Lagrange 插值不仅可求出多项式的准确形式, 还可逼近一般非线性函数.

1.3 级数与整域扩张

次数无限的多项式称为级数, 其一般形式为

$$s(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i, \tag{1.3.1}$$

其中对 $\forall i\ (0 \leqslant i \leqslant \infty)$, $a_i \in R$, R 为一个环.

有时, 为普遍性的需要, 还将之扩充到允许有限项带负幂, 即对于一个非负整数 L,

$$s_{[-]}(x) = \sum_{i=-L}^{\infty} a_i x^i = \sum_{i=1}^{L} a_{-i} x^{-i} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \tag{1.3.2}$$

称为 Laurent 级数.

为了方便, 用级数的系数代表它本身. 例如, 式 (1.3.1) 的 $s(x)$ 就是 $\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, a_2, \cdots, \infty)$. 定义两个级数 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的加法为

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{c} = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, \infty).$$

若记 $S_R = \{\boldsymbol{a} | \forall \boldsymbol{a} \in R^{\infty}\}$, 即所有系数在一个无限环 R 上的级数集合, 则由于 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in S$, 可以由 R 中对加法的封闭性看出 $\boldsymbol{c} \in S$. 因此, 这个加法在 S 上是封闭的. 类似地, 还可以验证交换律和结合律. 令 $\mathbf{0} = (0, 0, 0, \cdots, \infty)$, 则因为 $\mathbf{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \boldsymbol{a}$, 故 $\mathbf{0}$ 是 S 上的零元. 对 $\forall \boldsymbol{a} \in S$, 记 $-\boldsymbol{a} = (-a_0 - a_1, -a_2, \cdots, -\infty)$, 由于 $(-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$, 可见 $-\boldsymbol{a}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 的逆. 从而, $(S_R; +, \mathbf{0})$ 是一个 Abel 群.

对于两个级数 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$, 定义

$$\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{c} = (c_0, c_1, c_2, \cdots, \infty),$$

其中

$$c_i = \sum_{\substack{j+k=i \\ 0 \leqslant j, k \leqslant i}} a_j b_k = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, \infty).$$

由 R 对乘法的封闭性, 可知 S_R 对于运算 $*$ 也是封闭的, 从而, 可以将 $*$ 视为 S_R 上的乘法.

对于 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in S_R$, 令 $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{a} * (\boldsymbol{b} * \boldsymbol{c})$, $\boldsymbol{g} = (\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}) * \boldsymbol{c}$. 因为对于 $i = 0, 1, 2, \cdots, \infty$,

$$h_i = \sum_{j=0}^{i} a_j \left(\sum_{k=0}^{i-j} b_k c_{i-j-k} \right) = \sum_{j=0}^{i} \sum_{k=0}^{i-j} a_j b_k c_{i-j-k},$$

$$\begin{aligned} g_i &= \sum_{j=0}^{i} \left(\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} \right) c_{i-j} = \sum_{j=0}^{i} \left(\sum_{k=0}^{i-j} a_j b_k \right) c_{i-j-k} \\ &= \sum_{k=0}^{i} \left(\sum_{j=k}^{i} a_k b_{j-k} \right) c_{i-j} = \sum_{k=0}^{i} a_k \left(\sum_{j=k}^{i} b_{j-k} c_{i-j} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{i} a_k \left(\sum_{l=0}^{i-k} b_l c_{i-l-k} \right), \end{aligned}$$

可以看出 $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{g}$. 这就表明, 运算 $*$ 在 S_R 上也满足结合律.

若记 $\mathbf{1}=(1,0,0,\cdots,0)$, 则因为对 $\forall \boldsymbol{a}\in S_R$ $(\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0})$, $\boldsymbol{a}*\mathbf{1}=\mathbf{1}*\boldsymbol{a}=\mathbf{1}$, 所以 $\mathbf{1}$ 是 S_R 上的幺元.

定理 1.3.1 令 $R\{x\}=(S_R;+,*,\mathbf{0},\mathbf{1})$, 则 $R\{x\}$ 是一个环, 当且仅当 R 是一个环.

证明 先证充分性. 在上面讨论的基础上, 只需看一看两个运算是否满足分配律. 对于 $\forall \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in S_R$, 记 $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{a}*(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$, $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}*\boldsymbol{c}$. 由于

$$h_i=\sum_{j=0}^{i}a_j(b_{i-j}+c_{i-j})=\sum_{j=0}^{i}(a_jb_{i-j}+a_jc_{i-j})=(\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b})_i+(\boldsymbol{a}*\boldsymbol{c})_i=g_i,$$

其中第二个等号来自 R 上的分配律, 可知在 S_R 上分配律成立.

再证必要性. 实际上, 只要注意到 $(R;+,\cdot,0,1)$ 与 $(S_R;+,*,\mathbf{0},\mathbf{1})$ 之间的对应, 即可从证充分性的过程中得到必要性. □

在定理 1.3.1 中, 由于 $R\subset R\{x\}$, $R\{x\}$ 是通过级数得到的环 R 的一个扩张. 类似地, 还可通过多个未定元的级数得到 R 的更多扩张. 例如, $R\{x_1,x_2\}=R\{x_1\}\{x_2\}$; 对于整数 $n\geqslant 3$, $R\{\boldsymbol{x}_n\}=R\{\boldsymbol{x}_{n-1}\}\{x_n\}$. 从证明中可以看出, 如果 R 是交换环, 所有这些扩张环也是交换环.

结合定理 1.2.5, $R[x_1,x_2\}$ 为由以 x_1 为未定元的多项式和以 x_2 为级数得到的扩张环. 以此类推, 可知 $R[x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 的意义.

令 $L(x)=a_{-l_0}x^{-l_0}+a_{-l_0+1}x^{-l_0+1}+a_{-l_0+2}x^{-l_0+2}+\cdots+a_\infty x^\infty$ 为一个以 x 为未定元的 Laurent 级数, 它的最小幂为 $-l_0$, 整数 $l_0\geqslant 0$. 其中 $a_i\in R$, $-l_0\leqslant i\leqslant\infty$, R 是一个环. 用 $\mathcal{L}$ 表示所有 Laurent 级数的集合. 与 S 类似, 用 $\boldsymbol{a}=(a_{-l_0},a_{-l_0+1},a_{-l_0+2},\cdots,a_\infty)$ 表示 $L(x)$. 若记 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$, 则

$$c_i=a_i+b_i\quad(-l_0\leqslant i\leqslant\infty).$$

这就在 $\mathcal{L}$ 上引进了加法. 令 $\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$, 使得

$$c_i=\sum_{j=-l_0}^{i}a_jb_{i-j}\quad(-l_0\leqslant i\leqslant\infty),$$

则同样在 $\mathcal{L}$ 上引进了乘法.

定理 1.3.2 令 $\mathcal{L}\{R;x\}=(\mathcal{L};+,*,\mathbf{0},\mathbf{1})$, 则 $\mathcal{L}\{R;x\}$ 是一个环, 当且仅当 R 是一个环.

证明 只要注意, 通过代换 $x^i = y^{i+l_0}$ $(-l_0 \leqslant i \leqslant \infty)$, 就可发现一个 Laurent 级数 $L(x)$ 变成一个普通的级数 $s(y)$. 从而, 由定理 1.3.1, 即得欲证的结论. □

如果一个环还满足消去律, 则称之为整域. 本书所讨论的函数都是在整域 $\mathcal{R}$ 及其扩张 $R\{\boldsymbol{x}\}$ 中的. 除非有特别需要时, 才用 $\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{R;\boldsymbol{x}\}$.

令 $a(x) \in R\{\boldsymbol{x}\}$. 为了方便, 用 $\boldsymbol{a}_{\{x\}} = (a_0, a_1, a_2, \cdots, \infty)_{\{x\}}$ 表示 $a(x)$, 即以 x 为未定元的级数.

级数 $a(x)$ 对于 x 的微分, 定义为如下的变换:

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{a}_{\{x\}} A, \tag{1.3.3}$$

其中, 矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant \infty}$, $\boldsymbol{a}_i = (a_{i,0}, a_{i,1}, a_{i,2}, \cdots, a_{i,\infty}) = \mathbf{0}_{[i]}$, 即在 $\mathbf{0}$ 中只有第 i $(0 \leqslant i \leqslant \infty)$ 个分量为 i, 其他分量全为 0. 注意, $\mathbf{0}_{[0]} = \mathbf{0}$.

级数 $a(x)$ 对于 x 的积分, 定义为如下的变换:

$$\int a(x)\mathrm{d}x = \boldsymbol{a}_{\{x\}} B, \tag{1.3.4}$$

其中, 矩阵 $B = (b_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant \infty}$, $\boldsymbol{b}_i = (b_{i,0}, b_{i,1}, b_{i,2}, \cdots, b_{i,\infty}) = \mathbf{0}_{[1/(i+1)]}$, 即在 $\mathbf{0}$ 中只有第 i $(0 \leqslant i \leqslant \infty)$ 个分量为 $1/(i+1)$, 其他分量全为 0.

由此可见, 微分和积分都是一类线性变换, 它们在环 $R\{x\}$ 上是封闭的.

类似地, 对于多个未定元 $\boldsymbol{x}$ 的情形, 有*偏微分*和*重积分*. 偏微分和重积分也都是线性变换, 它们在环 $R\{\boldsymbol{x}\}$ 上是封闭的.

1.4 函数方程

一个函数具有形式 $y = f(\boldsymbol{x})$, 或 $F(y;\boldsymbol{x}) = 0$, 其中 y 为因变量, $\boldsymbol{x}$ 为自变量, 前者称为*显函数*, 后者称为*隐函数*. 显函数 $y = f(\boldsymbol{x})$ 在允许消去律的系统中, 总可表示为 $y - f(\boldsymbol{x}) = 0$, 即形如 $F(y;\boldsymbol{x}) = 0$. 在我们所考虑的范围内, 用一个等式表示的隐函数形式是普遍的.

用一个等式表示的变量之间的关系称为*方程*. 求满足方程的一个变量用其他变量表示的过程称为*解方程*. 所得到的这个表达式称为这个方程的一个*解*或*根*. 因为解是一个函数, 它所满足的隐函数形式的方程称为*函数方程*.

令 $\mathcal{R}$ 为一个环, 系数在 $\mathcal{R}$ 中的以 x 为未定元的多项式环和级数环分别记为 $\mathcal{R}[x]$ 和 $\mathcal{R}\{x\}$. 若有两个或更多个未定元, 总假设存在结合性. 例如, $\mathcal{R}\{x\}[y]$ 是

以 y 为未定元的多项式环, 其中多项式的系数来自以 x 为未定元的级数环 $\mathcal{R}\{x\}$. 对于整域也如此.

设 $\mathcal{F}$ 为一个无限整域 (即特征为 0). 如 1.3 节所述, 可以看出

$$\mathcal{F} \subset \left\langle \begin{array}{c} \mathcal{F}_1\langle x,y\rangle \\ \mathcal{F}_2\langle x,y\rangle \end{array} \right\rangle \subset \mathcal{F}\{x\}\{y\}, \tag{1.4.1}$$

其中 $\mathcal{F}_1\langle x,y\rangle$ 和 $\mathcal{F}_2\langle x,y\rangle$ 分别表示以下的链:

$$\begin{cases} \mathcal{F}[x] \subset \mathcal{F}\{x\} \subset \mathcal{F}\{x\}[y] \subset \mathcal{F}[x]\{y\}, \\ \mathcal{F}[y] \subset \mathcal{F}\{y\} \subset \mathcal{F}\{y\}[x] \subset \mathcal{F}[y]\{x\}. \end{cases}$$

以后, 常简记

$$\begin{cases} \mathcal{F}\{x\}[y] = \mathcal{F}\{x,y], \\ \mathcal{F}[y]\{x\} = \mathcal{F}[y,x\}, \\ \mathcal{F}\{x\}\{y\} = \mathcal{F}\{x,y\}. \end{cases} \tag{1.4.2}$$

对于 $f \in \mathcal{F}\{x,y\}$, 记 f 中 $x^m y^n$ 的系数为

$$F_{m,n} = \partial_{(x,y)}^{(m,n)} f \quad (m,n \geqslant 0). \tag{1.4.3}$$

定理 1.4.1 令 $h \in 1+y\mathcal{F}\{x,y\}$, 则:

(1) $\exists h^{-1}, \sqrt[c]{h} \in 1+y\mathcal{F}\{x,y\}$, 素数 $c \geqslant 2$;

(2) h^{-1} 和 $\sqrt[c]{h}$ 是唯一的;

(3) $h \in 1+xy\mathcal{F}[y,x\} \Rightarrow h^{-1}, \sqrt[c]{h} \in 1+xy\mathcal{F}[y,x\}$.

证明 因为 $h \in 1+y\mathcal{F}\{x,y\}$, 故有 $h = 1+yR$, $R \in \mathcal{F}\{x,y\}$. 令

$$\begin{cases} s(yR) = \displaystyle\sum_{i\geqslant 0}(-yR)^i, \\ t(yR) = 1 + \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^{n+1}\prod_{i=0}^{n}(ic-1)}{c^{n+1}(n+1)!}(yR)^{n+1}. \end{cases} \tag{1.4.4}$$

易验证, $s(yR), t(yR) \in 1+y\mathcal{F}\{x,y\}$, 而且, 通过在以下两式中比较 $x^i y^j$ $(i,j \geqslant 0)$ 的系数, 可知它们是唯一的:

$$(1+yR)s(yR) = 1, \quad t(yR)^c = 1+yR,$$

而且 $s(yR) = h^{-1}(yR)$ 和 $t(yR) = \sqrt[c]{h(yR)}$. 这就得到了前两个结论.

由 $h \in 1+xy\mathcal{F}[y,x\}$, 有 $h=1+xyR', R' \in \mathcal{F}[y,x\}$. 进而, 由式 (1.4.4), 对于 y 和 R 分别用 xy 和 R' 代替的情形, 可见在 $h^{-1}(xyR')$ 和 $\sqrt[c]{h(xyR')}$ 中, x^i $(i \geqslant 0)$ 的系数均不过是 $\mathcal{F}[y]$ 中有限个多项式之积的有限和. 从而 $h^{-1}, \sqrt[c]{h} \in 1+xy\mathcal{F}[y,x\}$. 这就是最后一个结论. □

从结论 (1) 的证明中可以看出, 结论对于 c 为负素数也成立. 因为绝对值 $|c| \geqslant 2$ 的任何整数都是素数的乘积, 且任何一个有理数都是一个整数与另一个整数逆的积, 所以结论 (1) 对于任何非零的有理数都成立.

推论 1.4.1 令 $h \in 1+y\mathcal{F}\{x,y\}$, 则:

(1) $\exists\sqrt{h} \in 1+y\mathcal{F}\{x,y\}$;

(2) $\sqrt{h}$ 是唯一的;

(3) $h \in 1+xy\mathcal{F}[y,x\} \Rightarrow \sqrt{h} \in 1+xy\mathcal{F}[y,x\}$.

证明 这是定理 1.4.1 当 $c=2$ 时的特殊情形. □

定理 1.4.2 令 $h \in 1+y\mathcal{F}\{x,y]$, 则 h 有如下的因子分解式:

$$h=\prod_{0\leqslant i\leqslant k}\Big((1-a_iy)^{q_i}+xyH_i\Big), \tag{1.4.5}$$

其中 k 为一个非负整数, $a_0=0, a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 $\mathcal{F}$ 中互不相同的元素, q_i 为一个正整数, H_i 为 $\mathcal{F}\{x,y]$ 中次数低于 q_i 的多项式, $i=0,1,\cdots,k$.

证明 由于 $h \in 1+y\mathcal{F}\{x,y]$, 存在 $a_1 \in \mathcal{F}$. 因为 $a_0=0$, 当 $k=0$ 时, 因子是 1. 这是没有非 1 因子的情形. 因此可只讨论 $k \geqslant 1$, 当然, $a_1 \neq 0$. 如果 f_1 是 h 的一个次数最大的因子, 它的次为 $q_1 \geqslant 1$. 将 f_1 表示为 $(1-a_1y)^{q_1}+xyH_1$ 的形式, 得 $a_1 \neq a_0$, $H_1 \in \mathcal{F}\{x,y]$. 令 $h=f_1s_1$, 则 $s_1 \in 1+y\mathcal{F}\{x,y]$. 同样, 由最大次为 s_1 的因子可确定 $q_2 \geqslant 1$, $a_2 \in \mathcal{F}$, $a_2 \neq a_i$ $(i<2)$, 以及 $H_2 \in \mathcal{F}\{x,y]$. 以此类推, 由 h 次的有限性, 总能得到一个正整数 $k<\infty$, 使得 s_{k+1} 不再有非 1 的因子. □

定理 1.4.3 令 $h \in 1+y\mathcal{F}\{x,y]$, 满足式 (1.4.5) 所示的因子分解, $g=(1+xyH_0)^{-1}h$, 则如下的说法是等价的:

(1) h 在 $\mathcal{F}[y,x\}$ 中有平方根;

(2) g 在 $\mathcal{F}[y,x\}$ 中有平方根;

(3) g 在 $\mathcal{F}\{x,y]$ 中有平方根;

(4) h 有分解式

$$h=(1+xyH_0)\prod_{1\leqslant i\leqslant k}\Big((1-a_iy)^{r_i}+xyG_i\Big)^2.$$

其中 $k, H_0, a_1, a_2, \cdots, a_k$ 均满足定理 1.4.2 的条件, r_i 为一个正整数, G 为 $\mathcal{F}\{x,y]$ 中次数低于 r_i $(i=1,2,\cdots,k)$ 的多项式, 当 $k=0$ 时, 分解式右边的连乘积定义为 1.

证明　(4)⇒(1). 当 $k=0, g=1$ 时, 易验证. 设 $k>0$. 由推论 1.4.1(3), 知 $1+xyH_0$ 在 $1+xy\mathcal{F}[y,x\}$ 中有一个平方根, 即得 (1).

(1)⇒(2). 由于 $1+xyH_0$ 的平方根在 $1+xy\mathcal{F}[y,x\}$ 中有逆, 从 (1) 即得 (2).

(2)⇒(3). 设 $t^2=g, t\in\mathcal{F}[y,x\}$, 则由定理 1.4.2, 有

$$t(0,y)^2 = g(0,y) = \prod_{1\leqslant i\leqslant k}(1-a_i)^{q_i}.$$

由因子分解在 $\mathcal{F}$ 中以及在 $\mathcal{F}[y]$ 中的唯一性, 可知 $r_i=q_i/2$ $(i=1,2,\cdots,k)$ 为一个整数. 由此就得

$$t(0,y) = \pm\prod_{1\leqslant i\leqslant k}(1-a_iy)^{r_i}. \tag{1.4.6}$$

然而, t 总有形式 $u+xy^{r+1}v$, 使得 $r=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant k} r_i, u\in\mathcal{F}\{x,y]$. 它的次数为 r, 且 $v\in\mathcal{F}[y,x\}$. 令 $v=\sum\limits_{m\geqslant 0}V_my^m$, 其中 $V_m\in\mathcal{F}\{x\}, m\geqslant 0$, 则

$$g = t^2 = u^2 + 2xy^{r+1}uv + x^2y^{2r+2}v^2. \tag{1.4.7}$$

由式 (1.4.6), 在 u 中 y^r 的系数 U_r 非零. 为求 U_r, 比较式 (1.4.7) 两边中 y^{2r+2} 的系数, 得 $0=0+2xU_rV_0+0$. 因为 $\mathcal{F}\{x\}$ 又是整域, 即 $A,B\neq 0\Rightarrow AB\neq 0$, 故有 $V_0=0$. 进而, 再比较 y^l $(l\geqslant ar+2)$ 的系数, 又可得 $V_m=0$ $(m\geqslant 1)$. 这就意味着, g 在 $\mathcal{F}\{x,y]$ 中有平方根.

(5)⇒(4). 由于 $t(x,0)^2=g(x,0)=h(x,0)=1$ 和 $t=u\in\mathcal{F}\{x,y]$, 从定理 1.4.2, 有

$$t = \pm\prod_{1\leqslant i\leqslant k}((1-z_iy)^{r_i}+xyG_i),$$

其中 $G_i\in\mathcal{F}\{x,y]$, 它的次数小于 r_i $(i=1,2,\cdots,k)$. 因此 (4) 成立. □

下面的定理给出了 $\mathcal{F}\{x,y]$ 中的一个级数在 $\mathcal{F}\{x,y\}$ 或 $\mathcal{F}[y,x\}$ 中有平方根的表征.

定理 1.4.4　令 $h\in\mathcal{F}\{x,y]$, 则 h 为 $\mathcal{F}\{x,y\}$ (或 $\mathcal{F}[y,x\}$) 中一级数的 c(素数 $c\geqslant 2$) 次方, 当且仅当它有形式 f^cg, 使得 $f\in\mathcal{F}\{x,y]$ (或 $\mathcal{F}[y,x\}$), $g\in 1+y\mathcal{F}\{x,y\}$ (或 $1+xy\mathcal{F}\{x,y]$).

证明 若 h 为 $\mathcal{F}\{x,y\}$ 中一个级数的 c 次方, 因为 $h\in\mathcal{F}\{x,y\}$, 由定理 1.4.1, 有 $\sqrt[c]{h}\in 1+y\mathcal{F}\{x,y\}$; 否则, 必存在 $f\in\mathcal{F}\{x,y]$ 和 $g\in 1+y\mathcal{F}\{x,y\}$, 使得 $h=f^c g$. 实际上, 前者只是后者当 $f=1$ 时的特殊情形. 从而, 必要性得证.

反之, 若 $h=f^c g$, $f\in\mathcal{F}\{x,y]$, $g\in 1+y\mathcal{F}\{x,y\}$, 由定理 1.4.1(1), $\sqrt[c]{h}$ 在 $\mathcal{F}\{x,y\}$ 中存在, 即 h 是 $\mathcal{F}\{x,y\}$ 中某级数的 c 次方. 从而, 充分性得证. □

首先, 看一看一次方程, 即

$$Az=B, \tag{1.4.8}$$

其中 $A,B\in\mathcal{F}\{x,y]$ (或 $\mathcal{F}\{x,y\}$) 为已知的.

定理 1.4.5 方程式 (1.4.8) 在 $\mathcal{F}\{x,y\}$ 中有解, 当且仅当存在一个常数 $a\neq 0$, 使得 $A=ah$, $h\in 1+y\mathcal{F}\{x,y\}$.

证明 方程式 (1.4.8) 在 $\mathcal{F}\{x,y\}$ 中有解, 当且仅当 A 在 $\mathcal{F}\{x,y\}$ 中存在逆. A^{-1} 存在, 当且仅当 $A|_{x=0,y=0}\neq 0$. 由定理 1.4.1, 这就意味着存在一个常数 $a\neq 0$, 使得 $A=ah$, $h\in 1+y\mathcal{F}\{x,y\}$. 即得欲证的结论. □

由消去律, 讨论一般 n ($n\geqslant 2$) 次多项式函数方程, 只需考虑 n 次项系数为 1 的情形, 即

$$x^n+A_{n-1}x^{n-1}+A_{n-2}x^{n-2}+\cdots+A_0=0. \tag{1.4.9}$$

作变量代替 $y=nx+A_{n-1}$. 因为

$$\begin{aligned}
y^n &= (nx)^n+nA_{n-1}(nx)^{n-1}+\sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i}A_{n-1}^i(nx)^{n-i}\\
&= n^n(x^n+A_{n-1}x^{n-1})+\sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i}A_{n-1}^i(nx)^{n-i}\quad(\text{由式 (1.4.9)})\\
&= n^n\Big(-\sum_{i=0}^{n-2}A_ix^i\Big)+\sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i}A_{n-1}^i(nx)^{n-i},
\end{aligned}$$

由 $x=(y-A_{n-1})/n$ 可知, 方程式 (1.4.9) 与如下无 $n-1$ 次项的首项系数为 1 的 n 次方程在相容性上等价:

$$y^n+\sum_{i=0}^{n-2}B_iy^i=0. \tag{1.4.10}$$

事实上,

$$B_i=n^nA_i-\binom{n}{i}A_{n-1}^{n-i}\quad(0\leqslant i\leqslant n-2).$$

现在, 可以看一看如下的二次方程 (当 $n=2$ 时的方程式 (1.4.9)):

$$z^2+A_1z+A_0=0. \tag{1.4.11}$$

其中 $A_1, A_0 \in \mathcal{F}\{x,y]$ (或 $\mathcal{F}\{x,y\}$) 为已知的.

记

$$\Delta = -B_0 = A_1^2 - 4A_0, \tag{1.4.12}$$

即方程式 (1.4.11) 的判别式.

定理 1.4.6 方程式 (1.4.11) 在 $\mathcal{F}\{x,y\}$ (或 $\mathcal{F}[y,x\}$) 中有一解, 当且仅当 Δ 在 $\mathcal{F}\{x,y\}$ (或 $\mathcal{F}[y,x\}$) 中有一个平方根.

证明 方程式 (1.4.11) 可改写为 $(z+A_1/2)^2+A_0-A_1^2/4=0$, 或等价地,

$$\left(z+\frac{1}{2}A_1\right)^2=\frac{1}{4}\Delta,$$

这就意味着, $z\in\mathcal{F}\{x,y\}$ (或 $\mathcal{F}[y,x\}$) , 当且仅当 $\sqrt{\Delta}\in\mathcal{F}\{x,y\}$ (或 $\mathcal{F}[y,x\}$). 由此即得定理. □

结合定理 1.4.4 和定理 1.4.6, 即可知方程式 (1.4.11) 有一个解 $z\in\mathcal{F}\{x,y\}$ (或 $\mathcal{F}[y,x\}$), 当且仅当 $\Delta=f^2g$, 使得 $f=A_1\in\mathcal{F}\{x,y]$ (或 $\mathcal{F}[y,x\}$), $g=\sqrt{1-4A_0/A_1^2}\in 1+y\mathcal{F}\{x,y]$ (或 $1+xy\mathcal{F}\{x,y]$).

下面, 再看一看一般三次函数方程的解法. 由上面的讨论, 只需考虑由式 (1.4.10) 给出的三次方程:

$$z^3+Pz+Q=0. \tag{1.4.13}$$

若作变量代替 $z=\xi+A$, 就可将关于 z 的方程式 (1.4.13) 转化为关于 ξ 的方程:

$$\xi^3+A^3+(3A\xi+P)(\xi+A)+Q=0.$$

因为当 $3A\xi+P=0$ 时, 这个方程的一次项和二次项消失了, 使得 $A=-P/(3\xi)$. 所以上式变为 ξ^3 的二次方程:

$$27(\xi^3)^2+27Q\xi^3-P^3=0. \tag{1.4.14}$$

定理 1.4.7 方程式 (1.4.13) 在 $\mathcal{F}\{x,y\}$ (或 $\mathcal{F}[y,x\}$) 中有一解, 当且仅当 Δ_1 在 $\mathcal{F}\{x,y\}$ (或 $\mathcal{F}[y,x\}$) 中有一个平方根, 且 Δ_2 在 $\mathcal{F}\{x,y\}$ (或 $\mathcal{F}[y,x\}$) 中有一个立方根. 其中

$$\begin{cases}\Delta_2=\dfrac{Q}{2}+\sqrt{\Delta_1},\\ \Delta_1=\left(\dfrac{Q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{P}{3}\right)^3.\end{cases} \tag{1.4.15}$$

证明 由定理 1.4.6, 方程式 (1.4.14) 有解, 当且仅当 Δ_1 在 $\mathcal{F}\{x,y\}$ (或 $\mathcal{F}[y,x\}$) 中有一个平方根. 因为 $-\Delta_2$ 是方程式 (1.4.14) 的一个解, 方程 $\xi^3=-\Delta_2$ 有解 (从而方程式 (1.4.13) 有解!), 当且仅当 Δ_2 在 $\mathcal{F}\{x,y\}$ (或 $\mathcal{F}[y,x\}$) 中有一个立方根. 即得欲证的结论. □

关于 Δ_1 在 $\mathcal{F}\{x,y\}$ 中是否有平方根和 Δ_2 在 $\mathcal{F}\{x,y\}$ 中是否有立方根, 都可用定理 1.4.4 判别.

考虑一般的四次函数方程, 只需用式 (1.4.10) 当 $n=4$ 时的情形, 即

$$z^4+Pz^2+Qz+R=0, \tag{1.4.16}$$

其中 $P,Q,R\in\mathcal{F}\{x,y\}$.

因为没有 z^3 项, 方程式 (1.4.16) 的左端, 只要能确定 $U,V,W\in\mathcal{F}\{x,y\}$, 就有如下形式的分解:

$$(z^2-Uz+V)(z^2+Uz+W)=z^4+(V+W-U^2)z^2+(VU-WU)z+VW.$$

事实上, 与方程式 (1.4.16) 的左端比较, U,V 和 W 由如下方程组确定:

$$\begin{cases} V+W-U^2=P \quad\Rightarrow\quad V+W=P-U^2, \\ VU-WU=Q \quad\Rightarrow\quad V-W=\dfrac{Q}{U}\ (U(0,0)\neq 0!), \\ VW=R. \end{cases} \tag{1.4.17}$$

由式 (1.4.17) 中的前两个方程, 解得

$$\begin{cases} V=(-U^3+PU+Q)/(2U), \\ W=(-U^3+PU-Q)/(2U). \end{cases}$$

将它们代入式 (1.4.17) 中的第三个方程, 经整理可得

$$U^6-2PU^4-RU^2-Q=0.$$

这是一个关于 U^2 的三次方程.

因此, 一般四次方程的求解被转换为三次和三次以下方程的求解. 但如此继续研究五次或五次以上方程的求解, 已被证明必将是徒劳的.

1.5 Lagrange 反演

对一个无限环 (即特征为 0) $\Re$, 令 $\mathcal{L}\{\Re;x\}$ 为由 Laurent 级数所组成的环, 即对 $\forall f\in\mathcal{L}\{\Re;x\}$, x^i $(i<0)$ 的项是有限的. 记

$$V(f)=\min\{i\mid[x^i]f\neq 0\},$$

其中 $[x^i]f$ 表示在 f 中 x^i 项的系数. 通常, $V(f)\geqslant 0$. 有时, 更一般地, $V(f)<\infty$. 这时, 将系数算子扩充到允许 $V(f)<0$ 的情形如下:

$$\partial_x^i=\begin{cases}\left.\dfrac{1}{i!}\dfrac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}\right|_{x=0}, & i\geqslant 0,\\ x^{-i}|_{x=\infty}, & i<0.\end{cases} \tag{1.5.1}$$

也就是说,

$$\partial_x^i f=[x^i]f. \tag{1.5.2}$$

引理 1.5.1 对 $\forall f\in\mathcal{L}\{\Re;x\},V(f)<\infty$, 有

$$\partial_x^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)=0, \tag{1.5.3}$$

其中 ∂_x^{-1} 即式 (1.5.1) 中 ∂_x^i 当 $i=-1$ 时的情形.

证明 易知 x 的任何次幂的导数均不会是 x^{-1}, 由此即得引理. □

引理 1.5.2 对 $\forall f,g\in\mathcal{F}\{x\},V(f),V(g)<\infty$, 有

$$\partial_x^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}g\right)=-\partial_x^{-1}\left(f\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right). \tag{1.5.4}$$

证明 由于 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg)=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}g+f\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$, 从引理 1.5.1, 即可得式 (1.5.4) . □

引理 1.5.3 对于 $f,r\in\mathcal{L}\{\Re;x\},V(f)=k<\infty,V(r)=\alpha>0$, 有

$$\alpha\partial_x^{-1}f=\partial_z^{-1}\left(f(r)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right). \tag{1.5.5}$$

证明 由系数算子的线性性, 只需讨论 $f=x^n$ $(n\geqslant V(f))$ 的情形. 这时, 依引理 1.5.2, 有

$$\partial_z^{-1}\left(r^n(z)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)=-n\partial_z^{-1}\left(r^n(z)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right),$$

即

$$(n+1)\partial_z^{-1}\left(r^n(z)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)=0.$$

从而, 当 $n\neq -1$ 时,

$$\partial_z^{-1}\left(r^n(z)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)=0.$$

当 $n=-1$ 时, 有

$$\partial_z^{-1}\left(r^{-1}(z)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)=\partial_z^{-1}\frac{\mathrm{d}\log_2 r}{\mathrm{d}z}.$$

因为 $r=z^\alpha h$ 使得 $h(0)\neq 0$, 故有

$$\frac{\mathrm{d}\log_2 r}{\mathrm{d}z}=\alpha z^{-1}+\frac{\mathrm{d}\log_2 h}{\mathrm{d}z}.$$

由引理 1.5.1, 即可得

$$\partial_z^{-1}\left(r^n(z)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)=\alpha\partial_x^{-1}x^{-1}=\alpha\partial_x^{-1}f.$$ □

定理 1.5.1 设 $x=t\phi(x),\phi(x)\in\Re\{x\},\phi(0)\neq 0$, 则对 $\forall f\in\mathcal{L}\{\Re;x\}$, $V(f)\geqslant 0$, 有

$$\partial_t^n f=\frac{1}{n}\partial_x^{n-1}\left(\phi^n(x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)\quad (n>1).\tag{1.5.6}$$

证明 因为 $\phi(0)\neq 0,\phi^{-1}(x)$ 存在, 故有 $t=x\phi^{-1}(x)$. 然而, 注意到 $\partial_t^n f=\partial_t^{-1}(t^{-(n+1)}f)$. 从 $V(t)=1=\alpha\geqslant 0$ 和引理 1.5.3, 有

$$\partial_t^{-1}(t^{-(n+1)}f)=\partial_x^{-1}\left(t^{-(n+1)}f\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)=-\frac{1}{n}\partial_x^{-1}\left(f\frac{\mathrm{d}t^{-n}}{\mathrm{d}x}\right).$$

由于 $t=x\phi^{-1}(x)$, 利用引理 1.5.2, 得

$$\partial_x^{-1}\left(f\frac{\mathrm{d}t^{-n}}{\mathrm{d}x}\right)=-\partial_x^{-1}\left(x^{-n}\phi^n\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)=-\partial_x^{n-1}\left(\phi^n\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right).$$

综上所述, 即得定理. □

推论 1.5.1 若 $x=t\phi(x)$, $\phi(0)\neq 0$, 则对 $\forall f\in\mathcal{L}\{\Re;x\}$, $V(f)\geqslant 0$, 有

$$f(x)=f(0)+\sum_{n\geqslant 1}\frac{t^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\left(\phi^n\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=0}\quad (n\geqslant 1),\tag{1.5.7}$$

且 $\partial_t^0=f(0)$.

证明 由于 $V(f)\geqslant 0$, 故 $f(0)$ 为 f 的常数项. 对 $n\geqslant 1$, 由式 (1.5.1) 和式 (1.5.6), 有

$$\partial_t^n f=\frac{1}{n}\frac{1}{(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\left(\phi^n(x)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=0}.$$

这就得到了式 (1.5.7) . □

引理 1.5.4 令 $x=a+t\phi(x),\phi(a)\neq 0$, 则对 $\forall f(x)\in\mathcal{L}\{\Re;x\}$, 有

$$\partial_t^n f=\frac{1}{n}\partial_{x-a}^{n-1}\left(\phi^n\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right). \tag{1.5.8}$$

证明 令 $y=x-a$, 则 $y=t\phi(y+a)$. 由定理 1.5.1, 对 $n\geqslant 1$, 有

$$\partial_t^n f=\frac{1}{n}\partial_y^{n-1}\left(\phi^n(y+a)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}\right)=\frac{1}{n}\partial_{x-a}^{n-1}\left(\phi^n\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right).$$

从而, 引理得证. □

推论 1.5.2 令 $x=a+t\phi(x)$, $\phi(0)\neq 0$, 则对 $\forall f(x)\in\mathcal{L}\{\Re;x\}$, $V(f)\geqslant 0$, 有

$$\partial_t^n f=\frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\left(\phi^n\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=a}\quad(n\geqslant 1), \tag{1.5.9}$$

且它的常数项为 $f(a)$.

证明 因为 $V(f)\geqslant 0$, 且当 $t=0$ 时, $x=a$, 故 f 的常数项为 $f(a)$. 当 $n\geqslant 1$ 时, 由引理 1.5.4, 有

$$\partial_t^n f=\frac{1}{n}\frac{1}{(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\left(\phi^n\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=a}.$$ □

为了将上述结果推广到多个不定元的情形, 先引进一些记号. 令 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 为一个 $m\ (m\geqslant 1)$ 向量, 它的每个分量均为不定元; $\boldsymbol{k}=(k_1,k_2,\cdots,k_m)$ 表示在幺半群 $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}$ 中 x_i 的幂为 $k_i\ (1\leqslant i\leqslant m)$. 对于 $f(\boldsymbol{x})$, $g_1(\boldsymbol{x})$, $\cdots$, $g_m(\boldsymbol{x})\in\mathcal{L}\{\Re;\boldsymbol{x}\}$, 令 $V(g_i)=(V(g_i;x_1),\ V(g_i;x_2),\ \cdots,\ V(g_i;x_m))$, 其中

$$V(g_i,x_j)=\min\{l|\partial_{x_j}^l g_i\neq 0\}\quad(j=1,2,\cdots,m). \tag{1.5.10}$$

进而, 利用

$$\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{i}}=\begin{cases}\dfrac{1}{\boldsymbol{i}!}\dfrac{\mathrm{d}^{\boldsymbol{i}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{i}}}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}}, & \boldsymbol{i}\geqslant\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{x}^{-\boldsymbol{i}}\big|_{\boldsymbol{x}=\infty}, & \boldsymbol{i}<\boldsymbol{0},\end{cases} \tag{1.5.11}$$

其中 $\boldsymbol{i}! = i_1!i_2!\cdots i_m!$, $\mathbf{0} = (0,0,\cdots,0)$,

$$\frac{\mathrm{d}^{\boldsymbol{i}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{i}}} = \frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}}\frac{\partial^{i_2}}{\partial x_2^{i_2}}\cdots,$$

使得 $\boldsymbol{i} = (i_1, i_2, \cdots, i_m)$. 通常, 对于 $f \in \mathcal{L}\{\Re; \boldsymbol{x}\}$, 系数算子也可写成

$$\partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{i}} f = [\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{i}}]f. \tag{1.5.12}$$

若 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}) \in \mathcal{L}\{\Re; \boldsymbol{z}\}, \boldsymbol{g} = (g_1, g_2, \cdots, g_m)$, $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_m)$, 则行列式

$$\det\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{z}}\right) = \det\left(\frac{\partial g_i}{\partial z_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant m}$$

称为 $\boldsymbol{g}$ 的 Jacobi 阵用 $J(\boldsymbol{g})$ 表示.

引理 1.5.5 对于函数 $g(\boldsymbol{z}) \in \mathcal{L}\{\Re; \boldsymbol{z}\}$, 令 $V(g) = (p_1, \cdots, p_m) = \boldsymbol{p}$, $g(\boldsymbol{z}) = a\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{p}}h(\boldsymbol{z})$, 使得 $h(\mathbf{0}) = 1$, $a \neq 0$. 则对任何整数 k, 有

$$g^k(\boldsymbol{z})\frac{\partial}{\partial z_j}g(\boldsymbol{z}) = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z_j}\left(\dfrac{1}{k+1}g^{k+1}(\boldsymbol{z})\right), & k \neq -1, \\ \dfrac{p_j}{z_j} + \dfrac{\partial}{\partial z_j}\log h(\boldsymbol{z}), & k = -1. \end{cases} \tag{1.5.13}$$

证明 当 $k \neq -1$ 时, 易见

$$\frac{\partial}{\partial z_j}\left(\frac{1}{k+1}g^{k+1}(\boldsymbol{z})\right) = \frac{1}{k+1}\frac{\partial}{\partial z_j}g^{k+1}(\boldsymbol{z}) = g^k(\boldsymbol{z})\frac{\partial}{\partial z_j}g(\boldsymbol{z}).$$

当 $k = -1$ 时, 由

$$\begin{aligned} g^{-1}(\boldsymbol{z})\frac{\partial}{\partial z_j}g(\boldsymbol{z}) &= a^{-1}\boldsymbol{z}^{-\boldsymbol{p}}h^{-1}(\boldsymbol{z})\frac{\partial}{\partial z_j}a\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{p}}h(\boldsymbol{z}) \\ &= \boldsymbol{z}^{-\boldsymbol{p}}h^{-1}(\boldsymbol{z})\left(\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{p}}\frac{p_j}{z_j}h(\boldsymbol{z}) + \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{p}}\frac{\partial h}{\partial z_j}\right) \\ &= \frac{p_j}{z_j} + h^{-1}\frac{\partial h}{\partial z_j} = \frac{p_j}{z_j} + \frac{\partial}{\partial z_j}\log h, \end{aligned}$$

即得引理. □

引理 1.5.6 令 $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}_i, \boldsymbol{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ 均为整 m 向量, 则行列式 $G_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z}) = \det \boldsymbol{\Delta}_1$, 其中

$$\boldsymbol{\Delta}_1 = \left(\frac{p_{ij}}{z_j}\delta_{k_i,-1} + \sum_{\boldsymbol{l}_i}\frac{l_{ij}}{z_j}a_i(\boldsymbol{l}_i, k_i)\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{l}_i}\right), \tag{1.5.14}$$

具有如下形式的展开式

$$G_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z})=\sum_{0\leqslant t\leqslant m}\sum_{\aleph_t\leqslant N_m}\sum_{\boldsymbol{l}_{\alpha_1},\cdots\boldsymbol{l}_{\alpha_t}}\boldsymbol{\Delta}_2,$$

其中

$$\boldsymbol{\Delta}_2=G(t;\boldsymbol{P},\boldsymbol{L},\boldsymbol{k})\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{l}_{\alpha_1}+\cdots+\boldsymbol{l}_{\alpha_t}-1},\tag{1.5.15}$$

$\boldsymbol{P}=(P_{ij})$, $\boldsymbol{L}=(l_{ij})$,

$$G(t;\boldsymbol{P},\boldsymbol{L},\boldsymbol{k})=(\det\boldsymbol{B})\prod_{s=1}^{t}a_{\alpha_s}(\boldsymbol{l}_{\alpha_s},k_{\alpha_s}),\tag{1.5.16}$$

使得 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$, 其中

$$b_{ij}=\begin{cases}p_{ij}\delta_{k_i,-1}, & i\in N_m-\aleph,\\ l_{ij}, & i\in\aleph,\end{cases}\tag{1.5.17}$$

$N_m=\{1,2,\cdots,m\}$, $\aleph=\aleph_t=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t\}$.

证明 由 $\boldsymbol{\Delta}_1$ 中每一行上的多重线性性, 有

$$G_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z})=\sum_{\aleph\subseteq N_m}\det(A_{ij}(\alpha)),$$

其中

$$A_{ij}(\alpha)=\begin{cases}\dfrac{p_{ij}}{z_j}\delta_{k_i,-1}, & i\in N_m-\aleph,\\ \displaystyle\sum_{\boldsymbol{l}_i}\frac{l_{ij}}{z_j}a_i(\boldsymbol{l}_i,k_i)\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{l}_i}, & i\in\aleph.\end{cases}$$

进而, 对每行 $i\in\aleph$ 线性展开, 即得

$$G_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z})=\sum_{t=0}^{m}\sum_{\substack{\boldsymbol{l}_{\alpha_1},\cdots,\boldsymbol{l}_{\alpha_t}\\ \aleph_t\subseteq N_m}}\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{l}_{\alpha_1}+\cdots+\boldsymbol{l}_{\alpha_t}-\boldsymbol{1}}(\det\boldsymbol{B})\prod_{s=1}^{t}a_{\alpha_s}(\boldsymbol{l}_{\alpha_s},k_{\alpha_s}),$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 由式 (1.5.17) 给出, $\boldsymbol{1}=(1,\cdots,1)$. 这就得到了式 (1.5.14)~式 (1.5.17). □

引理 1.5.7 令 $f(\boldsymbol{x})\in\mathcal{L}\{\Re;\boldsymbol{x}\}$, $V(g_i)=\boldsymbol{p}_i=(\boldsymbol{p}_{i1},\cdots,\boldsymbol{p}_{im})\geqslant\boldsymbol{0}$ 是有限的, 且 $\boldsymbol{p}_i\neq\boldsymbol{0}(1\leqslant i\leqslant m)$, 则有

$$\det\boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}^{-\boldsymbol{1}}]f(\boldsymbol{x})=[\boldsymbol{z}^{-\boldsymbol{1}}]\left(f(\boldsymbol{g})J(\boldsymbol{g})\right),\tag{1.5.18}$$

其中 $J(\boldsymbol{g})$ 为 $\boldsymbol{g}$ 的 Jacobi 阵.

证明 由于 $V(g_i) = \boldsymbol{p}_i \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{p}_i \neq \boldsymbol{0}$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$，所以 $f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) \in \mathcal{L}\{\Re;\boldsymbol{x}\}$ 存在. 令 $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}} F(\boldsymbol{k})\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} \in \mathcal{L}\{\Re;\boldsymbol{x}\}$, 则有

$$[\boldsymbol{z}^{-1}]\big(f(\boldsymbol{g})J(\boldsymbol{g})\big) = [\boldsymbol{z}^{-1}]\sum_{\boldsymbol{k}} F(\boldsymbol{k})\boldsymbol{g}^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z})J(\boldsymbol{g}) = \sum_{\boldsymbol{k}} F(\boldsymbol{k})[\boldsymbol{z}^{-1}]G_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z}), \tag{1.5.19}$$

其中

$$G_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z}) = \det\left(g_i^{k_i}(\boldsymbol{z})\frac{\partial}{\partial z_j}g_i(\boldsymbol{z})\right).$$

记 $g_i(\boldsymbol{z}) = a_i\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{p}_i}h_i(\boldsymbol{z})$, 使得 $h_i(\boldsymbol{0}) = 1$, $a_i \neq 1$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. 这时, 由引理 1.5.5, 知 $G_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z})$ 具有式 (1.5.14) 的形式, 使得

$$\sum_{\boldsymbol{l}_i} a_i(\boldsymbol{l}_i, k_i)\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{l}_i} = \begin{cases} \dfrac{1}{k_i+1}g_i^{k_i+1}(\boldsymbol{z}), & k_i \neq -1, \\ \log h_i(\boldsymbol{z}), & k_i = -1, \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{l}_i = (l_{i1}, \cdots, l_{im})$. 根据引理 1.5.6, 可知当 $\boldsymbol{l}_{\alpha_1} + \boldsymbol{l}_{\alpha_2} + \boldsymbol{l}_{\alpha_t} = \boldsymbol{0}$ 时, 只有 $t = 0$ 才使 $\det\boldsymbol{B}$ 可能非零, 从而使 $[\boldsymbol{z}^{-1}]G_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{z})$ 可能非零, 然而, 当 $t = 0$ 时, 有

$$\det\boldsymbol{B} = (\det\boldsymbol{P})\prod_{1\leqslant s\leqslant m}\delta_{k_s,-1} = [\boldsymbol{z}^{-1}]G_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z}).$$

再由式 (1.5.19)，就有

$$[\boldsymbol{z}^{-1}](f(\boldsymbol{g})J(\boldsymbol{g})) = F(\boldsymbol{1})\det\boldsymbol{P} = \det\boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}^{-1}]f(\boldsymbol{x}).$$

引理得证. □

基于引理 1.5.8~引理 1.5.10, 就可导出 Lagrange 反演的多变元的形式.

定理 1.5.2 令 $f \in \mathcal{L}\{\Re;\boldsymbol{x}\}, \phi_1(\boldsymbol{x}), \cdots, \phi_m(\boldsymbol{x}) \in \Re\{\boldsymbol{x}\}$, $\phi_i(\boldsymbol{0}) \neq 0$ $(i = 1,2, \cdots, m)$. 设 $x_i = t_i\phi_i(\boldsymbol{x})$ $(i = 1,2,\cdots,m)$, 则有

$$\partial_{\boldsymbol{t}}^{\boldsymbol{k}} f = \partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{k}}\Big(f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\phi}^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})\Delta(\boldsymbol{x})\Big), \tag{1.5.20}$$

其中

$$\Delta(\boldsymbol{x}) = \det\left(\delta_{ij} - \frac{x_j}{\phi_i(\boldsymbol{x})}\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}\right). \tag{1.5.21}$$

证明 用与单变元情形相仿的讨论可知, 存在唯一的一个级数 $x_i(\boldsymbol{t}) \in \Re(\boldsymbol{t})$, 使得 $x_i = t_i\phi(\boldsymbol{x})$ $(i = 1,2,\cdots,m)$. 由于 $\det\boldsymbol{P} = \det(V(t_1)^{\mathrm{T}}, \cdots, V(t_m)^{\mathrm{T}}) = \det\boldsymbol{I}_m = 1$, 考虑到 $[\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{k}}]f(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{t}^{-1}]\boldsymbol{t}^{-(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1})}f(\boldsymbol{x})$, 用引理 1.5.7, 可得

$$\partial_{\boldsymbol{t}}^{\boldsymbol{k}} f = [\boldsymbol{x}^{-1}]f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\phi}^{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{1}}\boldsymbol{x}^{-(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{1})}J(\boldsymbol{t}).$$

但是, 通过从每行中提取 $\phi_i^{-1}(\boldsymbol{x})$, 有

$$J(\boldsymbol{t}) = \det\left(\delta_{ij}\phi_i^{-1}(\boldsymbol{x}) - x_i\phi_i^{-2}(\boldsymbol{x})\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}\right)$$
$$= \boldsymbol{\phi}^{-1}(\boldsymbol{x})\det\left(\delta_{ij} - x_j\phi_i^{-1}(\boldsymbol{x})\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}\right). \tag{1.5.22}$$

联合式 (1.5.21) 和式 (1.5.22), 即得

$$\partial_{\boldsymbol{t}}^{\boldsymbol{k}} f = [\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}] f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\phi}^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})\det\left(\delta_{ij} - x_j\phi_i^{-1}(\boldsymbol{x})\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}\right).$$

这就是式 (1.5.20) . □

自然, 当取只有一个变元的特殊情形时, 从定理 1.5.2 可直接导出定理 1.5.1. 然而, 之所以将定理 1.5.1 单独列出, 是为了利用方便, 也易于理解如何从单变量到多变量的发展.

推论 1.5.3　令 $g(\boldsymbol{x}) \in \Re\{\boldsymbol{x}\}$, $\phi_i(\boldsymbol{x}) \in \Re\{\boldsymbol{x}\}, \phi_i(\boldsymbol{0}) \neq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, m), \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$. 设 $x_i = t_i\phi_i(\boldsymbol{x})$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$, 则有

$$\partial_{\boldsymbol{t}}^{\boldsymbol{k}} \frac{g(\boldsymbol{x})}{\Delta(\boldsymbol{x})} = \partial_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{k}} g(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\phi}^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}), \tag{1.5.23}$$

其中 $\Delta(\boldsymbol{x})$ 由式 (1.5.21) 给出.

证明　因为对 $t_i = x_i\phi_i^{-1}(\boldsymbol{x})$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, $\Delta(\boldsymbol{0}) = 1 \neq 0$, 故 $\Delta^{-1}(\boldsymbol{x})$ 存在且唯一. 进而, 有 $f(\boldsymbol{x}) = \Delta^{-1}(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}) \in \Re\{\boldsymbol{x}\} \subset \mathcal{L}\{\Re; \boldsymbol{x}\}$. 由定理 1.5.2 即得结论. □

下面, 看一看在已经确定了整域 $\mathcal{F}\{\boldsymbol{y}\}$ 上多项式型函数方程

$$A_n z^n + A_{n-1}z^{n-1} + \cdots + A_1 z = A_0 \quad (A_i \in \mathcal{F}\{\boldsymbol{y}\}, 0 \leqslant i \leqslant n), \tag{1.5.24}$$

的适定性之下, 如何求出它在 $\mathcal{F}\{\boldsymbol{y}\}$ 中的解.

为叙述简便, 总是约定 $A_1, A_0 \neq 0$, 否则通过变换可满足这个要求. 令 $\phi(z) = (A_0/A_1)\psi(z)$, 其中

$$\psi(z) = \frac{1}{1 + z\left(\frac{A_2}{A_1} + \frac{A_3}{A_1}z + \cdots + \frac{A_n}{A_1}z^{n-2}\right)}. \tag{1.5.25}$$

定理 1.5.3　方程式 (1.5.24) 在 $\mathcal{F}\{\boldsymbol{y}\}$ 中的解为

$$z = \sum_{m \geqslant 1} \frac{1}{m}\left(\frac{A_0}{A_1}\right)^m \partial_z^{m-1}\big(\psi(z)\big)^m. \tag{1.5.26}$$

证明 令 $z=t\phi(z)$, 则当 $t=1$ 时, 式 (1.5.26) 就等价方程式 (1.5.24). 因为 $\psi(0)=1\neq 0$, 即 $\phi(0)\neq 0$, 用推论 1.5.7, 得

$$z=\sum_{m\geqslant 1}\left(\frac{A_0}{A_1}\right)^m\frac{t^m}{m!}\frac{\mathrm{d}^{m-1}\psi^m}{\mathrm{d}x^{m-1}}\Big|_{z=0}.$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}^{m-1}\psi^m}{\mathrm{d}x^{m-1}}\Big|_{z=0}=(m-1)!\partial_z^{m-1}\psi^m(z),$$

取 $t=1$, 即得式 (1.5.26). □

虽然这个定理从原则上给出了函数方程解的表达式, 但对于具体的方程仍然要进行特殊性的分析, 以求得尽可能简单的形式. 这个一般公式十分复杂, 特别是当 n 较大时.

1.6 注 记

1. 集合系统 $(\mathcal{O};\dot{\cup},\cap,^c)$ 形成一个格, 或从另一个角度, 形成一个布尔代数. 有关格的代数结构, 简明的可参考 [68](§1.1), 详细的可参见 [2].

2. 在定理 1.2.1 中, 仅对实数集和连续函数作了论述. 还可以进一步研究除 $\mathbb{R}$ 外适用的情形, 特别是非数集合、组合的或代数的结构, 甚至, 无需考虑函数的连续性.

3. 在定理 1.4.1 的证明中, $s(yR)$ 和 $t(yR)$ 分别从 $(1+x)^{-1}=(1-(-x))^{-1}$ 和 $\sqrt[c]{1+x}=\sqrt{1-(-x)}$ 的 Taylor 级数展开猜想到. 但这时要考虑收敛半径. 这个证明中完全没有用函数的 Taylor 展开, 而只用了级数乘法的定义. 注意, 其中用到组合恒等式: 对于整数 $n\geqslant 1$,

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_c=n-1\\0\leqslant i_l\leqslant n-1\\1\leqslant l\leqslant c}}\prod_{l=1}^{c}\frac{(-1)^{i_l+1}\prod_{i=0}^{i_l}(ic-1)}{c^{i_l+1}(i_l+1)!}=\frac{(-1)^{n+1}\prod_{i=0}^{n}(ic-1)}{c^n(n+1)!}. \tag{1.6.1}$$

4. 在推论 1.4.1 的证明中要用的式 (1.6.1) 当 $c=2$ 时的情形可转化为组合恒等式: 对于整数 $n\geqslant 1$,

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2i+1}\binom{2i+1}{i}\frac{1}{2n-2i-1}\binom{2n-2i-1}{n-i-1}=\frac{(2n)!}{(n+1)!n!}, \tag{1.6.2}$$

即

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(2i)!}{(i+1)!i!}\frac{\big(2(n-i-1)\big)!}{((n-i)!(n-i-1)!)!}=\frac{(2n)!}{(n+1)!n!}.$$

这个恒等式可从 Catalan 数导出. 也可用地图计数的方法, 例如式 (1.6.2) 右端是具有 n 条边的根树地图的数目 (参见 [14,17] 等). 因为删去根边, 从一个 n 边的根树地图可得到两个根树地图, 若一个有 i 条边, 则另一个必有 $n-1-i$ 条边 $(0\leqslant i\leqslant n-1)$, 即可由此导出式 (1.6.2) . 也知式 (1.6.2) 右端是具有 n 条边的平面根瓣丛的数目 (参见 [62−64]). 因为根边是一个自环, 它将平面分割成一个内部和一个外部, 它们各含一个子瓣丛, 分别有 i 条边和 $n-1-i$ $(0\leqslant i\leqslant n-1)$ 条边. 由此同样可导出式 (1.6.2) .

5. 虽然 1.4 节和 1.5 节在本书后面的章节中可以不用, 但考虑到解函数方程过程时, 在第 3 章和第 4 章中, 在两个或三个未定元情形下, 利用特征曲线法求解的直接显式, 甚至无和, 或正项和显式时, 这两节曾起过巧妙的作用, 我们还是要提一提这两节的内容好. 目前如何判别是否可以得到直接的显式, 仍然是毫无头绪的, 希望今后有人作进一步的研究.

6. 对于四个或更多未定元的情形, 特征曲线法与 Lagrange 反演遇到由于太过复杂而带来的困难. 要想克服这个困难, 可以将反演视为函数空间上的一个泛函, 要变换函数本身的内在对称性, 提供一个可否变换到无和, 或正项和显式的判别准则. 进而, 如有可能, 就将它求出来. 这也是将这个过程有效化, 甚至智能化实现的理论基础.

7. 虽然式 (1.5.26) 给出了一般多项式方程解的一个显式, 但其中的 $\partial_x^{m-1}(\psi(z))^m$ 将导致要作一系列的简化. 是否有无和, 或正项和显式, 依然不清楚.

第 2 章　介子泛函

2.1　基本概念

令 $\mathcal{V}$ 为以 $\mathbf{1},\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{y}_3,\cdots$ 为基在域 F 上的向量空间, $\mathcal{F}$ 以 $1,y,y^2,y^3,\cdots$ 为基在域 F 上的函数空间. 从 $\mathcal{F}$ 到 $\mathcal{V}$ 的变换记为 $\int_y$, 使得

$$\int_y y^i = \begin{cases} \boldsymbol{y}_i, & i \geqslant 1, \\ \mathbf{1}, & i = 0, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

称之为介子泛函. 注意, 式 (2.1.1) 中的 $\boldsymbol{y}_i = \mathbf{1}_i$, 即第 $i+1$ 分量为 1、其他分量全为 0 的向量. 基中的 $\mathbf{1}$ 视为 $\mathcal{V}$ 的一个特殊的基向量 $\boldsymbol{y}_0$.

规定: 对于 $a_i \in F$,

$$\int_y a_i y^i = a_i \int_y y^i,$$

对于 $a_i, a_j \in F$,

$$\int_y (a_i y^i + a_j y^j) = a_i \int_y y^i + a_j \int_y y^j,$$

则对任何

$$f_i = \sum_{j\geqslant 0} a_{ij} y^j \quad (i = 1, 2),$$

因为

$$\begin{aligned} \int_y a f_i &= a \int_y \sum_{j\geqslant 0} a_{ij} y^j = a \sum_{j\geqslant 0} a_{ij} \int_y y^j = a \int_y f_i \quad (a \in F), \\ \int_y (a f_1 + b f_2) &= \sum_{j\geqslant 0} (a a_{1j} + b a_{2j}) \int_y y^j = a \sum_{j\geqslant 0} a_{1j} \boldsymbol{y}_j + b \sum_{j\geqslant 0} a_{2j} \boldsymbol{y}_j \qquad (2.1.2) \\ &= a \int_y f_1 + b \int_y f_2 \quad (a, b \in F), \end{aligned}$$

所以这个泛函在整个空间 $\mathcal{F}$ 上是线性的.

另一方面, 从 $\mathcal{V}$ 到 $\mathcal{F}$ 的变换记为 $\int^y$, 使得

$$\int^y \boldsymbol{y}_i = \begin{cases} y^i, & i \geqslant 1, \\ 1, & i = 0, \end{cases} \tag{2.1.3}$$

称之为反介子.

至于反介子, 也规定: 对 $a_i \in F$,

$$\int^y a_i \boldsymbol{y}_i = a_i \int^y \boldsymbol{y}_i,$$

对 $a_i, a_j \in F$,

$$\int^y (a_i \boldsymbol{y}_i + a_j \boldsymbol{y}_j) = a_i \int^y \boldsymbol{y}_i + a_j \int^y \boldsymbol{y}_j,$$

则对于任何

$$v_i = \sum_{j \geqslant 0} a_{ij} \boldsymbol{y}_j \quad (i = 1, 2),$$

因为

$$\int^y a\boldsymbol{v}_i = a \int^y \sum_{j \geqslant 0} a_{ij} \boldsymbol{y}_j = a \sum_{j \geqslant 0} a_{ij} \int^y \boldsymbol{y}_j = a \int^y \boldsymbol{v}_i \quad (a \in F), \tag{2.1.4}$$

$$\begin{aligned} \int^y (a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2) &= \sum_{j \geqslant 0} (aa_{1j} + ba_{2j}) \int^y \boldsymbol{y}_j = a \sum_{j \geqslant 0} a_{1j} \boldsymbol{y}_j + b \sum_{j \geqslant 0} a_{2j} \boldsymbol{y}_j \\ &= a \int^y \boldsymbol{v}_1 + b \int^y \boldsymbol{v}_2 \quad (a, b \in F), \end{aligned}$$

所以这个泛函在整个空间 $\mathcal{V}$ 上是线性的.

定理 2.1.1　介子 $\int_y$ 与反介子 $\int^y$ 是互逆的一对泛函.

证明　对 $\forall s \in \mathcal{F}$, $s = s_0 + s_1 y + s_2 y^2 + \cdots$,

$$\boldsymbol{v} = \int_y s = \sum_{i \geqslant 0} s_i \boldsymbol{y}_i \in \mathcal{V},$$

有

$$\begin{aligned}\int^y v &= \int^y \Big(\int_y \sum_{i\geqslant 0} s_i y^i\Big) \quad (\text{用式 (2.1.2) })\\&= \int^y \Big(\sum_{i\geqslant 0} s_i \int_y y^i\Big) \quad (\text{用式 (2.1.1) })\\&= \int^y \Big(\sum_{i\geqslant 0} s_i \boldsymbol{y}_i\Big) \quad (\text{用式 (2.1.4) })\\&= \sum_{i\geqslant 0} s_i \int^y y^i \quad (\text{用式 (2.1.3) })\\&= s \in \mathcal{F}.\end{aligned}$$

从而, $\int^y$ 是 $\int_y$ 的逆.

反之, 对 $\forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$, $\boldsymbol{v} = v_0\mathbf{1} + v_1\boldsymbol{y}_1 + v_2\boldsymbol{y}_2 + \cdots$,

$$s = \int^y \boldsymbol{v} = \sum_{i\geqslant 0} v_i y^i \in \mathcal{F},$$

有

$$\begin{aligned}\int_y s &= \int_y \Big(\int^y \sum_{i\geqslant 0} v_i \boldsymbol{y}_i\Big) = \int_y \Big(\sum_{i\geqslant 0} v_i \int^y \boldsymbol{y}_i\Big)\\&= \int_y \Big(\sum_{i\geqslant 0} v_i y^i\Big) = \sum_{i\geqslant 0} v_i \int_y y^i\\&= \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}.\end{aligned}$$

从而, $\int_y$ 是 $\int^y$ 的逆. □

2.2 移 位

对于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \mathcal{V}$, 设 $\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, a_2, \cdots)$, $\boldsymbol{b} = (b_0, b_1, b_2, \cdots)$, 将 $\boldsymbol{a}$ 转化为 $\boldsymbol{b}$, 使得

$$b_i = a_{i+1} \quad (i \geqslant 0) \tag{2.2.1}$$

的变换称为*左移*, 用 $\mathcal{L}$ 表示.

事实上, 可以看出

$$\mathcal{L}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}},$$

其中 $\boldsymbol{L}=(l_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant\infty}$,

$$l_{i,j}=\begin{cases}1, & j=i+1\\ 0, & j\neq i+1\end{cases}\qquad (0\leqslant i,\ j\leqslant\infty).$$

定理 2.2.1 左移算子 $\mathcal{L}$ 服从如下的规则:

(1) $\boldsymbol{L}^n=(l_{i,j}^n)_{0\leqslant i,j\leqslant\infty}$, 其中

$$l_{i,j}^n=\begin{cases}1, & j=i+n,\\ 0, & j\neq i+n;\end{cases}$$

(2) $\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}\neq\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}$, 其中 $\boldsymbol{I}=(e_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant\infty}$, 即单位阵,

$$e_{i,j}=\begin{cases}1, & j=i,\\ 0, & j\neq i;\end{cases}$$

(3) 对 $\forall\boldsymbol{a}\in\mathcal{V}$,

$$\int^y\left(\boldsymbol{L}\boldsymbol{a}\right)=y\int^y\boldsymbol{a};$$

(4) 对 $\forall s(y)\in\mathcal{F}$,

$$\int_y ys(y)=\boldsymbol{L}\int_y s(y).$$

证明　除 (1) 用归纳法外, (2)~(4) 都只用定义即可证明. □

对于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathcal{V}$, 设 $\boldsymbol{a}=(a_0,a_1,a_2,\cdots)$, $\boldsymbol{b}=(b_0,b_1,b_2,\cdots)$, 将 $\boldsymbol{a}$ 转化为 $\boldsymbol{b}$, 使得

$$b_i=\begin{cases}a_{i-1}, & i\geqslant 1,\\ 0, & i=0\end{cases}\tag{2.2.2}$$

的变换称为*右移*, 用 $\mathcal{R}$ 表示.

可以看出

$$\mathcal{R}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}},$$

其中 $\boldsymbol{R}=(r_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant\infty}$,

$$r_{i,j}=\begin{cases}1, & j=i-1,\\ 0, & j\neq i-1\end{cases}\qquad (0\leqslant i,\ j\leqslant\infty).$$

定理 2.2.2 右移算子 $\mathcal{R}$ 服从如下的规则:

(1) $\boldsymbol{R}^n=(l_{i,j}^n)_{0\leqslant i,j\leqslant\infty}$, 其中

$$l_{i,j}^n=\begin{cases}1, & j=i-n,\\ 0, & j\neq i-n;\end{cases}$$

(2) $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$;

(3) $\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}_{\langle\mathbf{1}_0\rangle}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}$, 其中 $\boldsymbol{I}_{\langle\mathbf{1}_0\rangle}$ 为对角线上第 1 个元素不是 1, 而是 0 的单位阵;

(4) 对 $\forall\boldsymbol{a}\in\mathcal{V}$,

$$\int^y(\boldsymbol{R}\boldsymbol{a})=y^{-1}\int^y(\boldsymbol{a}-a_0\boldsymbol{y}_0);$$

(5) 对 $\forall s(y)\in\mathcal{F}$,

$$\int_y y^{-1}(s(y)-s_0)=\boldsymbol{R}\int_y s(y).$$

证明 除 (1) 用归纳法外, (2),(4) 和 (5) 都只用定义, (3) 由 (2) 与定理 2.2.1(2) 即可得证. □

2.3 截 段

将一个向量的前 i 个分量全置 0 的运算称为截段, 用 $\mathcal{J}$ 表示. $i=1,2,\cdots$ 的情形分别称为 1 截段、 2 截段 ……

对于 $\boldsymbol{a}\in\mathcal{V}$, 记 $\mathcal{J}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{J}\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{J}=(c_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant\infty}$, 则

$$c_{i,j}=\begin{cases}1, & j=i \quad (i\geqslant 1),\\ 0, & j\neq i.\end{cases}\tag{2.3.1}$$

令 $\boldsymbol{I}_{i,j}$ 是 (i,j) 位置的元素为 1、其他元素全为 0 的矩阵, 则

$$\boldsymbol{L}=\sum_{i\geqslant 0}\boldsymbol{I}_{i,i+1},$$

$$\boldsymbol{L}^2=\Big(\sum_{i\geqslant 0}\boldsymbol{I}_{i,i+1}\Big)\Big(\sum_{i\geqslant 0}\boldsymbol{I}_{i,i+1}\Big)=\sum_{i\geqslant 0}\boldsymbol{I}_{i,i+2}.$$

进而, 对于任何整数 $n\geqslant 1$,

$$\boldsymbol{L}^n=\Big(\sum_{i\geqslant 0}\boldsymbol{I}_{i,i+1}\Big)^{n-1}\Big(\sum_{i\geqslant 0}\boldsymbol{I}_{i,i+1}\Big)=\Big(\sum_{i\geqslant 0}\boldsymbol{I}_{i,i+n-1}\Big)\Big(\sum_{i\geqslant 0}\boldsymbol{I}_{i,i+1}\Big)$$

$$= \sum_{i \geqslant 0} \boldsymbol{I}_{i,i+n}. \tag{2.3.2}$$

类似地, 对于右移位阵 $\boldsymbol{R}$, 有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}^n &= \Big(\sum_{i \geqslant 0} \boldsymbol{I}_{i,i-1}\Big)^{n-1} \Big(\sum_{i \geqslant 0} \boldsymbol{I}_{i,i-1}\Big) = \Big(\sum_{i \geqslant 0} \boldsymbol{I}_{i,i-n+1}\Big)\Big(\sum_{i \geqslant 0} \boldsymbol{I}_{i,i-1}\Big) \\ &= \sum_{i \geqslant 0} \boldsymbol{I}_{i,i-n}. \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

定理 2.3.1　对任何整数 $n \geqslant 1$, n 截段阵

$$\boldsymbol{J}^{(n)} = \boldsymbol{R}^n \boldsymbol{L}^n, \tag{2.3.4}$$

其中 $\boldsymbol{J}^{(1)} = \boldsymbol{J}$.

证明　由式 (2.3.2) 和式 (2.3.3), 知

$$\boldsymbol{R}^n \boldsymbol{L}^n = \Big(\sum_{i \geqslant 0} \boldsymbol{I}_{i,i-n}\Big)\Big(\sum_{i \geqslant 0} \boldsymbol{I}_{i,i+n}\Big) = \sum_{i \geqslant n} \boldsymbol{I}_{i,i}.$$

这就是欲证的结论. □

2.4 投　影

在 $\mathcal{V}$ 上, 令 $\boldsymbol{a} = \sum_{j \geqslant 0} a_j \boldsymbol{y}_j \in \mathcal{V}$, 则由

$$\begin{cases} \mathcal{P}\boldsymbol{a} = \displaystyle\sum_{j \geqslant 0} (j+1) a_{j+1} \boldsymbol{y}_j, \\ \mathcal{Q}\boldsymbol{a} = \displaystyle\sum_{j \geqslant 1} \frac{1}{j} a_{j-1} \boldsymbol{y}_j \end{cases} \tag{2.4.1}$$

所定义的运算 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$ 分别称为*左投影*和*右投影*.

容易看出, 若记 $\mathcal{P}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{P} = (p_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant \infty}$, 则有

$$p_{i,j} = \begin{cases} i+1, & j = i+1, \\ 0, & j \neq i+1. \end{cases} \tag{2.4.2}$$

类似地, 若记 $\mathcal{Q}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{Q} = (q_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant\infty}$, 则有

$$q_{i,j} = \begin{cases} 1/i, & j = i-1 \quad (i \geqslant 1), \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{2.4.3}$$

定理 2.4.1 若令 $\boldsymbol{n} = (1,2,3,\cdots,\infty)$, $\boldsymbol{u} = (1,1/2,1/3,\cdots,\infty)$, 则左投影阵和右投影阵分别为

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{n}\boldsymbol{L} \quad \text{和} \quad \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}, \tag{2.4.4}$$

其中 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 分别为左移位阵和右移位阵.

证明 由式 (2.3.2), 知

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}\boldsymbol{L} &= \boldsymbol{n}\Big(\sum_{i\geqslant 0}\boldsymbol{I}_{i,i+1}\Big) = \sum_{i\geqslant 0}\boldsymbol{n}\boldsymbol{I}_{i,i+1} \\ &= \sum_{i\geqslant 0}(i+1)\boldsymbol{I}_{i,i+1} \quad (\text{由式 (2.4.2)}) \\ &= \boldsymbol{P}. \end{aligned}$$

这就证明了第一个结论.

类似地, 第二个结论也可被证明. □

还要注意, $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 对于乘法是不可交换的, 因为

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}. \tag{2.4.5}$$

定理 2.4.2 对于整数 $n \geqslant 2$, 令 $\boldsymbol{P}^n = \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{n-1} = (p_{i,j}^{(n)})_{0\leqslant i,j\leqslant\infty}$, $\boldsymbol{Q}^n = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{n-1} = (q_{i,j}^{(n)})_{0\leqslant i,j\leqslant\infty}$, 则

$$p_{i,j}^{(n)} = \begin{cases} \displaystyle\prod_{l=0}^{n-1}(i+n-l), & j = i+n, \\ 0, & j \neq i+n, \end{cases} \tag{2.4.6}$$

$$q_{i,j}^{(n)} = \begin{cases} \displaystyle\prod_{l=0}^{n-1}\frac{1}{i+n-l}, & j = i-n \ (i \geqslant n), \\ 0, & j \neq i-n. \end{cases} \tag{2.4.7}$$

证明　当 $n=2$ 时, 由

$$\begin{aligned}\boldsymbol{PP}&=\Big(\sum_{i\geqslant 0}(i+1)\boldsymbol{I}_{i,i+1}\Big)\Big(\sum_{i\geqslant 0}(i+1)\boldsymbol{I}_{i,i+1}\Big)\\&=\Big(\sum_{i\geqslant 0}(i+1)(i+2)\boldsymbol{I}_{i,i+2}\Big)\\&=\boldsymbol{P}^2,\end{aligned}$$

就得到第一个结论 $n=2$ 时的情形.

对于 $n\geqslant 3$ 的一般情形, 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{PP}^{n-1}&=\Big(\sum_{i\geqslant 0}\boldsymbol{I}_{i,i+1}\Big)\Big(\sum_{i\geqslant 0}\prod_{l=0}^{n-2}(i+n-1-l)\boldsymbol{I}_{i,i+n-1}\Big)\\&=\sum_{i\geqslant 0}(i+n)\prod_{l=0}^{n-2}(i+n-1-l)\boldsymbol{I}_{i,i+n}\\&=\sum_{i\geqslant 0}\prod_{l=0}^{n-1}(i+n)\boldsymbol{I}_{i,i+n}\\&=\boldsymbol{P}^n.\end{aligned}$$

从而第一个结论得证.

类似地, 只要注意定理 2.2.2(2) 和定理 2.4.2, 由第一个结论即可导出第二个结论. □

2.5　卷　　积

两个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}\in\mathcal{V}$ 的卷积用 $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}$ 表示, 即

$$\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}=(c_0,c_1,c_2,\cdots),\tag{2.5.1}$$

其中对于整数 $j\geqslant 0$,

$$c_j=\sum_{i=0}^{j}a_ib_{j-i}.\tag{2.5.2}$$

令 $s,\ h\in\mathcal{F}$, 对于整数 $i\geqslant 0$, 记 $S_i=\partial_y^i s,\ H_i=\partial_y^i h$, 则有

$$\begin{cases}\boldsymbol{S}=\int_y s=(S_0,S_1,S_2,\cdots)\in V,\\ \boldsymbol{H}=\int_y h=(H_0,H_1,H_2,\cdots)\in V.\end{cases}\tag{2.5.3}$$

定理 2.5.1 若记 $\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{S},\ \boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{H}$, 则

$$\boldsymbol{\Psi}\otimes\boldsymbol{\Phi}=\int_y(sh).\tag{2.5.4}$$

证明 因为

$$\partial_y^i(sh)=\sum_{j=0}^{i}S_jH_{i-j}=\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{H},$$

由式 (2.6.3), 即得欲证的结论. □

从 $\mathcal{F}$ 对乘法运算的可交换性, 可以看出卷积运算在 $\mathcal{V}$ 中服从交换律, 即对 $\forall s,\ h\in\mathcal{F}$,

$$\int_t s\otimes\int_y h=\int_t h\otimes\int_y s.\tag{2.5.5}$$

对于任何整数 $k\geqslant 1$ 和 $h\in\mathcal{F}$, 记 $H_i^{[k]}=\partial_y^i h^k\ (i\geqslant 0)$, 则有

$$H_i^{[k]}=\begin{cases}H_i, & k=1,\\ \sum_{j=0}^{i}H_{i-j}^{[k-1]}H_j, & k\geqslant 1.\end{cases}\tag{2.5.6}$$

对于任何整数 $k\geqslant 1$, 令

$$\boldsymbol{\Phi}^{[k]}=\int_y h^k,\tag{2.5.7}$$

则由式 (2.6.3), 有

$$\boldsymbol{\Phi}^{[k]}=(H_0^{[k]},H_1^{[k]},H_2^{[k]},\cdots).\tag{2.5.8}$$

定理 2.5.2 对于任何整数 $k\geqslant 1$ 和 $i\geqslant 0$, $\varPhi_i^{[k]}=H_i^{[k]}$, 即

$$\varPhi_i^{[k]}=\begin{cases}\varPhi_i, & k=1,\\ \sum_{j=0}^{i}\varPhi_{i-j}^{[k-1]}\varPhi_j, & k\geqslant 2.\end{cases}\tag{2.5.9}$$

证明 从式 (2.5.6) 和式 (2.5.8), 即可导出式 (2.5.9) . □

2.6　微分与积分

对于函数 y^n(整数 $n\geqslant 0$), 运算

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}y^n=\begin{cases} ny^{n-1} & n\geqslant 1,\\ 0, & n=0\end{cases} \tag{2.6.1}$$

称为微分. 在域 $F(\boldsymbol{y})$ 上空间 $\mathcal{F}\{y;\boldsymbol{y}\}$ 中的微分, 则是通过线性扩张得到的, 即对 $\forall a\in F$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(ay^n)=a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}y^n,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(y^m+y^n)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}y^m+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}y^n.$$

定理 2.6.1　对 $\forall s=s(y),t=t(y)\in\mathcal{F}\{y;\boldsymbol{y}\}$,

$$\frac{\mathrm{d}(st)}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}t+s\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}. \tag{2.6.2}$$

证明　令 $s_i=\partial_y^i s(y)$, $t_i=\partial_y^i t(y)$ $(i\geqslant 0)$. 由于

$$\partial_y^n\Big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}t\Big)=\sum_{k=0}^{n}(k+1)s_{k+1}t_{n-k},\quad \partial_y^n\Big(s\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}\Big)=\sum_{k=0}^{n}(k+1)t_{k+1}s_{n-k},$$

所以

$$\begin{aligned}
&\partial_y^n\Big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}t\Big)+\partial_y^n\Big(s\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}\Big)\\
&=\sum_{k=0}^{n}(k+1)s_{k+1}t_{n-k}+\sum_{k=0}^{n}(k+1)t_{k+1}s_{n-k}\\
&=\sum_{k=0}^{n}(k+1)s_{k+1}t_{n-k}+\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)t_{n-k+1}s_k\\
&=(n+1)s_{n+1}t_0+\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)s_{k+1}t_{n-k}\\
&\quad+\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)t_{n-k+1}s_k+(n+1)t_{n+1}s_0\\
&=(n+1)s_{n+1}t_0+\sum_{k=0}^{n-1}\big((k+1)s_{k+1}t_{n-k}+(n-k)t_{n-k}s_{k+1}\big)+(n+1)t_{n+1}s_0
\end{aligned}$$

$$= (n+1)s_{n+1}t_0 + (n+1)\sum_{k=1}^{n} s_k t_{n-k+1} + (n+1)t_{n+1}s_0$$
$$= (n+1)\sum_{k=0}^{n+1} s_k t_{n-k+1}$$
$$= \partial_y^n \frac{\mathrm{d}(st)}{\mathrm{d}y}.$$

从而式 (2.6.2) 得证. □

定理 2.6.2 对于 $s = s(y) \in \mathcal{F}\{y;\boldsymbol{y}\}$, 以及整数 $n \geqslant 1$,

$$\frac{\mathrm{d}s^n}{\mathrm{d}y} = ns^{n-1}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}. \tag{2.6.3}$$

证明 用数学归纳法. 当 $n=0$ 和 $n=1$ 时, 易见式 (2.6.3) 成立. 对于 $n \geqslant 2$, 由

$$\frac{\mathrm{d}s^n}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}s^{n-1} + s\frac{\mathrm{d}s^{n-1}}{\mathrm{d}y} \quad (\text{用定理 2.6.1})$$
$$= \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}s^{n-1} + s(n-1)s^{n-2}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}$$
$$= s^{n-1}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y} + (n-1)s^{n-1}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}$$
$$= (1+n-1)s^{n-1}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}$$
$$= ns^{n-1}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y},$$

即得式 (2.6.3). □

在 $\mathcal{F}\{y;\boldsymbol{y}\}$ 的基上, 对任何整数 $n \geqslant 1$, 定义运算

$$\int y^n \mathrm{d}y = \frac{1}{n+1}y^{n+1} \tag{2.6.4}$$

为积分.

然后, 通过线性扩张, 即对 $\forall a \in F$,

$$\int (ay^n)\mathrm{d}y = a\int y^n \mathrm{d}y,$$
$$\int (y^m + y^n)\mathrm{d}y = \int y^m \mathrm{d}y + \int y^n \mathrm{d}y.$$

将积分拓展到整个 $\mathcal{F}\{y;\boldsymbol{y}\}$ 上.

定理 2.6.3 对 $\forall s = s(y), t = t(y) \in \mathcal{F}\{y;\boldsymbol{y}\}$, 有

$$\int \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}ty = st - \int s\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}y. \tag{2.6.5}$$

证明　因为在整域 $\mathcal{F}\{y;\boldsymbol{y}\}$ 上满足消去律, 只需证明

$$\int \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}t\mathrm{d}y+\int s\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y=\int st\mathrm{d}y.$$

对于任何整数 $n\geqslant 1$, 由于

$$\partial_y^n\Big(\int \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}t\mathrm{d}y\Big)=\frac{1}{n}\partial_y^{n-1}\Big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}t\Big),\quad \partial_y^n\Big(\int s\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\Big)=\frac{1}{n}\partial_y^{n-1}\Big(s\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}\Big),$$

所以

$$\begin{aligned}\partial_y^n\Big(\int \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}t\mathrm{d}y\Big)+\partial_y^n\Big(\int s\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\Big)&=\frac{1}{n}\Big(\partial_y^{n-1}\Big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}t\Big)+\partial_y^{n-1}\Big(s\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}\Big)\Big)\\&=\frac{1}{n}\partial_y^{n-1}\Big(\frac{\mathrm{d}(st)}{\mathrm{d}y}\Big)\quad(\text{用定理 2.6.1})\\&=\partial_y^n\Big(\int\frac{\mathrm{d}(st)}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\Big).\end{aligned}$$

从而式 (2.6.5) 得证. □

定理 2.6.4　对任何整数 $n\geqslant 0$, $s\in\mathcal{F}\{y;\boldsymbol{y}\}$, 有

$$\int\Big(s^n\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}\Big)\mathrm{d}y=\frac{s^{n+1}}{n+1}. \tag{2.6.6}$$

证明　在基 $\{1,y,y^2,y^3,\cdots\}$ 上, 由式 (2.6.4), 对任何整数 $n\geqslant 1$, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int y^n\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\Big(\frac{y^{n+1}}{n+1}\Big)=y^n.$$

这就是说, 在 $\mathcal{F}\{y;\boldsymbol{y}\}$ 的基上, 积分是微分的逆运算. 基于这两个运算在 $\mathcal{F}\{y;\boldsymbol{y}\}$ 上的线性性, 对 $\forall s\in\mathcal{F}\{y;\boldsymbol{y}\}$, 由式 (2.6.3) , 有

$$s^{n+1}=(n+1)\int\Big(s^n\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}\Big)\mathrm{d}y.$$

将两边同除以 $n+1$, 即得式 (2.6.6) . □

定理 2.6.5　对 $\forall s=s(z)\in\mathcal{F}\{z;\boldsymbol{y}\}$, 有

$$\Big(\int_z\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z}\Big)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{L}\Big(\boldsymbol{P}\Big(\int_z s\Big)^{\mathrm{T}}\Big), \tag{2.6.7}$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 为左投影矩阵,

$$\int^z\boldsymbol{L}\boldsymbol{P}\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int^z\boldsymbol{s}, \tag{2.6.8}$$

其中 $\boldsymbol{s}=\int_z s\in\mathcal{V}$.

证明 先证式 (2.6.7) . 记 $s_i = \partial_z^n$ $(n \geqslant 0)$, 则

$$\int_z s = (s_0, s_1, s_3, \cdots) = \boldsymbol{s}.$$

式 (2.6.7) 的右端中,

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}} = (0, s_1, 2s_2, 3s_3, \cdots) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{L}\Big(\boldsymbol{P}\Big(\int_z s\Big)^{\mathrm{T}}\Big) = (s_1, 2s_2, 3s_3, \cdots),$$

左端中,

$$\begin{aligned}\int_z \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z} &= \int_z \Big(\sum_{n\geqslant 0}(n+1)s_{n+1}z^n\Big) = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)s_{n+1}\int_z z^n \\ &= (s_1, 2s_2, 3s_3, \cdots),\end{aligned}$$

比较以上两式, 即得式 (2.6.7).

下面证式 (2.6.8). 由 $\boldsymbol{LPs}^{\mathrm{T}} = (s_1, 2s_2, 3s_3, \cdots)$, 有

$$\int^z \boldsymbol{LPs}^{\mathrm{T}} = \int^z \sum_{n\geqslant 0}(n+1)s_{n+1}z_n = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)s_{n+1}\int^z z_n = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)s_{n+1}z^n.$$

左端是 s 的微分. 另一方面, 由于 $\boldsymbol{s} = \int_z s$, 所以

$$\int^z \boldsymbol{s} = \int^z \Big(\int_z s\Big) = \int^z \int_z s = s.$$

左端也是 s 的微分. 从而式 (2.6.8) 得证. □

定理 2.6.6 对 $\forall \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots) \in \mathcal{V}$, 令 $v = v(z) = \int^z \boldsymbol{v} \in \mathcal{F}(z; \boldsymbol{y})$, 则

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = \int^z \boldsymbol{v}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}, \tag{2.6.9}$$

$$\int v\mathrm{d}z = \int^z \boldsymbol{v}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}. \tag{2.6.10}$$

证明 先证式 (2.6.9). 由于 $\boldsymbol{v} = \int_z s$, 将式 (2.6.7) 的两端同求转置, 然后同作 $\int^z$, 即得式 (2.6.9).

再证式 (2.6.10). 由于

$$\boldsymbol{v}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \Big(0, \boldsymbol{v}_0, \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_1, \frac{1}{3}\boldsymbol{v}_2, \frac{1}{4}\boldsymbol{v}_3, \cdots\Big) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+1}\boldsymbol{v}_n z_n,$$

所以

$$\int^z \boldsymbol{v}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \int^z \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+1}\boldsymbol{v}_n z_n = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n+1}\boldsymbol{v}_n \int^z z_n = \int s\mathrm{d}z.$$

这就是式 (2.6.10). □

2.7 差　　分

在 $\mathcal{R}\{z\} \subseteq \mathcal{F}\{z,\boldsymbol{y}\}$ 的基上, 对于整数 $n \geqslant 1$, 建立两个运算

$$\delta_{x,y}z^n = \frac{x^n - y^n}{x-y}, \quad \partial_{x,y}z^n = \frac{yx^n - xy^n}{x-y},$$

分别称它们为*直差分*和*斜差分*.

对 $\forall f(z) \in \mathcal{R}\{z\}$, 通过线性扩张分别得到 $f = f(z)$ 的直差分和斜差分

$$\delta_{x,y}f = \frac{f(x) - f(y)}{x-y}, \tag{2.7.1}$$

$$\partial_{x,y}f = \frac{yf(x) - xf(y)}{x-y}. \tag{2.7.2}$$

定理 2.7.1　对 $\forall f(z) \in \mathcal{R}\{x\}$, 令 $f = f(z)$, 则

$$\partial_{x,y}(zf) = xy\delta_{x,y}f. \tag{2.7.3}$$

证明　由运算 $\partial_{x,y}$ 和 $\delta_{x,y}$ 的线性性, 可知只需讨论 $f(z) = z^n$ $(n>0)$. 因为

$$\begin{aligned}\partial_{x,y}(zf) &= \partial_{x,y}z^{n+1}\\ &= \frac{yx^{n+1} - xy^{n+1}}{x-y} = xy\frac{x^n - y^n}{x-y}\\ &= xy\delta_{x,y}z^n = xy\delta_{x,y}f,\end{aligned}$$

所以式 (2.7.3) 成立. □

定理 2.7.2　对 $\forall f \in \mathcal{R}\{z\}$, 有

$$x^2y^2\delta^2_{x^2,y^2}(zf) - \partial^2_{x^2,y^2}(zf) = x^2y^2\delta_{x^2,y^2}(zf^2). \tag{2.7.4}$$

证明　由式 (2.7.1) 和式 (2.7.2), 可知式 (2.7.4) 的左端为

$$\begin{aligned}&\frac{x^2y^2\Big((x^2f(x^2) - y^2f(y^2))^2 - x^2y^2(f(x^2) - f(y^2))^2\Big)}{x^2-y^2}\\ =&\frac{x^2y^2\Big(x^2f^2(x^2) - y^2f^2(y^2)\Big)}{x^2-y^2}.\end{aligned}$$

由式 (2.7.1), 这就是式 (2.7.4) 的右端. □

对于构形的一个集合 $\mathcal{A}$, 令

$$f_{\mathcal{A}}(x,\boldsymbol{y})=\sum_{A\in\mathcal{A}}x^{m(A)}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}(A)},\tag{2.7.5}$$

其中 $m(A)\geqslant 0$ 和 $\boldsymbol{n}(A)\geqslant \boldsymbol{0}$ 分别为 $\mathcal{A}$ 上在同一个同构类中的不变数和不变向量. 记 $F_{\mathcal{A}}(x,y)$ 为这样的一个二元函数, 使得

$$F_{\mathcal{A}}(x,y)=\int^{y}f_{\mathcal{A}}(x,\boldsymbol{y}).\tag{2.7.6}$$

将 $F_{\mathcal{A}}(x,y)$ 中 x 和 y 的幂分别称为第一参数和第二参数.

定理 2.7.3 令 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$ 为构形的两个集合. 若对于 $T\in\mathcal{T}$, 存在从 $\mathcal{T}$ 到 $\mathcal{S}$ 的一个映射 $\lambda(T)=\{S_1,S_2,\cdots,S_{m(T)+1}\}$, 使得 S_i 与 $\{i,m(T)+2-i\}$ 一一对应, 其中 i 和 $m(T)+2-i$ 分别为对第一参数和第二参数的贡献 $(i=1,2,\cdots,m(T)+1)$, 且满足条件

$$\mathcal{S}=\sum_{T\in\mathcal{T}}\lambda(T),$$

则

$$F_{\mathcal{S}}(x,y)=xy\delta_{x,y}(zf_{\mathcal{T}}),\tag{2.7.7}$$

其中 $f_{\mathcal{T}}=f_{\mathcal{T}}(z)=f_{\mathcal{T}}(z,\boldsymbol{y})$.

证明 由 λ 的确定方式, 有

$$\begin{aligned}F_{\mathcal{S}}(x,y)&=\sum_{T\in\mathcal{T}}\sum_{i=1}^{m(T)+1}x^{i}y^{m(T)-i+2}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}(T)}\\&=xy\sum_{T\in\mathcal{T}}\frac{x^{m(T)+1}-y^{m(T)+1}}{x-y}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}(T)}\\&=xy\delta_{x,y}(zf_{\mathcal{T}}).\end{aligned}$$

这就是式 (2.7.7). □

推论 2.7.1 令 $f_{\mathcal{T}}$ 和 $F_{\mathcal{S}}$ 分别由式 (2.7.5) 和式 (2.7.6) 确定, 则

$$f_{\mathcal{S}}(x,\boldsymbol{y})=\int_{y}xy\delta_{x,y}(zf_{\mathcal{T}}).$$

证明 由式 (2.7.6) 和定理 2.7.3, 即可得欲证的结论. □

定理 2.7.4　令 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$ 为构形的两个集合. 若对于 $T\in\mathcal{T}$, 存在从 $\mathcal{T}$ 到 $\mathcal{S}$ 的一个映射 $\lambda(T)=\{S_1,S_2,\cdots,S_{m(T)-1}\}$, 使得 S_i 与 $\{i,m(T)-i\}$ 一一对应, 其中 i 和 $m(T)+2-i$ 分别为对第一参数和第二参数的贡献 $(i=1,2,\cdots,m(T)-1)$, 且满足条件

$$\mathcal{S}=\sum_{T\in\mathcal{T}}\lambda(T),$$

则

$$F_{\mathcal{S}}(x,y)=\partial_{x,y}(f_{\mathcal{T}}),\tag{2.7.8}$$

其中 $f_{\mathcal{T}}=f_{\mathcal{T}}(z)=f_{\mathcal{T}}(z,\boldsymbol{y})$.

证明　由 λ 的确定方式, 有

$$\begin{aligned}F_{\mathcal{S}}(x,y)&=\sum_{T\in\mathcal{T}}\sum_{i=1}^{m(T)-1}x^iy^{m(T)-i}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}(T)}\\&=xy\sum_{T\in\mathcal{T}}\frac{yx^{m(T)}-xy^{m(T)}}{x-y}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}(T)}\\&=\partial_{x,y}(f_{\mathcal{T}}).\end{aligned}$$

这就是式 (2.7.8).　□

推论 2.7.2　令 $f_{\mathcal{T}}$ 和 $F_{\mathcal{S}}$ 分别如式 (2.7.5) 和式 (2.7.6) 所确定, 则

$$f_{\mathcal{S}}(x,\boldsymbol{y})=\int_y\partial_{x,y}(f_{\mathcal{T}}).$$

证明　由式 (2.7.6) 和定理 2.7.4, 即得欲证的结论.　□

2.8　注　记

1. 人们曾对 Blissard 算子 [3-4] 作为数学概念产生过疑虑, 其后约一个世纪, 至少在流行的出版物上竟未见有几人问津, 直到 Rota 及其合作者们的工作, 将 Blissard 算子视为在函数空间中从一个基到另一个基的一个线性泛函 (也称阴影泛函), 从而形成了一种符号代数, 或者说算子代数, 并与 Hopf 代数和 Mobius 代数等密切关联, Blissard 算子才开始逐渐被世人纳入数学的殿堂 [78,90-94].

2. 这里则是将 Blissard 算子视为从一个函数空间到一个向量空间的线性泛函, 因为与阴影泛函不同, 故称之为介子泛函, 所考虑的只是带介子泛函的方程 (见文献 [21−32,36,38−39,41−42,46−47,50,55,58,60−61,75−76]). 这些方程大多看起来相当简单, 但求解, 尤其求显式解绝非容易.

3. 关于介子泛函的代数结构, 还需要作更广, 甚至更深的研究, 以便揭示以组合学为基础的对象和内在的本质的规律性.

第 3 章　一元函数方程

3.1 变 首 型

令 $\mathcal{R}\{z\}$ 为整域 $\mathcal{F}\{z\}$ 中的由整数环 R 上所有以 z 为未定元级数组形成的扩充环. 本节所要讨论的方程如下: 求一个 z 的函数 $f \in \mathcal{R}\{z\}$ 且其所有系数非负, 使得

$$\begin{cases} azf^2 - bf + c = 0, \\ f|_{z=0} = d, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

其中 $a, b, c, d \in R$ 都是非负整数.

初看起来, 这就是一个普通的二次方程. 不过, 它与初等代数中遇到的二次方程有两点主要的不同: (a) 未知元的系数至少有一个是单变量的函数; (b) 所要求的解必须属于 $\mathcal{R}\{x\}$.

只要注意到, 当 $a = b = c = d = 1$ 时, 这就是在地图计数中, 平面根树计数函数所满足的方程. 因此, 将式 (3.1.1) 所给出的方程称为植树型.

不过, 那里所要求的是从这个方程的解中, 将这个所需要的计数函数找出来. 本书所讨论的重点则是方程的适定性, 即确定它的解是否存在, 以及若存在, 是否是唯一的.

条件 1　若 $f \in \mathcal{R}\{z\}$, 则

$$f = \sum_{n \geqslant 0} F_n x^n, \tag{3.1.2}$$

其中 $F_n \in \mathcal{R}$ $(n \geqslant 0)$.

比较式 (3.1.1) 两端的常数项, 只有满足条件

$$c = bd \tag{3.1.3}$$

时, 方程式 (3.1.1) 才可能有解. 从而, 只需讨论方程

$$\begin{cases} azf^2 - bf + bd = 0, \\ f|_{z=0} = d. \end{cases} \tag{3.1.4}$$

条件 2 如果 $d=0$, 则方程式 (3.1.4) 变为

$$(azf - b)f = 0.$$

由于 $f=0$ 只能看作是一个退化的一元函数, 故不足一提. 但若 $azf-b=0$, 则因为 az 在 $\mathcal{R}\{z\}$ 中没有逆, 所以方程式 (3.1.4) 无解. 从而, $d \neq 0$.

条件 3 因为 $b=0$ 或 $a=0$ 都使方程式 (3.1.4) 变得不足道, 还得限定 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$.

定理 3.1.1 方程式 (3.1.4) 在环 $\mathcal{R}\{z\}$ 中有一个系数非负的级数解, 当且仅当 $abd \neq 0$.

证明 方程式 (3.1.4) 的判别式

$$b^2 - 4azbd = b^2\left(1 - \frac{4adz}{b}\right).$$

因为环 $\mathcal{R}$ 是无限的, 在 $\mathcal{R}$ 中没有零因子, 从而, $b^{-1} \in \mathcal{R}$, 因此

$$1 - \frac{4adz}{b} \in 1 + z\mathcal{F}\{x, z\}.$$

由式 (1.4.4), 当 $c=2$ 时, 只有

$$f = \frac{b - b\sqrt{1 - 4adz/b}}{2az} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(2n)!d^{n+1}}{n!(n+1)!}\left(\frac{a}{b}\right)^n z^n \tag{3.1.5}$$

为系数非负的级数, 其中用到了

$$\prod_{i=0}^{n}(2i-1) = \prod_{i=1}^{n}(2i-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

因为 $a, b, d \geqslant 0$, 在式 (3.1.5) 中 $f \in \mathcal{R}\{x\}$, 且其系数非负, 当且仅当 $a \neq 0$, $b \neq 0$ 且 $d \neq 0$, 即 $abd \neq 0$. 这就是欲证的结论. □

当 $a=b=d=1$ 时, 式 (3.1.5) 变为

$$t_{\text{root}}=\sum_{n\geqslant 0}C_nz^n, \tag{3.1.6}$$

其中

$$C_n=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}=\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}$$

就是 Catalan 数. 这个数也可以如下递推地定义:

$$\begin{cases} C_n=\sum\limits_{i=0}^{n-1}C_iC_{n-1-i} \quad (n\geqslant 1), \\ C_0=1. \end{cases} \tag{3.1.7}$$

下面列举这种方程应用的几个例子.

例 3.1.1　二分树按非悬挂节点数 n 的分类. 例如, 当 $n=0$ 时, 规定二分树为一个单独的节点, 视为退化的情形. 当 $n=1$ 时, 二分树只有两个, 如图 3.1.1 和图 3.1.2 所示.

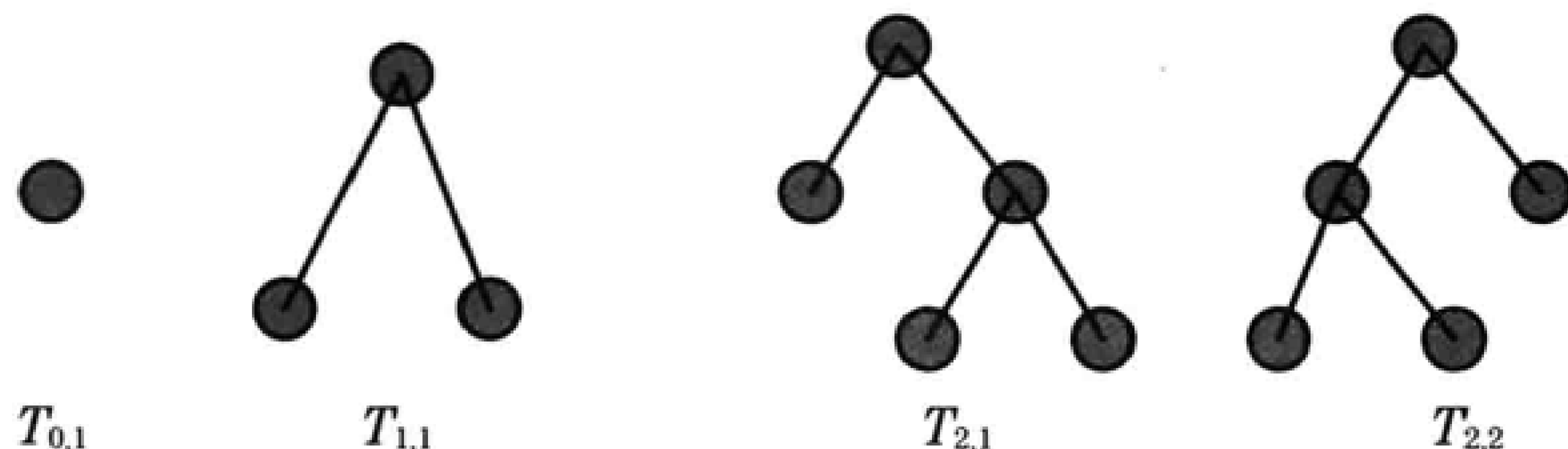


图 3.1.1　$n=1,2$ 的二分树

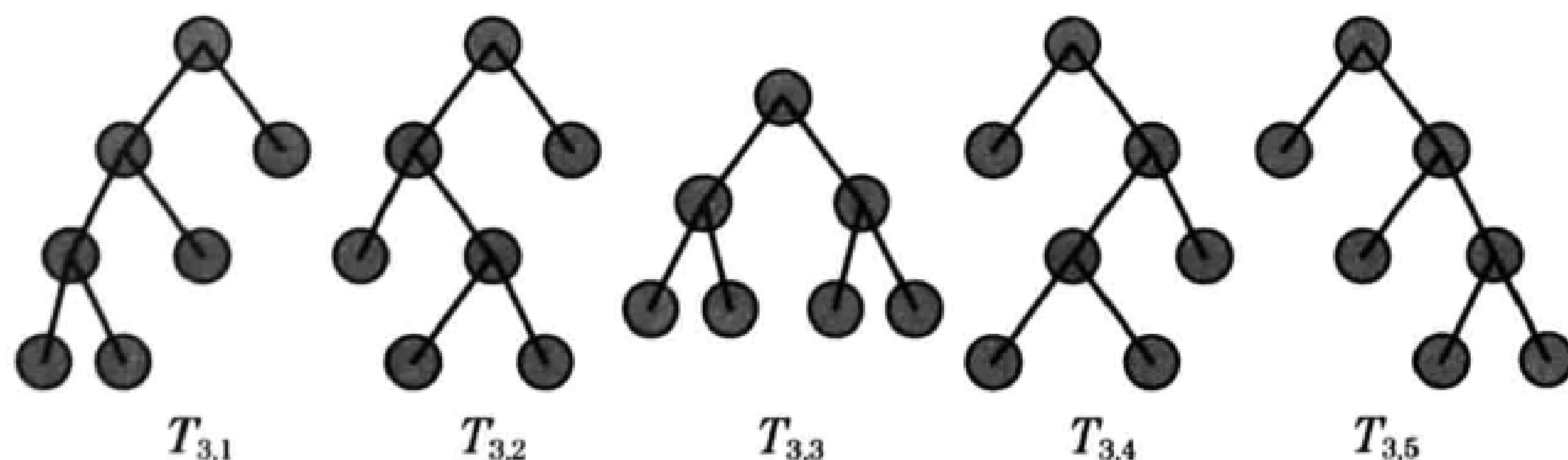


图 3.1.2　$n=3$ 的二分树

在图中, 最顶部的节点称为岭点. 只与一条边关联的节点称为悬挂点. 准确地说, 这里的二分树不是看作图, 而是图在平面上的嵌入. 它们之间的所谓相同, 不是同构, 而是拓扑等价. 并且, 还要在每一个节点处, 将所有关联边规定一种走向: 或顺时针, 或逆时针.

例如, $T_{2,1}$ 与 $T_{2,2}$, 若将它们视为图, 它们是同构的; 而且, 若将它们视为图在平面上的嵌入, 如果不规定方向, 也是拓扑等价的. 但这里是不等价的, 因为如果将 $T_{2,1}$ 中的节点都定为顺时针的, 则 $T_{2,2}$ 中的节点都是逆时针的.

去掉岭点后, 一个二分树变为两个独立的子二分树, 而且, 这两个子树非悬挂点的总和比原来恰少 1. 反之, 对于任何两个二分树, 添加一个新岭点与两个旧岭点相邻, 将它们合并为一个新的二分树, 使得新二分树的悬挂点数比它们的总和恰多 1, 这只有一种方法. 从而, 若记

$$t_{\mathrm{bint}} = \sum_{n\geqslant 0} T_n z^n,$$

其中 T_n $(n \geqslant 0)$ 是带 n 个非悬挂点的二分树的数目, 则 t_{bint} 有如下关系:

$$t_{\mathrm{bint}} = 1 + z t_{\mathrm{bint}}^2 \quad \Rightarrow \quad z t_{\mathrm{bint}}^2 - t_{\mathrm{bint}} + 1 = 0.$$

再考虑到 $n=0$ 时, $z^0 = 1$ 的系数为 1, 可知 t_{bint} 是方程

$$\begin{cases} zf^2 - f + 1 = 0, \\ f|_{z=0} = 1 \end{cases}$$

的一个解.

这就是方程式 (3.1.1) 当 $a=b=c=d=1$ 的情形. 因为方程式 (3.1.1) 要求级数的系数非负, 由定理 3.1.1 知, t_{bint} 是它的唯一解.

从而得 $t_{\mathrm{bint}} = t_{\mathrm{root}}$.

例 3.1.2 平面根树按边数 $n \geqslant 0$ 的分类. 在图的平面嵌入中, 每一条边有两端和两侧. 平面根树就是树在平面上的嵌入, 对于一个关联的{端, 侧} 给以的标记, 称为根, 用从端发出的箭头表示. 在图 3.1.3 中, $L_{n,i}$ 为第 i $(i \geqslant 1)$ 个 n 边树在平面上的嵌入, 其上的一个箭头表明一个根树. 箭头的数目就是不同构的平面根树的数目. 所谓两个平面根树同构, 是指要保持根在同构中是固定点. 用 i 区别的是不同构的嵌入. 对于给定的 n, 平面根树同构类数为 $\Lambda_n = l_{n,1} + l_{n,2} + l_{n,3} + \cdots$, 其中 $l_{n,i}$ $(i \geqslant 1)$ 是 $L_{n,i}$ 上的箭头数. 例如, 从图 3.1.3 可以看出, $\Lambda_0 = 1, \Lambda_1 = 1, \Lambda_2 = 2, \Lambda_3 = 5$ 和 $\Lambda_4 = 14$.

事实上, 由式 (3.1.6), $\Lambda_n = C_n$ $(n \geqslant 0)$.

例 3.1.3 平面瓣丛按边数 $n \geqslant 0$ 的分类. 在图的平面嵌入中, 每一条边有两端和两侧. 平面瓣丛就是单个节点的图在平面上的嵌入. 对于一个关联的端, 侧给以标记, 视为根, 用空心圆表示. 在图 3.1.4 中, $P_{n,i}$ 为第 i $(i \geqslant 1)$ 个 n 边瓣丛在平面上的嵌入, 其上的一个空心圆确定一个瓣丛. 空心圆的数目就

是不同构的平面瓣丛的数目. 所谓两个平面瓣丛同构, 是指要保持根在同构中为固定点. 用 i 区别的是不同构的嵌入. 对于给定的 n, 平面瓣丛同构类数为 $P_n=l_{n,1}+l_{n,2}+l_{n,3}+\cdots$, 其中 $l_{n,i}$ $(i\geqslant 1)$ 是 $P_{n,i}$ 上的空心圆数. 例如, 从图 3.1.4 可以看出, $P_0=1$, $P_1=1$, $P_2=2$, $P_3=5$ 和 $P_4=14$. 图 $P_{n,i}$ 中相同的数字表示连接成一条边.

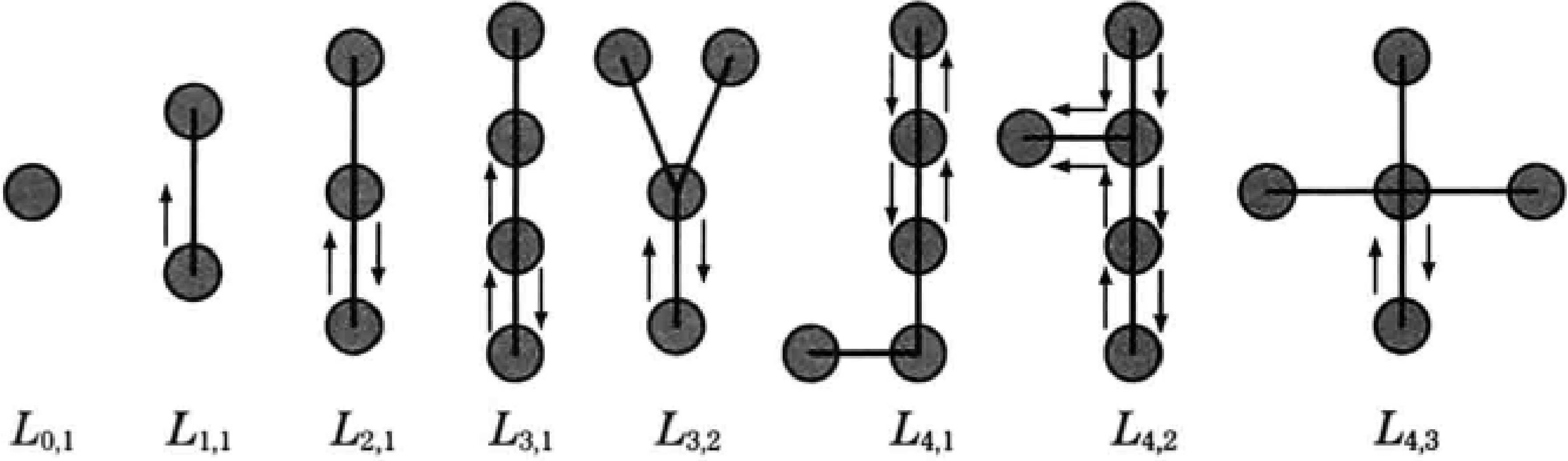


图 3.1.3　$n=0\sim 4$ 的平面根树

同样, 可以导出由 $\partial_z^n t_{\rm pet}=P_n$ $(n\geqslant 0)$ 所确定的函数 $t_{\rm pet}$ 满足方程式 (3.1.1) 当 $a=b=c=d=1$ 时的情形. 由式 (3.1.6), 知 $P_n=C_n$ $(n\geqslant 0)$.

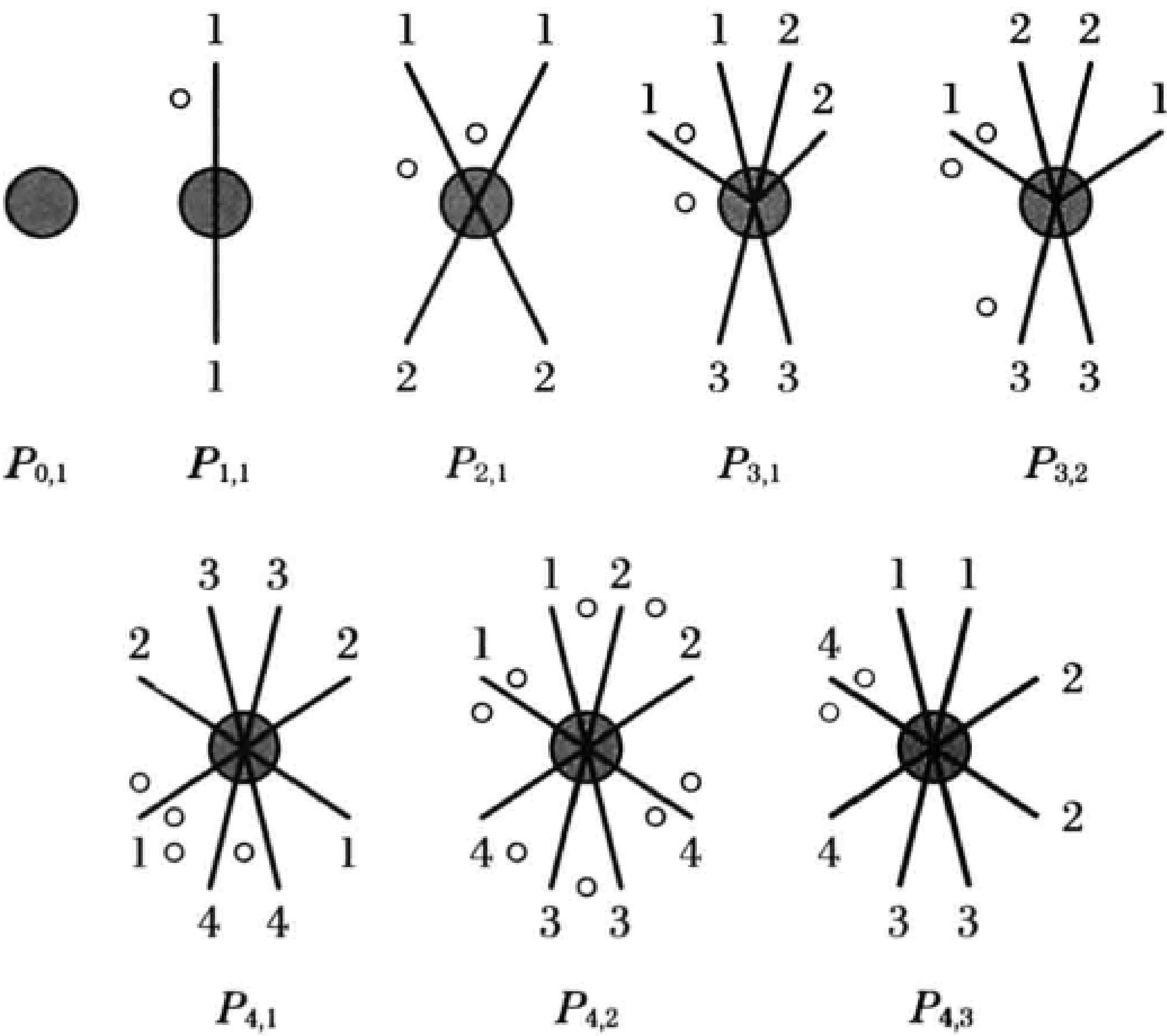


图 3.1.4　$n=0\sim 4$ 的平面瓣丛

例 3.1.4　积分序列. 考虑函数

$$\lambda(z)=\sum_{n\geqslant 0} z^n\frac{b^{2n+1}}{\pi}\int_{-1}^{1}\tau^{2n}\sqrt{1-\tau^2}\mathrm{d}\tau.$$

可以证明, 对于任何整数 $n\geqslant 0$,

$$\frac{b^{2n+1}}{\pi}\int_{-1}^{1}\tau^{2n}\sqrt{1-\tau^2}\mathrm{d}\tau=C_n.$$

由式 (3.1.6), $\lambda(z)=t_{\rm root}$. 根据定理 3.1.1 所确定的方程式 (3.1.4) 的适定性, $\lambda(z)$ 也是方程式 (3.1.4) (当 $a=b=d=1$ 时) 的解.

例 3.1.5 连分数. 因为连分数

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{\tau^2}{1-\cfrac{\tau^2}{1-\cfrac{\tau^2}{1-\cfrac{\tau^2}{1-\cfrac{\tau^2}{1-\cdots}}}}}}=\sum_{n\geqslant 0}C_n\tau^{2n}=\psi(\tau),$$

令 $\tau=\sqrt{z}$, 则由式 (3.1.6), 知 $\xi=\psi(\sqrt{z})=t_{\rm root}$. 根据定理 3.1.1 所确定的方程式 (3.1.4) 的适定性, $\xi(z)$ 也是方程式 (3.1.4) (当 $a=b=d=1$ 时) 的解.

3.2 变 尾 型

令 $\mathcal{R}\{z\}$ 为整域 $\mathcal{F}\{z\}$ 中的由整数环 R 上所有以 z 为未定元级数组形成的扩充环. 本节所要讨论的方程如下: 求一个 z 的函数 $f\in\mathcal{R}\{z\}$, 且其所有系数非负, 使得

$$\begin{cases} af^2-bf+cz=0, \\ f|_{z=0}=d, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

其中 $a,b,c,d\in R$ 都是非负整数.

由方程 (3.2.1) 本身即可看出, 必须有 $d=0$.

假若 $d>0$, 令 $F_n=\partial_Z^n f$ $(n\geqslant 0)$, 则由方程式 (3.2.1), 得

$$aF_0^2-bF_0=ad^2-bd=0 \quad\Rightarrow\quad ad=b \quad\Rightarrow\quad F_0=\frac{b}{a}.$$

这就要求 $a>0$ 且 $b>0$. 但当进一步确定 F_1 时, 由方程式 (3.2.1), 发现

$$2aF_0F_1-bF_1+c=0 \quad\Rightarrow\quad bF_1+c=0 \quad\Rightarrow\quad F_1=-\frac{c}{b}<0,$$

其中后一个箭头是因为, 若 $c=0$, 就使得 f 为一个常数. 然而, 因为 $F_1<0$, 所以 f 不能是非负的.

如果引进新的单变量函数 h, 使得 $f=zh$, 则方程式 (3.2.1) 变为

$$\begin{cases} az^2h^2-bzh+cz=0, \\ h|_{z=0}=d. \end{cases}$$

将第一个方程提出 z, 即转化为上节所讨论的方程式 (3.1.1) .

本节不拟再沿用这个思路, 而是考虑如下的方程:

$$\begin{cases} af^2-bf+cz=0, \\ \partial_z^1 f=d. \end{cases} \tag{3.2.2}$$

因为 $\partial_z^0 f=0$, 故由方程 (3.2.2), 可得

$$-b\partial_z^1 f+c=0 \quad \Rightarrow \quad d=\frac{c}{b} \quad \Rightarrow \quad b>0.$$

$a=0$ 或 $c=0$ 的情形将导致不是无解就是不足道, 方程式 (3.2.2) 变为

$$\begin{cases} af^2-bf+bdz=0, \\ \partial_z^1 f=d, \end{cases} \tag{3.2.3}$$

其中 $a,b,d>0$, $a,b,c\in\mathcal{R}$, $f\in\mathcal{R}\{z\}$.

因为方程式 (3.2.3) 的判别式与方程式 (3.1.4) 相同, 所不同的只是首项系数和尾项系数分别由常量转为变量和由变量转为常量. 再考虑到方程式 (3.2.3) 的解中,

$$a(\partial_z^0 f)^2+b\partial_z^0 f=0\ (a,b>0) \quad \Rightarrow \quad \partial_z^0 f=0,$$

这个解只能有形式

$$\begin{aligned} f&=\frac{b-b\sqrt{1-4adz/b}}{2a} \quad (\text{用式 (3.1.5)}) \\ &=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(2n)!d^{n+1}}{n!(n+1)!}\left(\frac{a}{b}\right)^n z^{n+1}, \end{aligned}$$

即

$$f=\sum_{n\geqslant 1}\frac{(2(n-1))!d^n}{n!(n-1)!}\left(\frac{a}{b}\right)^n z^n. \tag{3.2.4}$$

定理 3.2.1 方程

$$\begin{cases} f^2 - f + z = 0, \\ \partial_z^1 f = 1 \end{cases} \tag{3.2.5}$$

在 $\mathcal{R}\{z\}$ 上有且仅有一个非负整系数的解 (或者说, 是适定的).

证明 令 $F_n = \partial_z^n f\ (n \geqslant 0)$. 由方程式 (3.2.5), 知 $F_0^2 - F_0 = 0$, $2F_0F_1 - F_1 + 1 = 0$. 前者意味着 $F_0 = 0$ 或 $F_0 = 1$. 因为始条件为 $F_1 = 1$, 后者表明 $F_0 \neq 1$, 故只能有 $F_0 = 0$.

一般地, 对于 $n \geqslant 2$, 有

$$\sum_{i=0}^{n} F_i F_{n-i} - F_n = 0 \quad \Rightarrow \quad F_n = \sum_{i=0}^{n} F_i F_{n-i}.$$

又因为 $F_0 = 0$, 所以

$$F_n = \sum_{i=1}^{n-1} F_i F_{n-i},$$

即 $\partial_z^n f$ 由 $F_1, F_2, \cdots, F_{n-1}$ 确定, 而且 $\partial_z^n f$ 是非负整数, 当且仅当 F_1 是非负整数. 从而, 定理得证. □

实际上, 方程式 (3.2.5) 的解就是式 (3.2.4) 当 $a = b = d = 1$ 时的情形, 即

$$f = \sum_{n \geqslant 1} \frac{(2(n-1))!}{n!(n-1)!} z^n. \tag{3.2.6}$$

进一步, 考虑对 $\forall a, b, d \in \mathcal{R}$, 方程式 (3.2.3) 的适定性.

定理 3.2.2 方程

$$\begin{cases} af^2 - bf + bdz = 0, \\ \partial_z^1 f = d \quad (abd \neq 0) \end{cases} \tag{3.2.7}$$

在 $\mathcal{R}\{z\}$ 上有且仅有一个非负整系数的解 (或者说, 是适定的), 当且仅当 $d > 0$, $ab > 0, b|a$ (即 b 能整除 a).

证明 令 $F_n = \partial_z^n f\ (n \geqslant 0)$. 由方程式 (3.2.7), 有

$$aF_0^2 - bF_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_0 = 0, \text{ 或 } F_0 = \frac{b}{a}\ (a \neq 0),$$

以及

$$2aF_0F_1 - bF_1 + bd = 0 \quad \Rightarrow \quad 2adF_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_0 = 0,$$

后者意味着 $F_0 \neq b/a$. 从而, 只能有 $F_0 = 0$.

进而, 对任何整数 $n \geqslant 2$, 有

$$a\sum_{i=0}^{n-1} F_i F_n - bF_n = 0 \quad \Rightarrow \quad F_n = \frac{a}{b}\sum_{i=1}^{n-1} F_i F_{n-1}.$$

由此可见, $\partial_z^n f$ 由 $F_1, F_2, \cdots, F_{n-1}$ 确定. 而且, $\partial_z^n f$ 是非负整数, 当且仅当 F_1 是非负整数, $ab > 0$ 且 $b|a$.

从而, 即得欲证的结论. □

这个定理表明式 (3.2.4) 是在 $\mathcal{R}\{z\}$ 上仅有的非负整系数的解.

例 3.2.1 植树按边数的分类. 一个植树就是一个平面根树, 使得根节点的次为 1. 事实上, 它的计数函数为

$$t_{\text{plant}} = zt_{\text{root}} = \sum_{n\geqslant 1} C_{n-1} z^n \tag{3.2.8}$$

(参见文献 [65,100]).

例 3.2.2 蕾瓣丛按边数的分类. 根面次为 1 的平面瓣丛称为蕾瓣丛. 因为根面的次为 1, 删掉这个根边后, 就得到一个普通的瓣丛, 从任何一个普通的瓣丛, 添加一条根边, 使得根面的次为 1(只有一种方式), 就是说, 得到一个蕾瓣丛. 可见蕾瓣丛是以度为参数的计数函数

$$t_{\text{bud}} = zt_{\text{pet}},$$

其中 t_{pet} 为瓣丛以度为参数的计数函数.

由例 3.1.2 和例 3.2.1, 有

$$t_{\text{bud}} = t_{\text{plant}} = \sum_{n\geqslant 1} C_{n-1} z^n.$$

例 3.2.3 不可分离外平面根地图. 在文献 [37] 中已经证明, 不可分离外平面根地图以面数为参数的计数函数 $f_{\text{nsop}} = f_{\text{nsop}}(z)$ 是方程式 (3.2.5) 的一个解. 边数从 1 到 5 的这类地图如图 3.2.1 和图 3.2.2 所示. 在图中, $S_{n,i}$ 为 n 度 (即边数) 第 i 个拓扑不等价的不可分离外平面地图, 边旁的小空心圆表示不同构的定根方式. 由此可以看出, $1(S_{1,1})$, $1(S_{2,1})$, $1(S_{3,1})+1(S_{3,2})=2$, $1(S_{4,1})+3(S_{3,2})+1(S_{4,3})=5$, $1(S_{5,1})+3(S_{5,2})+3(S_{5,3})+4(S_{5,4})+2(S_{5,5})+1(S_{5,6})=14$. 与式 (3.2.6) 比较, 有

$$\partial_z^1 f_{\text{nsop}} = 1 = \partial_z^1 f, \quad \partial_z^2 f_{\text{nsop}} = 1 = \partial_z^2 f, \quad \partial_z^3 f_{\text{nsop}} = 2 = \partial_z^3 f,$$
$$\partial_z^4 f_{\text{nsop}} = 5 = \partial_z^4 f, \quad \partial_z^5 f_{\text{nsop}} = 14 = \partial_z^5 f.$$

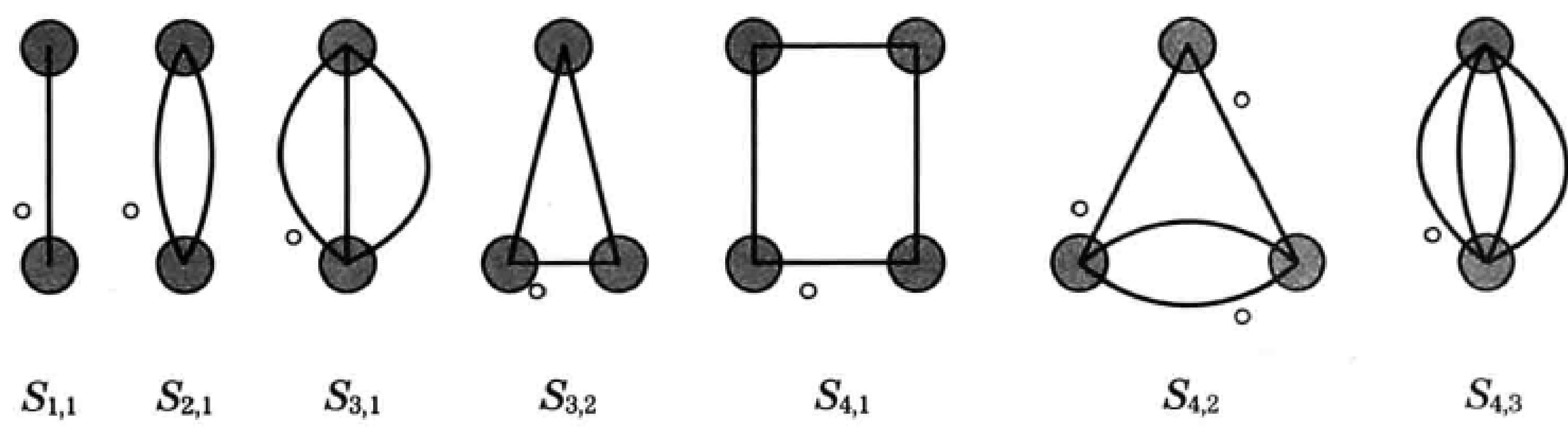


图 3.2.1 度为 1～4 的不可分离外平面根地图

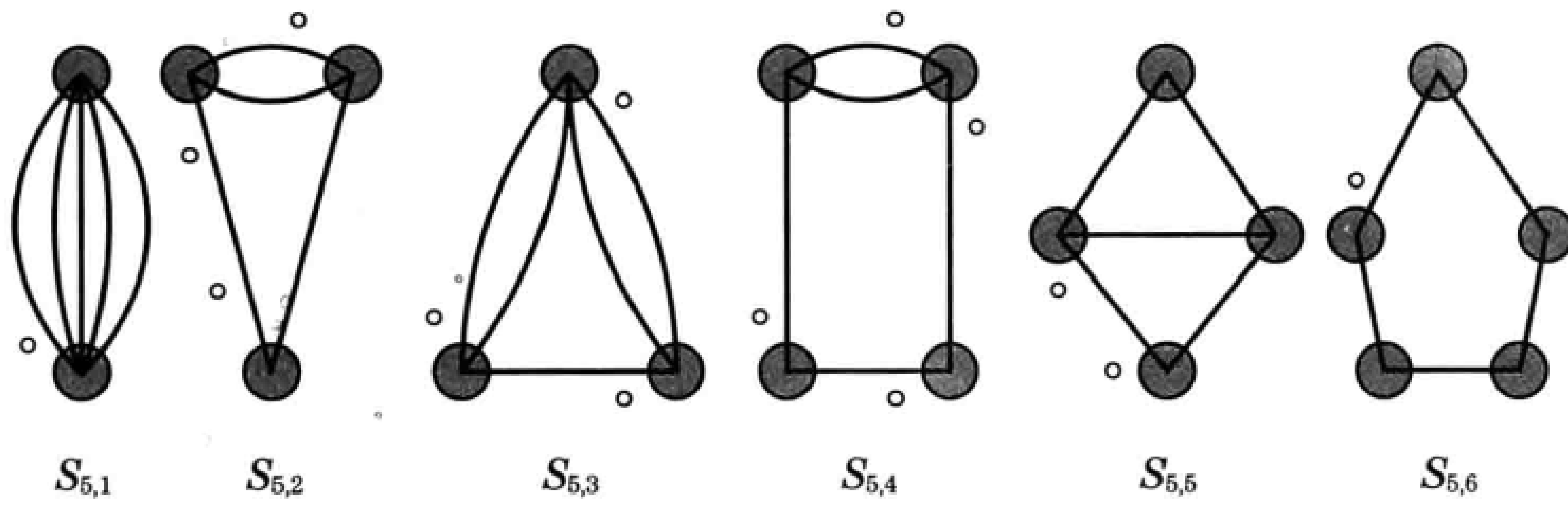


图 3.2.2 度为 5 的不可分离外平面根地图

3.3 多 变 型

如果一个函数方程至少有两个系数不是常数, 则称它属于多变型. 本节仅讨论二次函数方程中的一个三项系数都不是常数的情形, 也可称之为全变型.

这个方程的形式为

$$\begin{cases} a(1+z)f^2-b(1+z)f+cz=0, \\ f|_{z=0}=d, \end{cases} \tag{3.3.1}$$

其中 $a,b,c,d\in\mathcal{R}$, $abc>0$.

令

$$F_i=\partial_z^i f, \quad F_i^{[2]}=\partial_z^i f^2 \quad (i\geqslant 0),$$

则

$$F_i^{[2]}=\sum_{j=0}^{i}F_jF_{i-j}.$$

通过方程式 (3.3.1), 由

$$
\begin{aligned}
a(1+z)f^2-b(1+z)f+cz &= a(1+z)\sum_{n\geqslant 0}F_n^{[n]}z^n-b(1+z)\sum_{n\geqslant 0}F_n^{[n]}z^n+cz\\
&= aF_0^{[2]}-bF_0+(c+aF_1^{[2]}+aF_0^{[2]}-bF_1-bF_0)z\\
&\quad+\sum_{n\geqslant 2}\big(a(F_n^{[2]}+F_{n-1}^{[2]})-b(F_n+F_{n-1})\big)z^n\\
&=0,
\end{aligned}
\tag{3.3.2}
$$

可得关于 F_n $(n\geqslant 0)$ 的方程组

$$
\begin{cases}
aF_0^{[2]}-bF_0=0, & n=0,\\
c+aF_1^{[2]}+aF_0^{[2]}-bF_1-bF_0=0, & n=1,\\
a(F_n^{[2]}+F_{n-1}^{[2]})-b(F_n+F_{n-1})=0, & n\geqslant 2.
\end{cases}
$$

令 $F_n^{[2]}=2F_0F_n+\hat{F}_n^{[2]}$, 其中

$$
\hat{F}_n^{[2]}=\sum_{i=1}^{n-1}F_iF_{n-i},
$$

则上面的方程组变为

$$
\begin{cases}
aF_0^{[2]}-bF_0=0, & n=0,\\
F_1=\dfrac{c}{b-2aF_0}, & n=1,\\
F_n=\dfrac{a(\hat{F}_n^{[2]}+F_{n-1}^{[2]})-bF_{n-1}}{b-2aF_0}, & n\geqslant 2.
\end{cases}
\tag{3.3.3}
$$

方程式 (3.3.1) 中的条件 $abc>0$, 只是为了排除非本质的易于处理的情况.

引理 3.3.1 方程式 (3.3.1) 在扩张整域 $\mathcal{R}\{z\}$ 上是适定的, 当且仅当 $d=0$ 或 $d=b/a$.

证明 因为

$$
aF_0^{[2]}-bF_0=0 \quad\Rightarrow\quad F_0(aF_0-b)=0,
$$

所以 F_0 只有两种可能性: $F_0=0$ 或 $F_0=b/a$. 因为 $F_0=\partial_z^0 f=f|_{z=0}$, 故由始条件, 知 $F_0=d$.

先看 $d=0$ 的情形. 因为 $F_0=0$, 故方程组 (3.3.3) 变为

$$
\begin{cases}
F_1=\dfrac{c}{b},\\
bF_n=bF_{n-1}-a(\hat{F}_n^{[2]}+\hat{F}_{n-1}^{[2]}), \quad n\geqslant 2
\end{cases}
$$

由于 F_n $(n \geqslant 2)$ 由 F_i $(i < n)$ 确定, 且 $F_n \in \mathcal{R}$(注意, $\mathcal{R}$ 是整域而不是整数环!), 从这个方程组的适定性, 即可得到方程式 (3.3.1) 的适定性.

再看 $d = b/a$ 的情形. 因为 $F_0 = b/a$, 故方程组 (3.3.3) 变为

$$\begin{cases} F_1 = -\dfrac{c}{b}, \\ bF_n = bF_{n-1} - a(\hat{F}_n^{[2]} + F_{n-1}^{[2]}), \quad n \geqslant 2. \end{cases}$$

同样, 也可得到方程式 (3.3.1) 的适定性. □

从证明过程中可以看出, 如果要求解非负系数的无穷级数, 则只有 $d = 0$ 时, 方程式 (3.3.1) 才具有适定性. 因此, 下面只研究 $d = 0$ 时, 方程式 (3.3.1) 解的形式.

因为它是一个二次方程, 可以通过判别式求它的解. 这里则是用一种通过变换以直接借助 Lagrange 反演的推导方法.

首先, 方程式 (3.3.1) 等价于

$$f = \frac{cz}{(1+z)(b-af)}. \tag{3.3.4}$$

引进参数 ξ 和 η, 使得

$$\begin{cases} f = \eta, \\ z = \dfrac{\xi}{1-\xi}, \quad \text{或} \quad \xi = \dfrac{z}{1+z}. \end{cases} \tag{3.3.5}$$

令

$$\phi(\eta) = \frac{c}{b - a\eta}, \tag{3.3.6}$$

则

$$\begin{cases} f = \eta, \\ \eta = \xi\phi(\eta). \end{cases} \tag{3.3.7}$$

因为 $\phi(0) = c/a \neq 0$, 由式 (1.5.6), 对于 $n \geqslant 1$, 有

$$\begin{aligned} \partial_\xi^n f &= \frac{1}{n}\partial_\eta^{n-1}\phi^n \\ &= \frac{1}{n}\partial_\eta^{n-1}\left(\frac{c/a}{1-(b/a)\eta}\right)^n \quad \text{(用式 (1.4.4) 当 } c = -1/n \text{ 时的情形)} \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{c}{a}\right)^n\binom{2n-2}{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

由式 (3.3.5) 中的第二式和式 (1.4.4) (当 $c=-1/l$ 时),

$$\xi^l = z^l \sum_{i\geqslant 0} \binom{i+l-1}{l-1} (-z)^i = \sum_{i\geqslant l} \binom{i-1}{l-1} z^{i-l}.$$

从而, 对于 $n \geqslant 1$, 有

$$\begin{aligned}
\partial_z^n f &= \sum_{j=1}^{n} \partial_\xi^j f \partial_z^{n-j} \xi^j \quad (\text{用式 (3.3.5) 和式 (3.3.7)}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \left(\frac{c}{a}\right)^j \binom{2j-2}{j-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{j-1} \partial_z^n \xi^{n-j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{n-j}}{j} \left[\frac{c}{a}\right]^j \binom{2j-2}{j-1} \left[\frac{b}{a}\right]^{j-1} \binom{n-1}{j-1}.
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

定理 3.3.1 在整域扩张 $\mathcal{R}\{z\}$ 的非负系数无穷级数中, 方程

$$\begin{cases} a(1-z)f^2 - b(1-z)f + z = 0, \\ f|_{z=0} = 0 \quad (abc > 0) \end{cases} \tag{3.3.9}$$

有且仅有一个解.

证明 只要注意, 若在式 (3.3.5) 中, 用

$$z = \frac{\xi}{1+\xi} \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{z}{1-z},$$

则可导出在式 (3.3.8) 中不会有负系数. 从而, 这个方程有一个无负系数无穷级数解.

不再有其他解的证明, 可直接从定理 3.4.1 证明中的 $d=0$ 部分导出. □

因为方程式 (3.3.9) 的解由

$$\partial_z^n f = \begin{cases} 0, & n=0 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{n-j}}{j} \left[\frac{c}{a}\right]^j \left[\frac{b}{a}\right]^{j-1} \binom{2j-2}{j-1} \binom{n-1}{j-1}, & n \geqslant 1 \end{cases} \tag{3.3.10}$$

确定, 从定理 3.4.2, 即可得以下推论:

推论 3.3.1 如果 a 是 b 和 c 的一个公因子, 则在方程式 (3.3.9) 的解中, 所有系数都是正整数.

证明 只需讨论整数性. 用与定理 3.4.1 证明中相仿的方式, 即可得出. □

事实上, 在式 (3.3.10) 中, 若对于 $1 \leqslant j \leqslant n$, 引进

$$A_j = \frac{(-1)^{n-j}}{j}\left[\frac{c}{a}\right]^j\left[\frac{b}{a}\right]^{j-1}\binom{2j-2}{j-1}\binom{n-1}{j-1}$$

和 $\tilde{A}_{n,i} = A_{n-2i} - A_{n-2i-1}$ $(0 \leqslant i \leqslant \lceil n/2 \rceil)$, 则对于 $n \geqslant 1$,

$$\partial_z^n f = \delta_{(n)} + \sum_{i=0}^{\lceil n/2 \rceil - 1} \tilde{A}_{n,i}, \tag{3.3.11}$$

其中

$$\delta_{(n)} = \begin{cases} 1, & n = 1(\mathrm{mod}\ 2), \\ 0, & n = 0(\mathrm{mod}\ 2), \end{cases}$$

称为 n 的模 2 特征数. 由 $|A_j|$ 的单增性, 可知 $\tilde{A}_{n,i} > 0$ $(0 \leqslant i \leqslant \lceil n/2 \rceil - 1)$.

例 3.3.1 不可分离外平面简单根三角化依根面次的同构分类. 当 $a = b = c = 1$ 时, $\partial_z^n f$ 是不同构的 n 度不可分离外平面简单根地图的数目, 一个 n 度不可分离外平面简单地图是根面次 m 不可分离外平面三角化, 当且仅当 $n = 3m - 3$, 若用 $f_{\mathrm{not}} = f_{\mathrm{not}}(z)$ 表示不可分离外平面根三角化依根面次的计数函数 (图 3.3.1), 则由式 (3.3.11), 知

$$\partial_z^m f_{\mathrm{not}} = \sum_{i=0}^{\lceil (3m-3)/2 \rceil - 1} \tilde{A}_{3m-3,i}, \tag{3.3.12}$$

其中 $m \geqslant 3$. 例如, 根面次不超过 5 的不可分离外平面简单根三角化同构分类为

$$(1P_{3,1}) + (2P_{5,2}) + (4P_{7,4}),$$

其中 $P_{3,1}$, $P_{5,2}$ 和 $P_{7,4}$ 在图 3.3.1 和图 3.3.2 中给出, 分别为根面次 $m = 3, 4$ 和 5 的不可分离外平面根三角化.

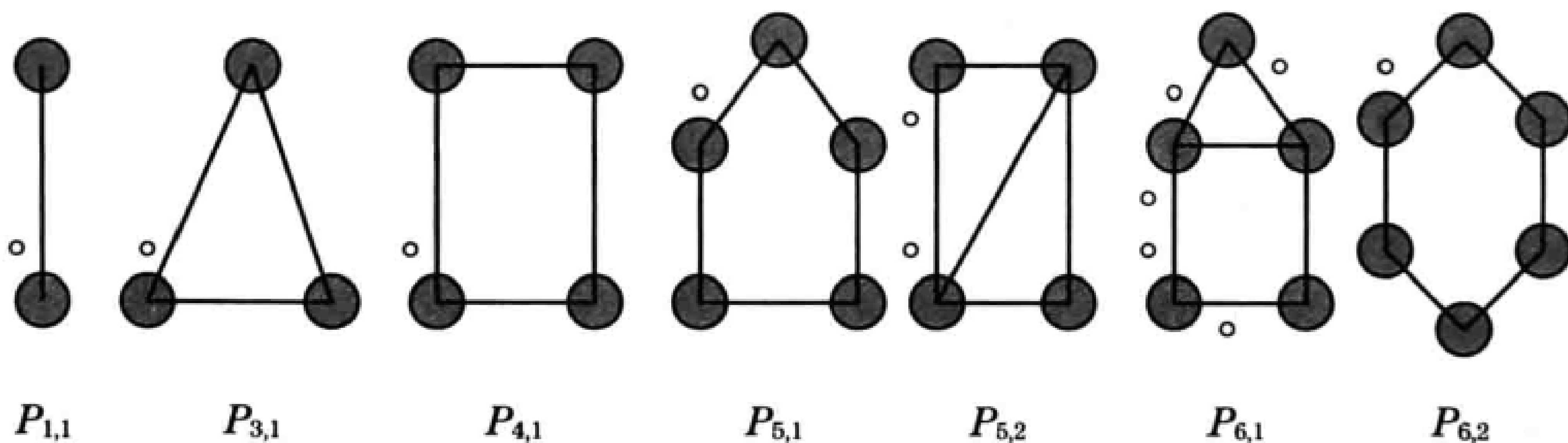


图 3.3.1 度为 0～6 的不可分离外平面简单根地图

例 3.3.2 植 3–树按阶的同构类. 一个植 3–树既是植树又是 3–分树.

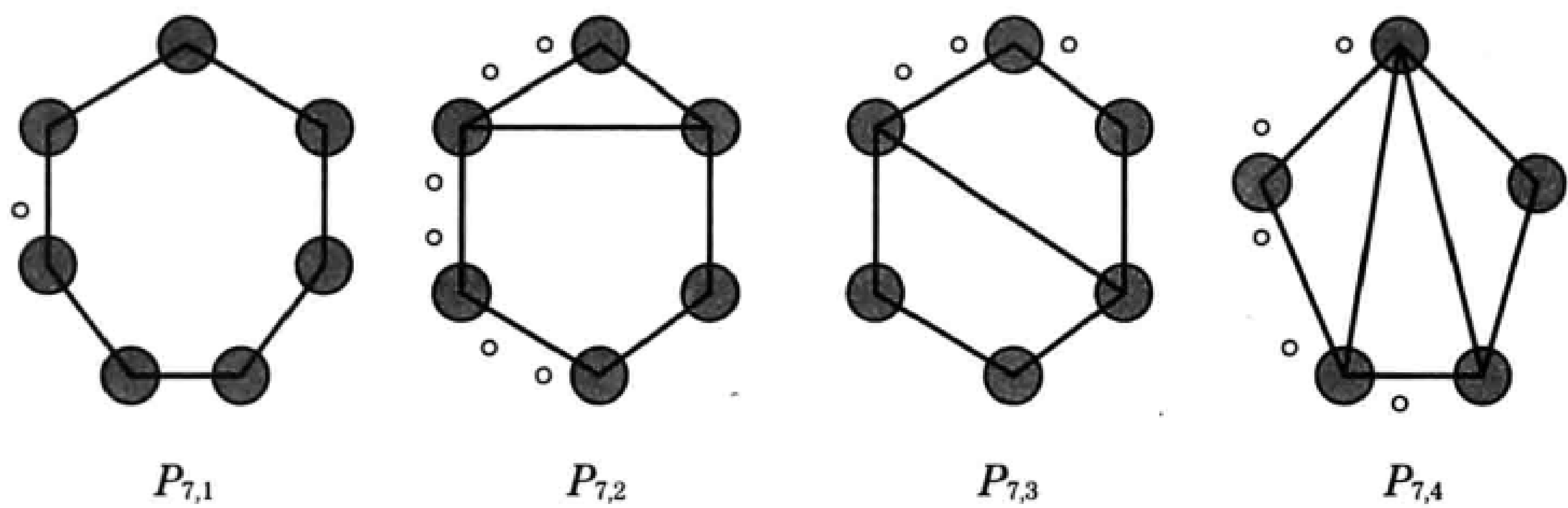


图 3.3.2　度为 7 的不可分离外平面简单根地图

根据外对偶性原理, 一个地图是植 3–树, 当且仅当它的外对偶是不可分离外平面根三角化. 并且, 植 3–树的悬挂点数就是这个外平面根三角化的根面次. 因为一个 3–树的非悬挂点数比它的悬挂点数少 2, 阶为 $n\geqslant 4$ 的 3–树具有 $m=(n+2)/2$ 个悬挂点. 非悬挂点的数目就是 3–节点的数目.

令 $f_{\text{ptri-t}}=f_{\text{ptri-t}}(z)$ 是植 3–树以 3–节点的数目 s 为参数的计数函数, 则由式 (3.3.12), 知

$$\partial_z^n f_{\text{ptri-t}}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{\lceil(3(s+2)-3)/2\rceil-1}\tilde{A}_{3(s+2)-3,i}, & n\equiv 0(\text{mod } 2),\\ 0, & n\not\equiv 0(\text{mod } 2),\end{cases}\tag{3.3.13}$$

其中 $s\geqslant 1$.

在图 3.3.3 中, 给出了 $s=1,2$ 和 3 植 3–树的同构类: $(1T_{1,1})+(2T_{2,1})+(4T_{3,1})$, 计 7 类.

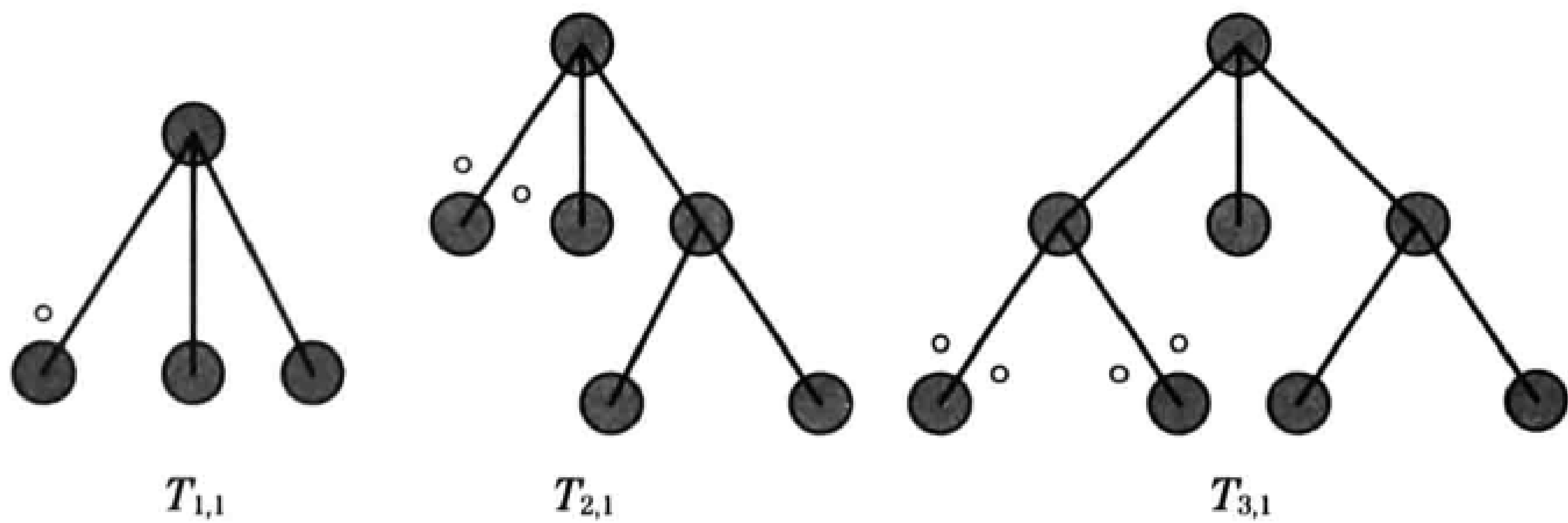


图 3.3.3　次 3 节点数为 1~3 的植 3–树

例 3.3.3　不可分离外平面简单根地图依度的同构分类. 若 $a=b=a=1$, $d=0$, 则方程式 (3.3.1) 变为

$$\begin{cases}(1+z)f^2-(1+z)f+z=0,\\ f|_{z=0}=0.\end{cases}\tag{3.3.14}$$

用式 (3.3.8), 方程式 (3.3.14) 的解由

$$\partial_z^n f = \begin{cases} 0, & n=0, \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{n-j}}{j}\binom{2j-2}{j-1}\binom{n-1}{j-1}, & n>0 \end{cases} \tag{3.3.15}$$

确定. 这个函数 f 提供了对于不可分离外平面简单根地图以度为参数的同构分类.

在图 3.3.2 和图 3.3.3 中, 提供了不可分离外平面简单根地图对于度为 1~ 7 的同构分类:

$$\begin{aligned}&(1P_{1,1})+(1P_{3,1})+(1P_{4,1})+(1P_{5,1}+2P_{5,2})+(5P_{6,1}+1P_{6,2})\\&\quad+(1P_{7,1}+6P_{7,2}+3P_{7,3}+5P_{7,4}).\end{aligned}$$

例 3.3.4 含节点地图的不可分离外平面简单分类. 令 $g=f+1$, 则方程式 (3.3.15) 变为

$$\begin{cases} (1+z)g^2-3(1+z)g+3z+2=0, \\ g|_{z=0}=1. \end{cases} \tag{3.3.16}$$

因此, 这个方程的解由

$$\partial_z^n g = \begin{cases} 1, & n=0, \\ \partial_z^{n-1} f, & n\geqslant 1(\text{由式 (3.3.15)}) \end{cases}$$

确定.

3.4 三角化型

讨论方程 ([67], 70 页)

$$\begin{cases} f^3+\frac{1-z}{z^2}f^2+\frac{z-2}{z}f+1=0, \\ f|_{z=0}=0. \end{cases} \tag{3.4.1}$$

定理 3.4.1 方程式 (3.4.1) 在 $\mathcal{R}\{z\}$ 中有且仅有一个非负幂、非负整系数无穷级数的解.

证明　给定 $F_n^{[i]}=\partial_z^n f^i$ $(n\geqslant 0,\ i=1,2,\ 3)$. 因为 $f^1=f$, 故自然有 $F_n^{[1]}=\partial_z^n f=F_n$.

由于 $F_0=\partial_z^0 f=f|_{z=0}=0$, 对于 $i=1,2,3$, 有

$$f^i=\sum_{n\geqslant i}F_n^{[i]}z^n.$$

方程式 (3.4.1) 变为

$$\begin{cases}F_2^{[2]}-2F_1+1=0 & (\text{对于 } z^0=1,\text{ 即常数项}),\\ F_3^{[2]}-F_2^{[2]}+F_1-2F_2=0 & (\text{对于 } z^1=z,\text{ 即 1 次项}),\\ F_4^{[2]}-F_3^{[2]}+F_2-2F_3=0 & (\text{对于 } z^2,\text{ 即 2 次项}),\\ \cdots, & \\ F_n^{[3]}+F_{n+2}^{[2]}-F_{n+1}^{[2]}+F_n-2F_{n+1}=0 & (\text{对于 } z^n,\text{ 即 } n\geqslant 3\text{ 次项}).\end{cases}$$

由上面第一个式子, 有

$$F_2^{[2]}-2F_1+1=0\quad\Rightarrow\quad F_1^2-2F_1+1=(F_1-1)^2=0\quad\Rightarrow\quad F_1=1.$$

由第二个式子, 有

$$\begin{aligned}F_3^{[2]}-F_2^{[2]}+F_1-2F_2=0\quad&\Rightarrow\quad 2F_1F_2-F_1^2+F_1-2F_2=0\\&\Rightarrow\quad 2F_2-2F_2=0\\&\Rightarrow\quad F_2=?\end{aligned}$$

由第三个式子, 有

$$\begin{aligned}F_4^{[2]}-F_3^{[2]}+F_2-2F_3=0\quad&\Rightarrow\quad 2F_1F_3+F_2^2-2F_1F_2+F_2-2F_3=0\\&\Rightarrow\quad F_2(F_2-1)=0\\&\Rightarrow\quad F_2=0,F_2=1(\text{舍去}).\end{aligned}$$

再看一看 $n=3$ 的情形, 以确定 F_3. 因为 $F_1=1\ \ F_2=0$, 所以

$$\begin{aligned}F_3^{[3]}+F_5^{[2]}-F_4^{[2]}+F_3-2F_4&=F_1^3+(2F_1F_4+2F_2F_3)-(2F_1F_3+F_2^2)+F_3-2F_4\\&=1+2F_4-2F_3+F_3-2F_4\\&=1-F_3=0,\end{aligned}$$

由此知 $F_3=1$.

当 $n=4$ 时, 因为 $F_1=1,\ F_2=0,\ F_3=1$, 所以

$$\begin{aligned}F_4^{[3]}+F_6^{[2]}-F_5^{[2]}+F_4-2F_5&=3F_1^2F_2+(2F_1F_5+2F_2F_4+F_3^2)\\&\quad-(2F_1F_4+2F_2F_3)+F_4-2F_5\\&=2F_5+1-2F_4+F_4-2F_5\\&=1-F_4=0,\end{aligned}$$

由此知 $F_4=1$.

对于 $n\geqslant 5$, 从已经确定的 $F_i\ (1\leqslant i\leqslant n-1)$, 再由通式

$$F_n^{[3]}+F_{n+2}^{[2]}-F_{n+1}^{[2]}+F_n-2F_{n+1}=0,$$

即

$$F_n=\sum_{\substack{1\leqslant i,j,k\leqslant n-1\\ i+j+k=n}}F_iF_jF_k+\sum_{l=2}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}F_lF_{n-l}-\sum_{l=2}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}F_lF_{n-1-l}$$

确定 F_n.

由于这个过程进行的唯一性, 以及当 $n\geqslant 4$ 时, $F_{n+1}\geqslant F_n$, 所以

$$\begin{aligned}\sum_{l=2}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}F_lF_{n-l}-\sum_{l=2}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}F_lF_{n-1-l}&\geqslant\sum_{l=2}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}F_lF_{n-l}-\sum_{l=2}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}F_lF_{n-1-l}\\&=\sum_{l=2}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}F_l(F_{n-l}-F_{n-1-l})\\&>0,\end{aligned}$$

因此 F_n 一直保持非负整性, 即得所讨论方程的适定性. □

为了求出方程式 (3.4.1) 的这个解, 虽然它是一个三次方程, 在 1.4 节中提供了一个普遍适用的方法, 但由于计算起来与二次方程相比过于复杂, 还是从这个方程本身的特殊性着手.

首先注意到, 这个方程对于 $1/z$ 是二次的, 即

$$\left(\frac{1}{z}\right)^2f^2-\left(\frac{1}{z}\right)(f^2+2f)+(f^3+f+1)=0.$$

由判别式

$$\begin{aligned}(f^2+2f)^2-4f^2(f^3+f+1)&=f^2\big((f+2)^2-4(f^3+f+1)\big)\\&=f^4(1-4f),\end{aligned}$$

可知

$$\frac{1}{z}=\frac{f+2\pm f\sqrt{1-4f}}{2f}.$$

从而

$$z=\frac{2f}{f+2\pm f\sqrt{1-4f}}.$$

考虑到 f 是非负系数, 只能有

$$z=\frac{2f}{f+2-f\sqrt{1-4f}}. \tag{3.4.2}$$

为了避开根式, 引进一个参数 θ, 使得

$$1-2\theta=\sqrt{1-4f},$$

从而可得

$$f=\theta(1-\theta). \tag{3.4.3}$$

将之代入式 (3.4.2), 即得

$$z=\frac{\theta(1-\theta)}{1+\theta^2(1-\theta)}. \tag{3.4.4}$$

令

$$\phi(\theta)=\frac{1+\theta^2(1-\theta)}{1-\theta},$$

则由式 (3.4.3) 和式 (3.4.4), 得

$$\begin{cases} f=\theta(1-\theta), \\ \theta=z\phi(\theta). \end{cases} \tag{3.4.5}$$

由于 $\phi(0)=1\neq 0$, 在式 (3.4.5) 的基础上, 用定理 1.5.1(即 Lagrange 反演), 即得

$$\partial_z^n f=\frac{1}{n}\partial_\theta^{n-1}\left(\phi^n\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}\right)=\frac{1}{n}\left(\partial_\theta^{n-1}\phi^n-2\partial_\theta^{n-2}\phi^n\right). \tag{3.4.6}$$

由二项式定理, 知

$$\phi^n=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\left(\frac{1}{1-\theta}\right)^l\theta^{2(n-l)}.$$

由式 (1.4.4) 的第二式当 $c=-1/l$ 时的情形，知

$$\frac{1}{(1-\theta)^l}=\sum_{s\geqslant 0}\binom{s+l-1}{l-1}\theta^s.$$

因此由式 (3.4.6), 对 $\forall k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\partial_\theta^k \phi^n &= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \partial_\theta^{k-2n+2l}\left(\frac{1}{1-\theta}\right)^l \\ &= \sum_{l=\lceil \frac{2n-k}{2} \rceil}^{n} \binom{n}{l}\binom{k-2n+3l-1}{l-1}.\end{aligned} \tag{3.4.7}$$

定理 3.4.2 方程式 (3.4.1) 在 $\mathcal{R}\{z\}$ 中的解由

$$\begin{cases} \partial_z^n f = \displaystyle\sum_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil \leqslant l \leqslant n-1} \frac{(n-1)!(3l-n-3)!}{l!(n-l-1)!(l-1)!(2l-n-2)!} \quad (n \geqslant 3), \\ \partial_z^1 f = 1, \quad \partial_z^2 f = 0 \end{cases} \tag{3.4.8}$$

确定.

证明 由式 (3.4.6) 和式 (3.4.7), 知

$$\begin{aligned} n\partial_z^n f &= \sum_{l=\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}^{n} \binom{n}{l}\binom{3l-n-2}{l-1} - 2\sum_{l=\lceil \frac{n+2}{2} \rceil}^{n} \binom{n-1}{l}\binom{3l-n-3}{l-1} \\ &= \sum_{l=\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}^{n} \binom{n}{l}\left(\binom{3l-n-2}{l-1} - 2\binom{3l-n-3}{l-1}\right) \\ &= \sum_{l=\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}^{n} \binom{n}{l}\binom{3l-n-3}{l-1}(n-l). \end{aligned}$$

从而, 对于 $n \geqslant 3$, 有

$$\partial_z^n f = \sum_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil \leqslant l \leqslant n-1} \frac{(n-1)!(3l-n-3)!}{l!(n-l-1)!(l-1)!(2l-n-2)!}.$$

通过求和指标的变换和对 $n=1$ 和 2 情形的具体演算, 即可得式 (3.4.8) . □

例 3.4.1 外平面根三角化依根面次的分类. 在文献 [67](§ 3.1) 中, 已经证明方程式 (3.4.1) 由定理 3.4.1 所确定的解 $f = zg_{\mathrm{ot}}$, 其中 g_{ot} 为外平面根三角化以根面次为参数的计数函数, 即 $\partial_z^n g_{\mathrm{ot}} = \partial_z^{n+1} f$ $(n \geqslant 0)$.

图 3.4.1~ 图 3.4.3 描述了根面次小于 7 的外平面根三角化, 并依根面次的同构类进行了分类. 由定理 3.4.2 中的式 (3.4.8), 知

$$\begin{aligned} &\partial_z^0 g_{\mathrm{ot}} = \partial_z^1 f = 1, \quad \partial_z^1 g_{\mathrm{ot}} = \partial_z^2 f = 0, \quad \partial_z^2 g_{\mathrm{ot}} = \partial_z^3 f = 1, \\ &\partial_z^3 g_{\mathrm{ot}} = \partial_z^4 f = 1, \quad \partial_z^4 g_{\mathrm{ot}} = \partial_z^5 f = 4, \quad \partial_z^5 g_{\mathrm{ot}} = \partial_z^6 f = 10, \\ &\partial_z^6 g_{\mathrm{ot}} = \partial_z^7 f = 34. \end{aligned}$$

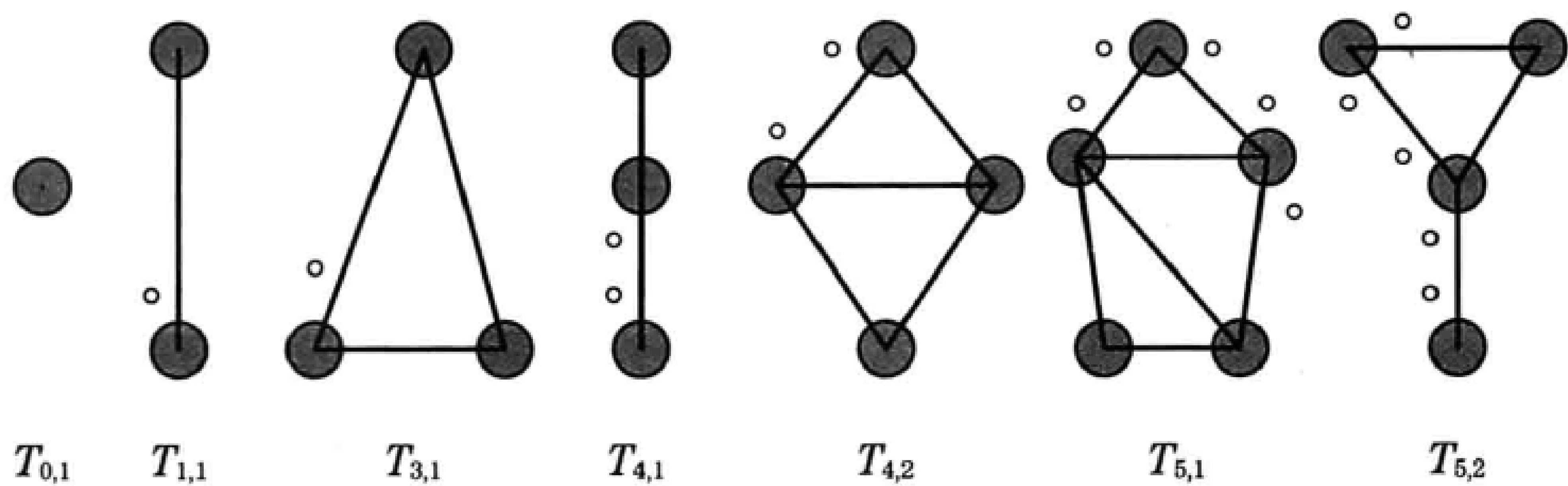


图 3.4.1　根面次为 0 ~ 5 的外平面根三角化的分类

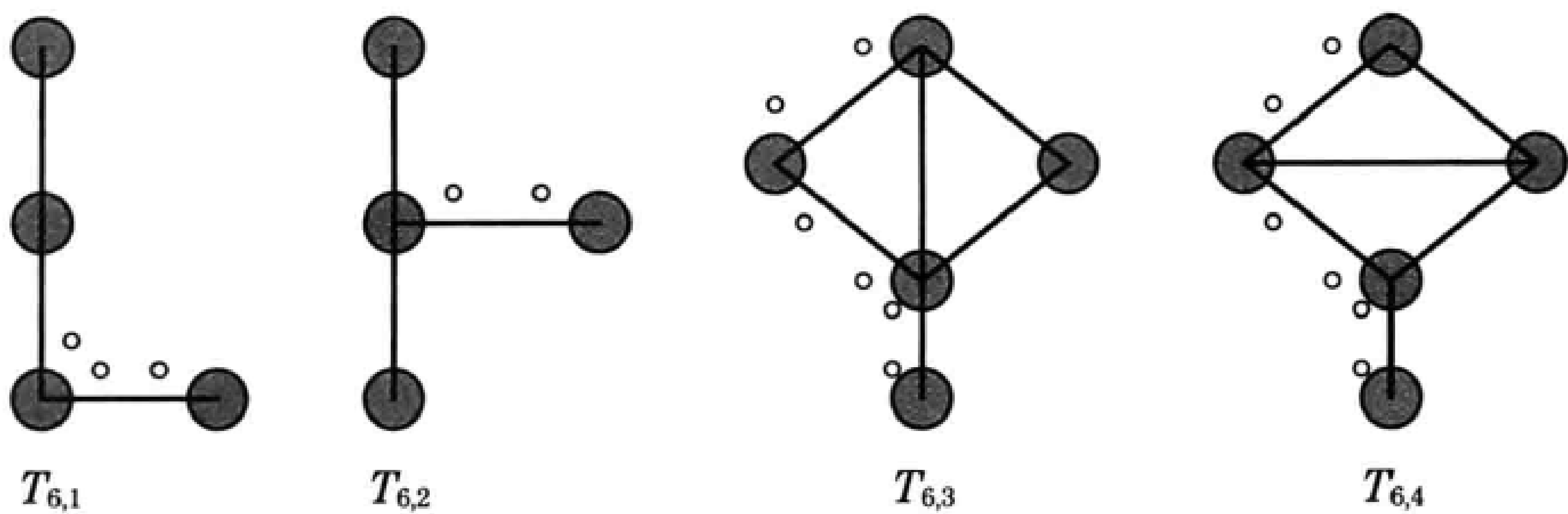


图 3.4.2　根面次为 6 的外平面根三角化的分类 (I)

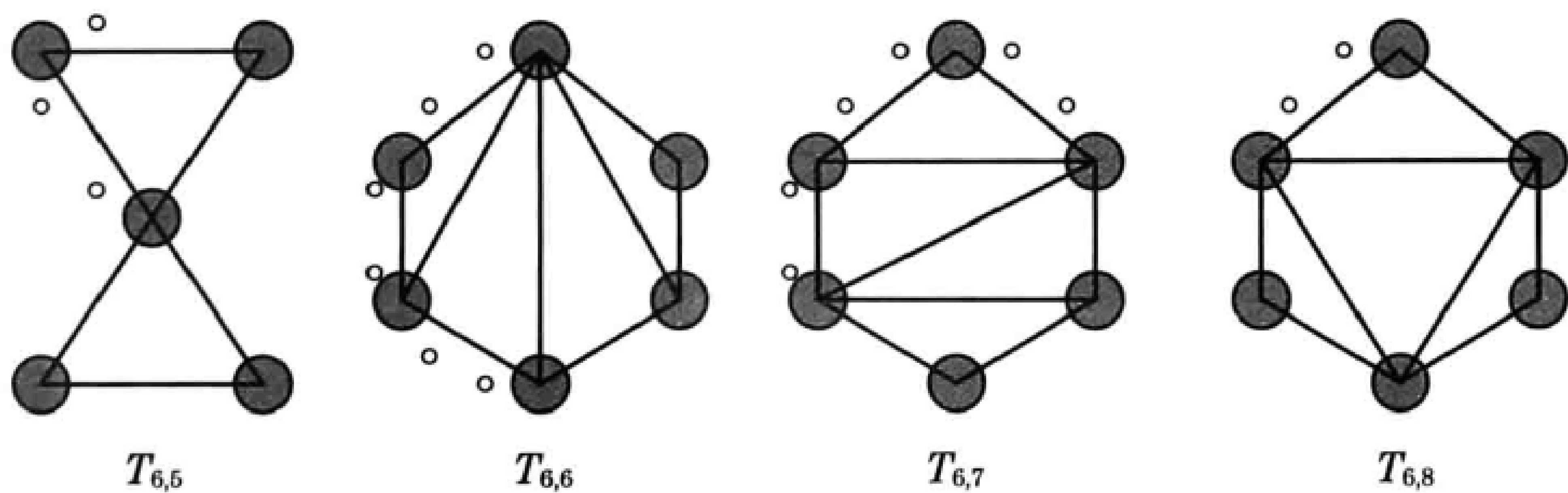


图 3.4.3　根面次为 6 的外平面根三角化的分类 (II)

在图 3.4.1 中, 根面次为 0 的外平面根三角化的同构类为 $T_{0,1}$, 只有节点地图; 根面次为 1 的外平面根三角化的同构类为 0; 根面次为 3 的外平面根三角化的同构类为 $T_{3,1}$, 只有三角形; 根面次为 4 的外平面根三角化的同构类为 $2T_{4,1}+2T_{4,2}$, 共有 4 类; 根面次为 5 的外平面根三角化的同构类为 $5T_{5,1}+5T_{5,2}$, 计 10 类.

从图 3.4.2 和图 3.4.3 可以看出, 根面次为 6 的外平面根三角化的同构类为 $3T_{6,1}+2T_{6,2}+6T_{6,3}+6T_{6,4}+3T_{6,5}+6T_{6,6}+6T_{6,7}+2T_{6,8}$, 共计 34 类.

例 3.4.2　由图 3.4.1~ 图 3.4.3, 也可以看出在外平面根三角化中所含的不可分离外平面根三角化, 从而导出不可分离外平面根三角化在给定内面数的条件下的同构类. 这一任务有待讨论多变量函数方程时完成.

这里, 提供了不可分离外平面根三角化在内面数不超过 4 的同构类:

$$(1T_{3,1})+(2T_{4,2})+(5T_{5,1})+(6T_{6,6}+6T_{6,7}+2T_{6,8}).$$

这就是在不可分离外平面三角化中外面 (即根面) 次与内面数的关系, 其中的 $T_{3,1}$, $T_{4,2}$, $T_{5,1}$ 和 $T_{6,i}(6\leqslant i\leqslant 8)$ 分别为 1,2,3 和 4 个内面的不可分离外平面根三角化.

实际上, 若规定有一个没有内面的不可分离外平面根三角化, 则不可分离外平面根三角化以内面数为参数的计数函数 $f_{\text{notr}}=f_{\text{notr}}(z)$ 是方程

$$\begin{cases} zf^2-f+1=0, \\ f_{z=0}=1 \end{cases} \tag{3.4.9}$$

的唯一无负幂项非负系数无穷级数解. 这又回到了 3.1 节中所讨论的 t_{bint}.

3.5 四角化型

本节讨论方程

$$\begin{cases} zf^3-3zf^2+(3z-1)f+1=0, \\ f|_{z=0}=1. \end{cases} \tag{3.5.1}$$

定理 3.5.1 方程式 (3.5.1) 在 $\mathcal{R}\{z\}$ 中有且仅有一个非负幂、非负整系数无穷级数解.

证明 令 $F_n=\partial_z^n f$, $F_n^{[i]}=\partial_z^n f^i$ $(i=1,\,2)$. 由于 $f|_{z=0}=1$ $(n\geqslant 0)$, 其中, 对于任何整数 $n\geqslant 0$,

$$\begin{cases} F_n^{[2]}=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}F_iF_{n-i}, \\ F_n^{[3]}=\displaystyle\sum_{\substack{i+j+k=n\\0\leqslant i,j,k\leqslant n}}F_iF_jF_k=\sum_{i=0}^{n}F_iF_{n-i}^{[2]}, \end{cases} \tag{3.5.2}$$

故由方程式 (3.5.1), 得如下方程组:

$$\begin{cases} -F_0+1=0 \quad (n=0), \\ F_{n-1}^{[3]}-3F_{n-1}^{[2]}+3F_{n-1}-F_n=0 \quad (n\geqslant 1). \end{cases} \tag{3.5.3}$$

对于式 (3.5.3) 中 $n=0$ 的情况, 由式 (3.5.2), 知

$$-F_0+1=0 \quad \Rightarrow \quad F_0=1.$$

这就是方程的始条件. 从而, $F_0^{[3]}=1$, $F_0^{[2]}=1$.

对于式 (3.5.3) 中 $n=1$ 的情况, 由式 (3.5.2), 以及 $F_0=1$, $F_0^{[3]}=1$, $F_0^{[2]}=1$, 可得

$$F_0^{[3]}-3F_1^{[2]}+3F_0-F_1=0 \quad \Rightarrow \quad 1-F_1=0 \quad \Rightarrow \quad F_1=1.$$

从而, $F_1^{[2]}=2$, $F_1^{[3]}=3$.

由此, 对于任何整数 $n\geqslant 2$, 可以基于式 (3.5.2), 由已经确定的 F_i $(i\leqslant n-1)$, 通过

$$F_{n-1}^{[3]}-3F_{n-1}^{[2]}+3F_{n-1}-F_n=0, \quad 即 \quad F_n=F_{n-1}^{[3]}+F_{n-1}-3F_{n-1}^{[2]}$$

来确定出 F_n.

由这个过程的唯一性, 以及 $F_{n-1}^{[3]}+F_{n-1}\geqslant 3F_{n-1}^{[2]}$ 导致非负整数的保持性, 即得欲证的结论. □

为了求出方程式 (3.5.1) 的那个解, 需要看一看它的结构. 首先, 引进一个参数 ξ, 使得

$$f=1+zg \quad 且 \quad g=\xi. \tag{3.5.4}$$

由方程式 (3.5.1), 得 $z^3g^3-g+1=0$, 即

$$\xi=\frac{1}{1-z^3\xi^2}. \tag{3.5.5}$$

将 ξ 视为变量 t 的函数 $\xi=t\phi(\xi)$, 使得

$$\phi(\xi)=\frac{1}{1-z^3\xi^2}. \tag{3.5.6}$$

由于 $\phi(0)=1\neq 0$, 可用式 (1.5.6) 将 $g=\xi$ 表示为 t 的显函数, 使得对于 $n\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\partial_t^n g &= \frac{1}{n}\partial_\xi^{n-1}\phi^n \quad (\text{用式 (1.4.4) 的第二式中 } c=-1/n \text{ 时的情形})\\
&= \frac{1}{n}\partial_\xi^{n-1}\sum_{s\geqslant 0}\binom{s+n-1}{n-1}(z^3\xi^2)^s \qquad (3.5.7)\\
&= \frac{1}{n}\binom{(n-1)/2+n-1}{n-1}z^{\frac{3(n-1)}{2}}. \qquad (3.5.8)
\end{aligned}$$

当 $t=1$ 时, 这个 $g_{\rm noq}=g|_{t=1}$ 就是方程

$$\begin{cases} z^3g^3-g+1=0, \\ g|_{z=0}=1 \end{cases} \tag{3.5.9}$$

的唯一解. 方程式 (3.5.7) 的适定性直接由方程式 (3.5.1) 的适定性导出. 由式 (3.5.6), 知

$$\begin{aligned} g_{\rm noq}&=1+\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\binom{(n-1)/2+n-1}{n-1}z^{\frac{3(n-1)}{2}} \\ &=1+\sum_{s\geqslant 1}\frac{1}{2s+1}\binom{3s}{2s}z^{3s}. \end{aligned} \tag{3.5.10}$$

定理 3.5.2 方程式 (3.5.1) 的解为

$$f=1+z+\sum_{s\geqslant 1}\frac{1}{2s+1}\binom{3s}{2s}z^{3s+1}. \tag{3.5.11}$$

证明 由式 (3.5.4), 即可得结论. □

虽然方程式 (3.5.7) 也可用 1.4 节中介绍的一般方法求解, 但这里还是采用其他方法, 以便考察它们之间的等价性和各自的特点.

例 3.5.1 不可分离外平面根四角化按非根面边界边 (或称内边) 数的同构分类. 令 q 是以内边数为参数的不可分离外平面根四角化的计数函数. 因为最小的不可分离外平面四角化是一个四边形带一个内面而无内边, 由外平面与不可分离性, 每产生一个内面就得到一个内边和两条边界边, 非根边的数目总是 3 的倍数, 设为 $3s$ $(s\geqslant 1)$. 这时, 总边数 $3s+1=(2(s)+3)+(s)$, 其中 s 是内边. 从而, 内边数为 $s-1$. 因此, 对于 $s\geqslant 0$, 有

$$\partial_z^{3s+4}f=\partial_z^{3s+3}g=\partial_z^s q. \tag{3.5.12}$$

在图 3.5.1 中, 给出了 $\partial_z^s q$ $(0\leqslant s\leqslant 3)$ 个不可分离外平面根四角化的同构分类:

$$(1T_{0,1})+(3T_{1,1})+(8T_{2,1}+4T_{2,2})+(20T_{3,1}+10T_{3,2}+10T_{3,3}+5T_{3,4}+10T_{3,5}).$$

例 3.5.2 植 4–树在给定非悬挂点数条件下的同构类. 在例 3.5.1 的基础上, 植 4–树的外对偶就是不可分离外平面四角化, 由外对偶性, 即可得植 4–树在给定非悬挂点数条件下的同构类.

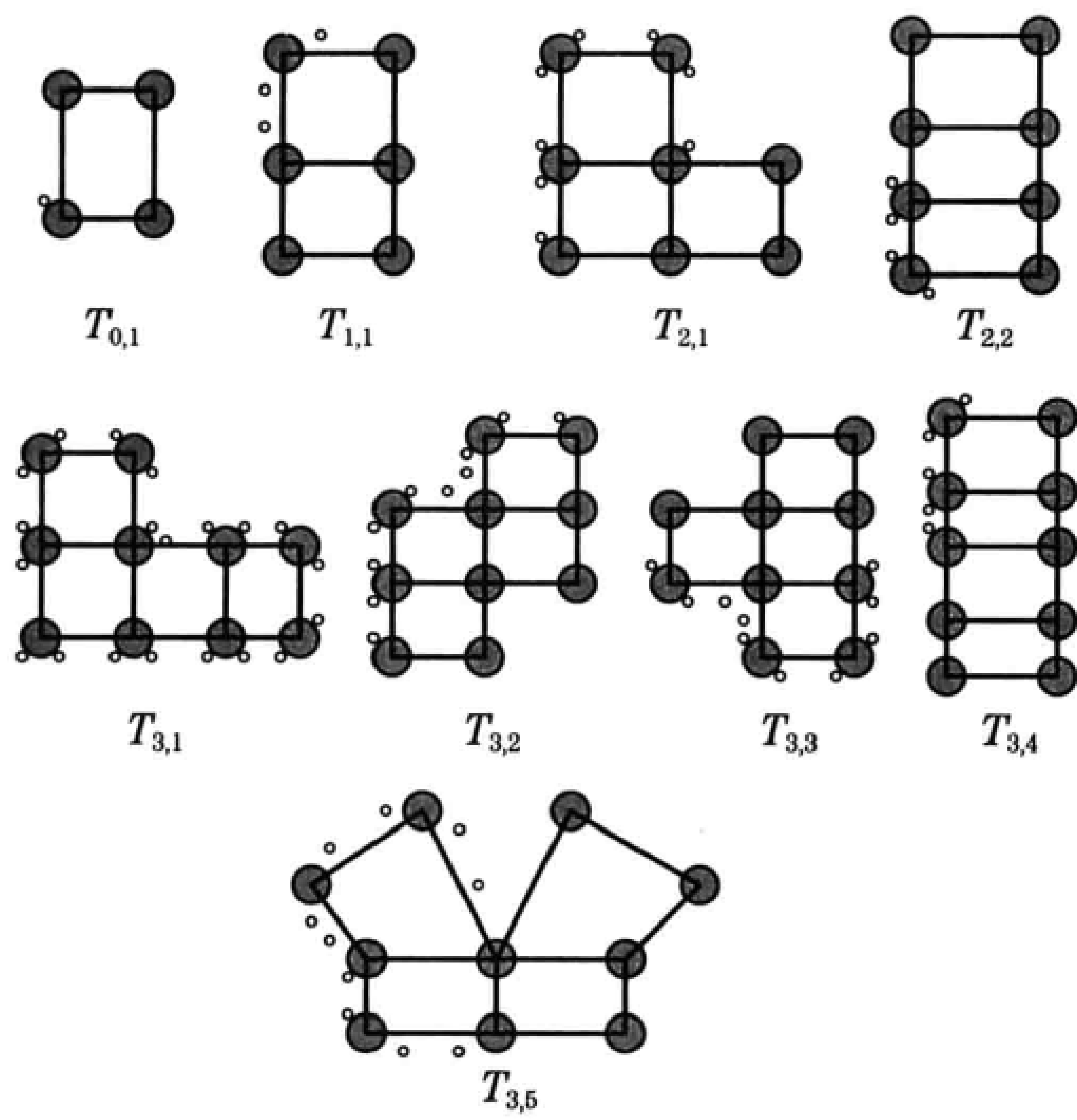


图 3.5.1　不可分离外平面根四角化的分类

3.6 普　通　型

本节讨论方程 ([67], 100 页)

$$\begin{cases} zf^4-(1-z)f^3+(1-3z)f^2+3zf-z=0, \\ f|_{z=0}=1. \end{cases} \tag{3.6.1}$$

这个方程是从最一般的外平面根地图的计数中提炼出来的. 就普遍性而言, 至少应该考虑所有系数都是待定函数自变量的线性形式. 从方法上, 我们还是宁愿从一个具体的典型示例入手, 以便能更清晰地了解一般情况.

由于 $f|_{z=0}=1$, 可以对于 $n\geqslant 0$, 令

$$\begin{cases} \partial_z^n f^i = F_n^{[i]} = \sum_{k=0}^{i} F_k F_{i-k}^{[i-1]} \quad (i\geqslant 2), \\ \partial_z^n f = F_n, \end{cases} \tag{3.6.2}$$

则方程式 (3.6.1) 等价于方程组:

$$\left\{\begin{aligned}
&-F_0^{[3]}+F_0^{[2]}=0\\
&\Rightarrow\quad F_0^{[2]}(-F_0+1)=0\quad\Rightarrow\quad F_0=1,\ F_0^{[i]}=1\ (2\leqslant i\leqslant 4),\\
&F_0^{[4]}-F_1^{[3]}+F_0^{[3]}+F_1^{[2]}-3F_0^{[2]}+3F_0-1=0\\
&\Rightarrow\quad 1-3F_1+1+2F_1-3+3-1=0\quad\Rightarrow\quad -F_1+1=0\\
&\Rightarrow\quad F_1=1,\ F_1^{[2]}=2,\ F_1^{[3]}=3,\ F_1^{[4]}=4,\\
&F_{n-1}^{[4]}-F_n^{[3]}+F_{n-1}^{[3]}+F_n^{[2]}-3F_{n-1}^{[2]}+3F_{n-1}=0\\
&\Rightarrow\quad F_{n-1}^{[4]}-\Big(3F_n+\sum_{k=1}^{n-1}F_kF_{n-k}^{[2]}\Big)+F_{n-1}^{[3]}\\
&\qquad\qquad+\Big(2F_n+\sum_{k=1}^{n-1}F_kF_{n-k}\Big)-3F_{n-1}^{[2]}+3F_{n-1}=0\\
&\Rightarrow\quad F_n=F_{n-1}^{[4]}-\sum_{k=1}^{n-1}F_k(F_{n-k}+F_{n-k}^{[2]})+F_{n-1}^{[3]}\\
&\qquad\qquad+\sum_{k=1}^{n-1}F_kF_{n-k}-3F_{n-1}^{[2]}+3F_{n-1}\\
&\qquad\quad=F_{n-1}^{[4]}+F_{n-1}^{[3]}+3F_{n-1}-\sum_{k=1}^{n-1}F_kF_{n-k}^{[2]}-3F_{n-1}^{[2]}\\
&\qquad\quad(=F_{i;0\leqslant i\leqslant n-1}=F_{\leqslant n-1})\quad(n\geqslant 2).
\end{aligned}\right. \tag{3.6.3}$$

因为 $F_1=1,\ F_1F_{n-1}^{[2]}=F_{n-1}^{[2]}$, 式 (3.6.3) 变为

$$\left\{\begin{aligned}
&F_n=F_{n-1}^{[4]}+F_{n-1}^{[3]}+3F_{n-1}-\sum_{k=2}^{n-1}F_kF_{n-k}^{[2]}-4F_{n-1}^{[2]}\quad(n\geqslant 2),\\
&F_0=F_1=1.
\end{aligned}\right. \tag{3.6.4}$$

定理 3.6.1 在 $\mathcal{R}\{z\}$ 中, 方程式 (3.6.1) 有且仅有一个解.

证明 由方程式 (3.6.1) 与式 (3.6.4) 的等价性且对 $\forall n\geqslant 0,\ F_n\in\mathcal{R}$, 即可得结果. □

例 3.6.1 一般外平面根四角化对给定边数的同构分类. 因为所有内面都是四角形, 故无自环. 又由于外平面性, 故无重边. 自然, 这种四角化都是单的 (多用简单的, 但难度未必简单, 易误解).

在文献 [67](99~100 页) 中, 已经证明方程式 (3.6.1) 的解就是一般外平面根四角化以边数为参数的计数函数 f_{oq}.

用式 (3.6.4), 可以算出方程式 (3.6.1) 的解:

$$f_{\rm oq}(z)=z+2z^2+5z^3+15z^4+48z^5+160z^3+552z^7+1\ 953z^8+\cdots.$$

例如, z^8 的系数为 1 953 意味着带 8 条边的一般外平面根四角化具有 1 953 个同构类. 为了提供带一般性的信息, 这里只讨论这一情形. 因为树都没有有限面外平面, 由式 (3.1.6), 知

$$\partial_z^n t_{\rm root}=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

带 8 条边的根树有

$$\frac{16!}{8!9!}=13\times 11\times 10=1\ 430$$

个同构类. 余下的 $1\ 953-1\ 430=523$ 个中至少有 1 个有限面一般外平面根四角化的同构类, 由图 3.6.1~图 3.6.6 给出. 其中, $Q_{1,i}$ $(1\leqslant i\leqslant 30)$ 是只有一个有限面的一般外平面根四角化, $Q_{2,i}$ $(1\leqslant i\leqslant 3)$ 为有两个有限面的一般外平面根四角化. 空心圆表示定根的方式. 没有空心圆表示在根面边界上所有 {端, 侧} 处都有空心圆.

在图 3.6.1 中, 提供了以下同构类:

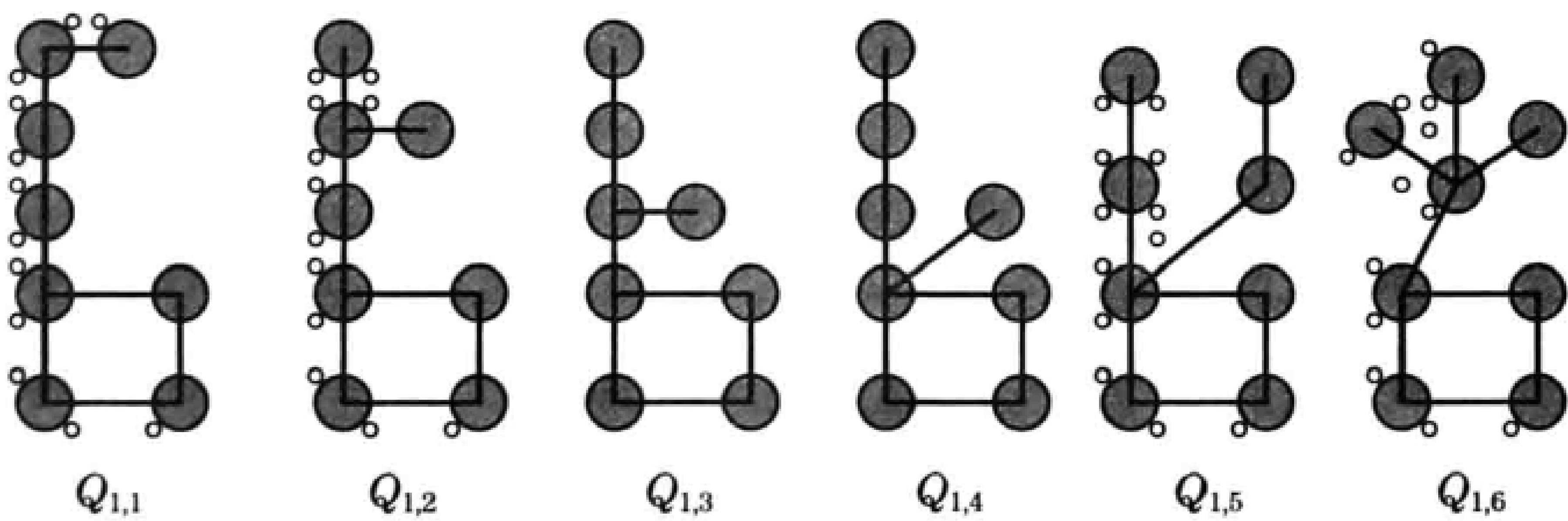


图 3.6.1　一般外平面根四角化的分类: $Q_{1,1}\sim Q_{1,6}$

$$12Q_{1,1}+12Q_{1,2}+24Q_{1,3}+24Q_{1,4}+12Q_{1,5}+12Q_{1,6},$$

计 96 个.

在图 3.6.2 中, 提供了以下同构类:

$$24Q_{1,7}+24Q_{1,8}+12Q_{1,9}+12Q_{1,10}+24Q_{1,11}+12Q_{1,12},$$

计 108 个.

在图 3.6.3 中, 提供了以下同构类:

$$24Q_{1,13}+12Q_{1,14}+24Q_{1,15}+24Q_{1,16}+12Q_{1,17}+6Q_{1,18},$$

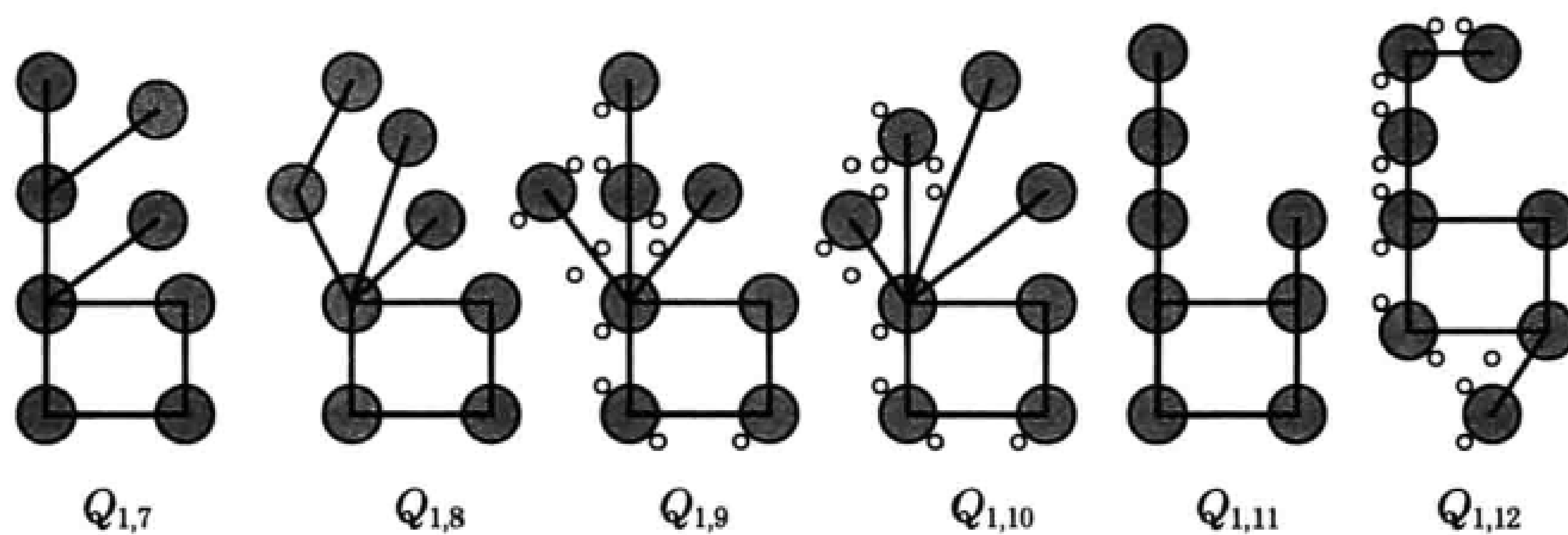


图 3.6.2 一般外平面根四角化的分类: $Q_{1,7} \sim Q_{1,12}$

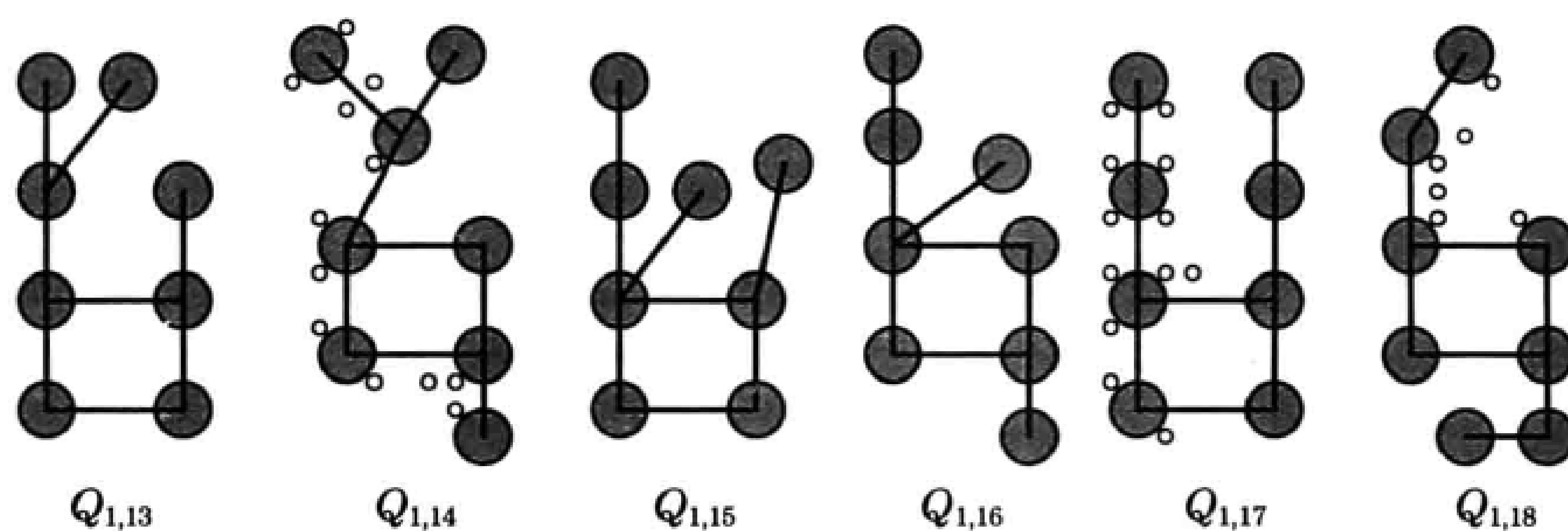


图 3.6.3 一般外平面根四角化的分类: $Q_{1,13} \sim Q_{1,18}$

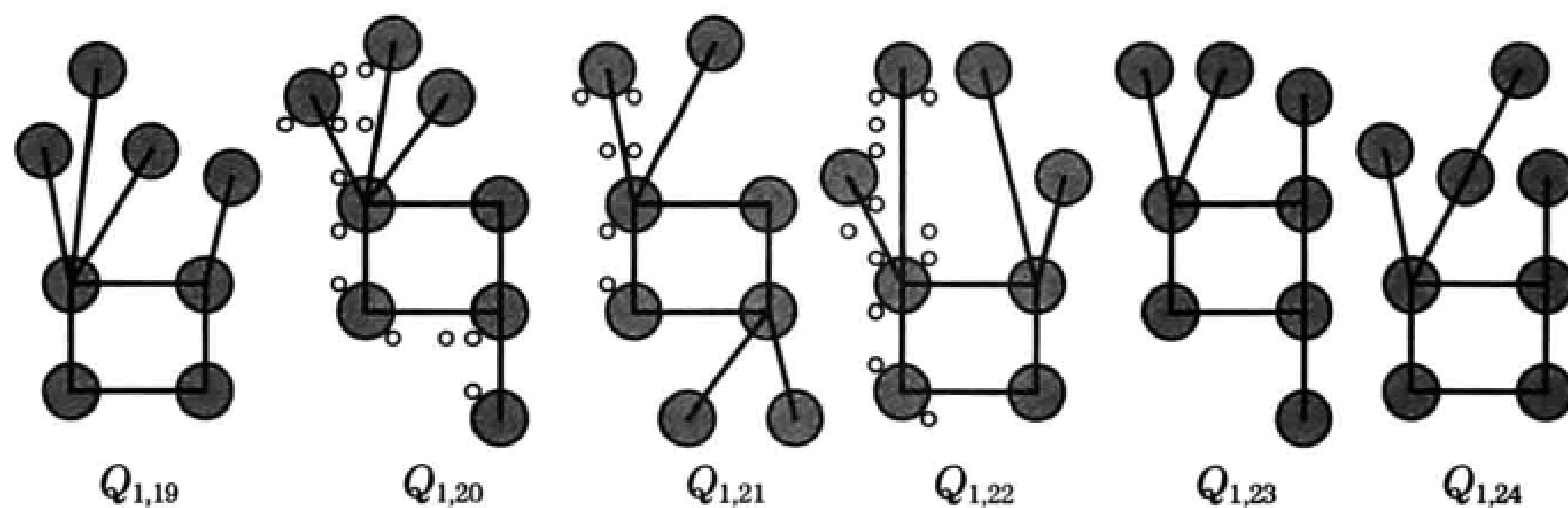


图 3.6.4 一般外平面根四角化的分类: $Q_{1,19} \sim Q_{1,24}$

计 102 个.

在图 3.6.4 中, 提供了以下同构类:

$$24Q_{1,19} + 12Q_{1,20} + 6Q_{1,21} + 12Q_{1,22} + 24Q_{1,23} + 24Q_{1,24},$$

计 102 个.

在图 3.6.5 中, 提供了以下同构类:

$$24Q_{1,25} + 12Q_{1,26} + 24Q_{1,27} + 12Q_{1,28} + 12Q_{1,29} + 3Q_{1,30},$$

计 87 个.

在图 3.6.6 中, 提供了以下同构类:

$$16Q_{2,1}+8Q_{2,2}+4Q_{1,27},$$

计 28 个.

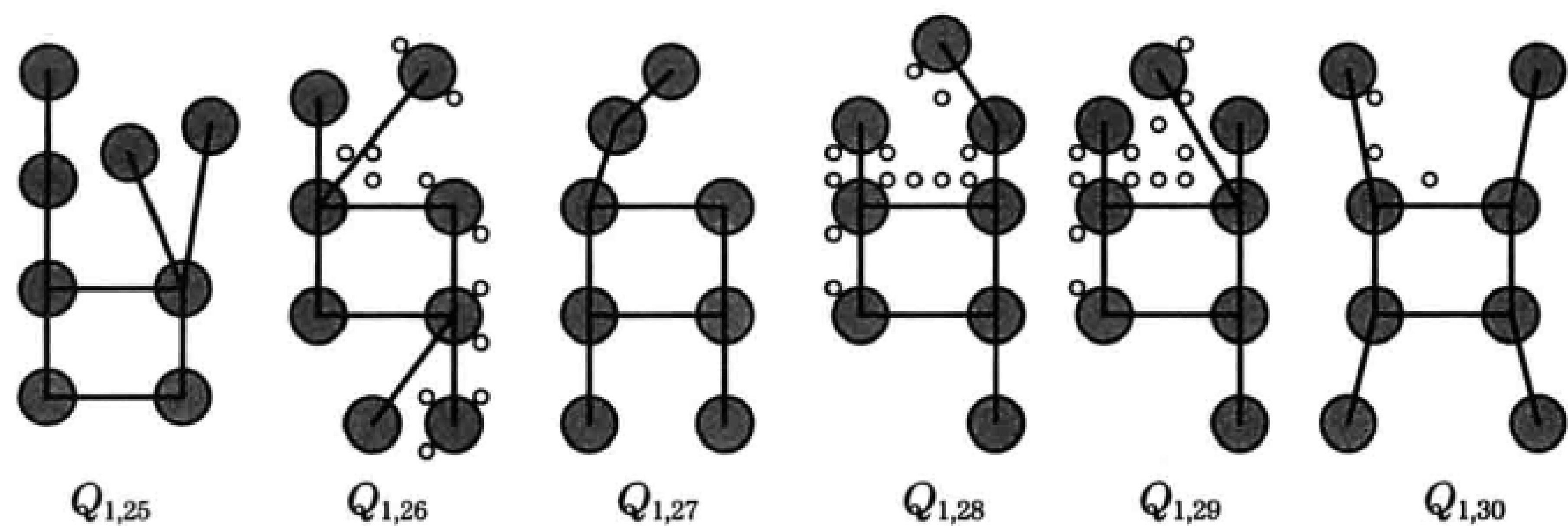


图 3.6.5　一般外平面根四角化的分类: $Q_{1,15}\sim Q_{1,30}$

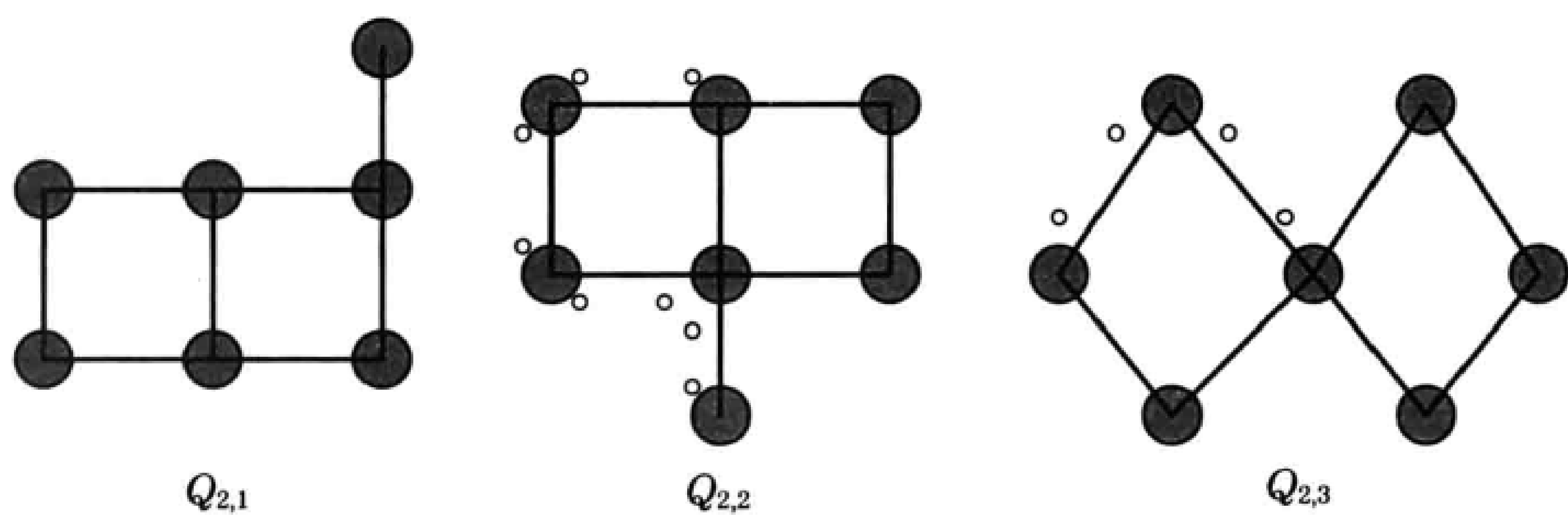


图 3.6.6　一般外平面根四角化的分类: $Q_{2,1}\sim Q_{2,3}$

因为一个有限面一般外平面根四角化有

$$96+108+102+102+87=495$$

个同构类, 两个有限面一般外平面根四角化有 28 个同构类, 至少有一个有限面一般外平面根四角化共有 523(= 28 + 495) 个同构类. 再考虑到无有限面一般外平面根四角化的 1 430 个同构类, 即得 1 953(= 1 430 + 523) 个同构类.

3.7　注　　记

1. 从例 3.2.1 和例 3.2.2 中可以看出, 对于给定的度, 植树与蕾瓣丛具有相同的同构类数. 是否可以构造出它们同构类之间的一个双射 (即一一对应)? 事实上,

这个双射就是它们作为地图的平面对偶.

2. 同样, 从例 3.2.2 和例 3.2.3 中可以看出, 对于给定的度, 植树与不可分离外平面根地图具有相同的同构类数. 是否也可以构造出它们同构类之间的一个一一对应? 因为在文献中尚没有见到有关描述, 在这里只能提供一个这样的对应.

对于任何一个不可分离外平面根地图 (注意: 只有一条非环边 (称为杆) 组成的单边地图, 称为杆地图, 视为退化情形), 在根面 (即无限面) 内每条边界边的一侧和每个有限面内, 都引进一个节点. 两个节点之间连一条边, 当且仅当这两个节点所在的面相邻. 如此得到的新地图称为原地图的一个外对偶. 其中, 二者的根边相应. 可以证明, 这个新地图是一个根树.

反之, 对于任一植树面边界上每一个连接两个相继悬挂点的边侧端, 引进一个新节点, 两个节点连一条边, 当且仅当相应两个边侧端有一对边侧合成这个植树的一条边. 也可证明, 所得的新地图是一个不可分离外平面地图 (注意: 杆地图含在其中).

由此可见, 外对偶就是植树与不可分离外平面根地图间的一个一一对应. 完全形式地严格证明, 不难通过文献 [57], 或更详尽的 [74] 中提供的地图理论实现.

3. 用平面对偶性和外对偶性可分别解决文献 [37] 中的问题 5.1 和问题 5.2.

4. 在 3.4 节中, 若将 $f = zg$ 代入方程式 (3.4.1), 即得

$$\begin{cases} z^3g^3 + (1-z)g^2 + (z-2)g + 1 = 0, \\ g|_{z=0} = 1 \end{cases} \tag{3.7.1}$$

就是文献[36] 中关于 Φ 的方程式 (11.4) . 虽然那里已经提供了 Φ 的一个显式, 但十分复杂. 在例 3.4.1 中的 g_{ot} 就是这个 g. 但这里通过直接解方程式 (3.4.1), 而得到了一个正项和的显式. 回答了文献 [36] 中的问题 11.1. 虽然与文献 [10] 中的等价, 但推导过程消除了那里的冗余步骤.

5. 如果通过判别式解方程式 (3.3.13), 首先需要确定根号前的符号为负, 然后通过式 (1.4.4) 中 $c=2$ 的情形求解. 因为所得结果应与式 (3.3.14) 一致, 故对于 $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{n}\partial_\eta^{n-1}\Big(\frac{1}{1-\eta}\Big)^n = \frac{-1}{2}\partial_z^n(\sqrt{1-4z}). \tag{3.7.2}$$

第 4 章　多元函数方程

4.1　消减变量

在文献 [17] 中, 讨论了方程

$$\begin{cases} xy^2f^2+(x-1)f+x-1=0, \\ f|_{x=0,y=0}=1. \end{cases} \tag{4.1.1}$$

虽然这个方程带有两个变量, 但只要注意到, 若令

$$z=\frac{xy^2}{1-x}, \tag{4.1.2}$$

则方程式 (4.1.1) 变为

$$\begin{cases} zf^2-f-1=0, \\ f|_{z=0}=1, \end{cases} \tag{4.1.3}$$

这是一个单变量方程, 即首变型方程式 (3.1.1) 中 $a=b=c=d=1$ 的情形.

定理 4.1.1　方程式 (4.1.1) 在 $\mathcal{R}\{x,y\}$ 中有且仅有一个所有系数为非负整数的解.

证明　由于 $z\in\mathcal{R}\{x,y\}$, 从方程 (4.1.3) 的适定性即可导出方程式 (4.1.1) 的适定性. □

由式 (3.1.6), 知

$$\partial_z^l f=C_n=\frac{(2l)!}{l!(l+1)!}.$$

由式 (1.4.4) (当 $c=l$ 时), 知

$$\partial_x^s z^l = y^{2l}\binom{s-1}{l-1} = y^{2l}\frac{(s-1)!}{(l-1)!(s-l)!}.$$

从而可得

$$\partial_{(x,y)}^{(m,n)} f = \begin{cases} 1, & m=n=0, \\ \dfrac{(2k)!(m-1)!}{k!(k+1)!(k-1)!(m-k)!}, & n=2k \text{ 且 } m \geqslant k \geqslant 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{4.1.4}$$

由此确定的 f 就是方程式 (4.1.1) 的解.

上面所显示的是使用变量代替的方法以减少方程中的变量. 可通过固定方程中某变量的一个特选数值, 导出变量减少一个的方程, 或者先考虑未定函数关于一个变量的级数中某个选定项的系数. 下面仅以前者为例.

在文献 [10] 中, 有方程

$$\begin{cases} \dfrac{xyf}{x-f} - (1+y)f + x^2y = 0, \\ f|_{x=0,y=0} = 0. \end{cases} \tag{4.1.5}$$

定理 4.1.2 方程式 (4.1.5) 在 $\mathcal{R}\{x,y\}$ 中有且仅有一个所有系数为非负整数的解.

证明 因为方程式 (4.1.5) 在 $\mathcal{R}\{x,y\}$ 中与方程

$$\begin{cases} (x+y)f^2 - x(1+xy)f + x^3y = 0, \\ f|_{x=0,y=0} = 0 \end{cases} \tag{4.1.6}$$

等价, 为便于演算而采用上面的形式.

因为 f 是两个变量的函数, 故对于任何整数 $n \geqslant 0$, 令

$$\partial_z^n f = F_{\star,n}, \quad \partial_z^n f^2 = F_{\star,n}^{[2]},$$

其中 $F_{\star,n}$ 和 $F_{\star,n}^{[2]}$ 都是 x 的函数, 且

$$F_{\star,n}^{[2]} = \sum_{i=0}^{n} F_{\star,i}F_{\star,n-i}.$$

由方程式 (4.1.6), 对于常数项 (y^0), 有

$$\begin{aligned} xF_{\star,0}^{[2]} - xF_{\star,0} = 0 \quad &\Rightarrow \quad xF_{\star,0}^2 - xF_{\star,0} = 0 \\ &\Rightarrow \quad xF_{\star,0}(F_{\star,0}-1) = 0 \\ &\Rightarrow \quad F_{\star,0} = 0, 1(\text{舍去}). \end{aligned}$$

对于 1 次项 (y^1), 有

$$\begin{aligned}&xF_{\star,1}^{[2]}+F_{\star,0}^{[2]}-xF_{\star,1}-x^2F_{\star,0}+x^3=0\quad (F_{\star,0}=0)\\ \Rightarrow\quad &-xF_{\star,1}+x^3=0\quad\Rightarrow\quad F_{\star,1}=x^2.\end{aligned}$$

对于 $n\ (n\geqslant 2)$ 次项 (y^n), 有

$$\begin{aligned}&xF_{\star,n}^{[2]}+F_{\star,n-1}^{[2]}-xF_{\star,n}-x^2F_{\star,n-1}=0\quad (F_{\star,0}=0)\\ \Rightarrow\quad &\sum_{i=1}^{n-1}F_{\star,i}(F_{\star,n-i}+F_{\star,n-1-i})-xF_{\star,n}-x^2F_{\star,n-1}=0\\ \Rightarrow\quad &xF_{\star,n}=\sum_{i=1}^{n-1}F_{\star,i}(F_{\star,n-i}+F_{\star,n-1-i})-x^2F_{\star,n-1}.\end{aligned}$$

从而, 得到

$$F_{\star,n}=\begin{cases}0, & n=0,\\ x^2, & n=1,\\ \dfrac{1}{x}\Big(\sum\limits_{i=1}^{n-1}F_{\star,i}(F_{\star,n-i}+F_{\star,n-1-i})-x^2F_{\star,n-1}\Big), & n\geqslant 2.\end{cases}\tag{4.1.7}$$

由归纳假设, $F_{\star,i}\ (1\leqslant i\leqslant n-1)$ 带因子 x^2, 并且全是 $\mathcal{R}\{x\}$ 中带有非负正系数的多项式. 因为

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n-1}F_{\star,i}(F_{\star,n-i}+F_{\star,n-1-i})-x^2F_{\star,n-1}\quad (F_{\star,1}=x^2)\\ &\qquad=\sum_{i=2}^{n-1}F_{\star,i}(F_{\star,n-i}+F_{\star,n-1-i})+x^2F_{\star,n-2},\end{aligned}\tag{4.1.8}$$

$F_{\star,n}\ (n\geqslant 2)$ 也带因子 x^2, 并且是 $\mathcal{R}\{x\}$ 中带有非负正系数的多项式. 这就证明了方程式 (4.1.5) 在 $\mathcal{R}\{x,y\}$ 中有一个非负正系数的解.

此类解的唯一性可由式 (4.1.8) 的确定性直接导出. □

在方程式 (4.1.6) 中, 取 $x=1$. 令 $h=f|_{x=1}$. 自然有 $h|_{y=0}=f|_{x=0,y=0}$. 两变量方程式 (4.1.6) 变为单变量方程

$$\begin{cases}(1+y)h^2-(1+y)h+y=0,\\ h|_{y=0}=0.\end{cases}\tag{4.1.9}$$

这就是全变型方程式 (3.3.1) 中 $a=b=c=1,d=0$ 时的特殊情形, 即式 (3.3.14). 它的解已由式 (3.3.11) 确定. 但注意, 这里式 (3.3.11) 的 $\tilde{A}$ 中, $a=b=c=1$.

虽然以 x, y 为变量的方程式 (4.1.5) 的解, 可以通过直接解二次方程的方法, 利用式 (1.4.4) 得到, 但由于导出的显式复杂, 需要作一系列的简化.

如果通过适当的变换, 借助 Lagrange 反演, 就可以省去解的简化过程. 令

$$\xi=\frac{xyf}{x-f}, \tag{4.1.10}$$

则

$$f=\frac{x\xi}{xy+\xi}, \quad x=\frac{\xi^2}{(xy)^2-(1-xy)\xi}.$$

再令 $\phi=xy+\xi$, 则

$$x=\frac{\xi^2}{(\phi)\phi-\xi}, \quad xy=\phi-\xi, \quad f=\frac{x\xi}{\phi}. \tag{4.1.11}$$

最后, 引进参数 ψ 和 η, 使得

$$\eta=(xy)(1+\psi), \quad \psi=y\frac{1}{1-\eta}, \quad \frac{f}{x}=\frac{1}{1+\psi}, \tag{4.1.12}$$

利用定理 1.5.2 (Lagrange 反演), 有

$$\partial_{(x,y)}^{(m,n)}=\begin{cases}1, & m=2\ n=1,\\ \dfrac{1}{n}\dbinom{n}{m-1}\dbinom{m-3}{n-m}, & m\geqslant 3,\ 2m-3\geqslant n\geqslant m.\end{cases} \tag{4.1.13}$$

这就提供了方程式 (4.1.5) 的解的一个无和显式.

在方程式 (4.1.5) 中, 取 $x=1$, 即得方程式 (4.1.9). 由式 (4.1.13), 得

$$\partial_y^n h=\begin{cases}1, & n=1,\\ 0, & n=2,\\ \displaystyle\sum_{m=3,}^{n}\frac{1}{n}\binom{n}{m-1}\binom{m-3}{n-m}, & 3\leqslant n\leqslant 9,\\ \displaystyle\sum_{m=\lceil (n-3)/2\rceil}^{n}\frac{1}{n}\binom{n}{m-1}\binom{m-3}{n-m}, & n\geqslant 10\end{cases} \tag{4.1.14}$$

所确定的解. 这是一个有限正项和的形式.

若在方程式 (4.1.5) 中引进

$$g=\frac{f-x^2y}{x}, \quad 即 \quad f=xg+x^2y, \tag{4.1.15}$$

则有

$$xg=\frac{(xy)g+(xy)^2}{1-z-g}-(xy)g-(xy)^2.$$

再引进

$$z = xy, \tag{4.1.16}$$

可将上式简化成

$$xg = \frac{zg + z^2}{1 - z - g} - zg - z^2.$$

下面讨论方程

$$\begin{cases} (x+z)g^2 - (x - xz - 2z^2)g + z^3 = 0, \\ g|_{x=0,z=0} = 0. \end{cases} \tag{4.1.17}$$

定理 4.1.3 方程式 (4.1.17) 在 $\mathcal{R}\{x,z\}$ 中有且仅有一个解.

证明 对 $\forall n \geqslant 0$, 记 $\partial_z^n g = G_{\star,n}$, $\partial_z^n g^2 = G_{\star,n}^{[2]}$. 由方程式 (4.1.12), 可得

$$xG_{\star,n} = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant n \leqslant 2, \\ 1, & n = 3, \\ xG_{\star,n}^{[2]} + G_{\star,n-1}^{[2]} + xG_{\star,n-1} + 2G_{\star,n-2}, & n \geqslant 4. \end{cases}$$

由方程的始条件, 即 $G_{\star,0} = 0$, 以及 $G_{\star,n}^{[2]}$ 与 $G_{\star,i}$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$, 的关系, 还可将上式简化为

$$xG_{\star,n} = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant n \leqslant 2, \\ 1, & n = 3, \\ xG_{\star,n}^{[2]} + G_{\star,n-1}^{[2]} + xG_{\star,n-1} + 2G_{\star,n-2}, & n \geqslant 4. \end{cases} \tag{4.1.18}$$

由此即可导出欲证的结论. □

从上面的证明中还可以看出, 所有 $G_{\star,n} \in \mathcal{R}\{x\} \subseteq \mathcal{R}\{x,z\}$, 而且都是 x 的非负整系数的多项式.

类似地, 也可得到两变量函数 $g(x,z)$ 的无和显式, 以及当 $x = 1$ 时, 函数 $g(1,z)$ 的有限正项和的显式.

4.2 一次形式

考虑方程

$$\begin{cases} f = x^2y + \dfrac{xy}{1-xy}\Big(\dfrac{x}{1-x}h - \dfrac{1}{1-x}f\Big), \\ f|_{x=0,y=0} = 0, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

其中 $h = f(1, y)$.

为了便于利用, 将上面的方程变换为

$$\Big(1 + \frac{xy}{(1-xy)(1-x)}\Big)f = x^2y + \frac{x^2y}{(1-xy)(1-x)}h. \tag{4.2.2}$$

定理 4.2.1 方程式 (4.2.1) 在 $\mathcal{R}\{x, y\}$ 中有且仅有一个解.

证明 对 $\forall n \geqslant 0$, 令

$$\partial_y^n h = H_n, \quad \partial_y^n f = F_{\star,n},$$

其中

$$F_{\star,n} = \sum_{m\geqslant 0} F_{m,n}x^m, \quad F_{m,n} = \partial_{(x,y)}^{(m,n)} f, \quad H_n = F_{\star,n}|_{x=1}.$$

将式 (4.2.2) 整理为

$$(1-x)f = (1-x)x^2y - (x-x^2)x^2y^2 + x^2y(h-f).$$

从而可得

$$\begin{aligned} y^0: \ & (1-x)F_{\star,0} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\star,0} = 0 \ \ H_0 = 0, \\ y^1: \ & (1-x)F_{\star,1} = (1-x)x^2 + x^2(H_0 - F_{\star,0}) \\ & \Rightarrow \quad (1-x)F_{\star,1} = (1-x)x^2 \\ & \Rightarrow \quad F_{\star,1} = x^2, H_1 = 1, \\ y^2: \ & (1-x)F_{\star,2} = -(x-x^2)x^2 + x^2(H_1 - F_{\star,1}) \\ & \Rightarrow \quad (1-x)F_{\star,2} = -(1-x)x^3 + x^2(1-x^2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad F_{\star,2} = x^2, H_1 = 1,$$

对 $\forall n \geqslant 3$,

$$y^n: \ (1-x)F_{\star,n} = x^2(H_{n-1} - F_{\star,n-1}).$$

可以归纳地假设 $F_{\star,n-1}$ 为 x 的一个至多 $n-1$ 次的非负整系数多项式, 且正系数项的最小次为 2. 由

$$\begin{aligned} H_{n-1} - F_{\star,n-1} &= \sum_{i=2}^{n-1} F_{i,n-1} - \sum_{i=2}^{n-1} F_{i,n-1}x^i = \sum_{i=2}^{n-1} F_{i,n-1}(1-x^i) \\ &= (1-x)\sum_{i=2}^{n-1} F_{i,n-1}\left(\sum_{j=0}^{i-1} x^j\right), \end{aligned}$$

有

$$F_{\star,n} = x^2 \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=j+1}^{n-1} F_{i,n-1}\right) x^j. \tag{4.2.3}$$

由归纳假设知 $F_{\star,n}$ 是 x 的一个至多 $n-2+2=n$ 次的非负整系数多项式, 且正系数项的最小次为 2. 从而, 方程式 (4.2.1) 在 $\mathcal{R}\{x,y\}$ 中有一个解.

由确定 $F_{\star,n}$ 过程的唯一性, 这个解是仅有的. □

虽然这是一个关于 f 的一次方程, 但其还带有另一个未知函数 h, 又不允许将方程限制在 $x=1$, 引起了麻烦, 不能直接求解. 为此, 要看一看是否可以先将 h 求出来. 如果能将 h 和 y 都用同一个参数表示, 然后再将这个参数消去, 则可导出 h 和 y 的关系, 从而确定 h.

因为方程式 (4.2.1) 与式 (4.2.2) 等价, 可以通过方程组 (称为特征方程)

$$\begin{cases} 1 + \dfrac{\xi y}{(1-\xi y)(1-\xi)} = 0, \\ \xi^2 y + \dfrac{\xi^2 y}{(1-\xi y)(1-\xi)} h = 0, \end{cases} \tag{4.2.4}$$

将 h 和 y 都用 $\xi = x$ 表示出来.

先从式 (4.2.4) 中的第一个方程求得 y 和 ξ 的关系, 然后再从第二个方程导出 h 和 ξ 的关系, 即

$$\begin{cases} y = \dfrac{\xi - 1}{\xi^2}, \\ h = \dfrac{\xi - 1}{\xi}. \end{cases} \tag{4.2.5}$$

为了计算方便, 令 $\psi=\xi-1$, 则得

$$\begin{cases} \psi=y(1+\psi)^2, \\ h=\dfrac{\psi}{1+\psi}=y(1+\psi). \end{cases} \tag{4.2.6}$$

由定理 1.5.1 和方程式 (4.2.1) 的始条件, 可得

$$\partial_y^n h=\begin{cases} 0, & n=0, \\ \dfrac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}, & n\geqslant 1. \end{cases} \tag{4.2.7}$$

定理 4.2.2 方程式 (4.2.1) 的解由

$$\partial_y^n f=\begin{cases} x^2, & n=1, \\ \displaystyle\sum_{m=2}^{n}\frac{m-1}{n-1}\binom{2n-m-2}{n-2}x^m, & n\geqslant 2 \end{cases} \tag{4.2.8}$$

确定.

证明 若引进参数 λ 使得 $x=\lambda(1+\psi)$, 由式 (4.2.6), 就有

$$\begin{cases} \lambda=x\Big(\dfrac{1}{1+\psi}\Big), \\ \psi=y(1+\psi)^2. \end{cases} \tag{4.2.9}$$

因为

$$f=x^2y\Big(1+\frac{h-xy}{1-x+x^2y}\Big), \quad \frac{h-xy}{1-x+x^2y}=\frac{1+\psi}{1-\lambda\psi},$$

所以可在式 (4.2.8) 的基础上, 利用定理 1.5.2, 求得

$$\partial_{(x,y)}^{(m-2,n-1)}\Big(\frac{h-xy}{1-x+x^2y}\Big)=\frac{(m-1)(2n-m-2)!}{(n-m)!(n-1)!}.$$

从而, 定理得证. □

推论 4.2.1 对于任何整数 $n\geqslant 2$, 有组合恒等式

$$\sum_{m=0}^{n-2}\frac{m+1}{n-1}\binom{2n-m-4}{n-2}=\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}. \tag{4.2.10}$$

证明 因为 $\partial_y^n h=\partial_y^n f|_{x=1}$, 所以由式 (4.2.7) 和式 (4.2.8), 即可得欲证的结论. □

例 4.2.1　带限制的外平面根地图按边数的根点次的同构分类. 一个外平面地图称为带限制的, 是指根环内无自环, 而且收缩根边后也不出现这种情况. 考虑方程

$$\begin{cases} f = 1 + x^2yf + \dfrac{xy}{1-x}(h - xf), \\ f|_{x=0,y=0} = 1, \end{cases} \tag{4.2.11}$$

其中 $h = f|_{x=1}$.

或等价地, 考虑标准形式

$$\left(1 - x^2y + \frac{x}{1-x}\right) f = 1 + xy\frac{h}{1-x}, \tag{4.2.12}$$

或展开形式

$$(1 - x + x^3y)f = 1 - x + xyh. \tag{4.2.13}$$

定理 4.2.3　方程式 (4.2.3) 在 $\mathcal{R}\{x,y\}$ 中有且仅有一个解.

证明　利用式 (4.2.13), 与定理 4.2.1 的证明相仿, 方程式 (4.2.3) 的解由

$$F_{\star,n} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ \sum_{m\geqslant 1} F_{m,n-1} \sum_{i=0}^{m+1} x^{i+1}, & n \geqslant 1 \end{cases} \tag{4.2.14}$$

确定. 因为所有 $F_{\star,n} \in \mathcal{R}\{x\}$, 所以 $f \in \mathcal{R}\{x,y\}$, 并且 $F_{\star,n}$ 是 x 的常数项为 0 的正整系数的 $2n$ 次多项式.

由用式 (4.2.14) 求 f 的唯一性, 可知这个 f 是方程式 (4.2.3) 仅有的一个解. □

由于

$$\sum_{m\geqslant 1} F_{m,n-1} \sum_{i=0}^{m+1} x^{i+1} = \sum_{m=1}^{3} \Bigg(\sum_{j=1}^{2(n-1)} F_{j,n-1} \Bigg) x^m + \sum_{m=4}^{2n} \Bigg(\sum_{j=m-2}^{2(n-1)} F_{j,n-1} \Bigg) x^m,$$

由式 (4.2.14), 可得

$$F_{m,n} = \begin{cases} 0, & m = 0, \\ \sum_{j=1}^{2(n-1)} F_{j,n-1}, & 1 \leqslant m \leqslant 3, \\ \sum_{j=m-2}^{2(n-1)} F_{j,n-1}, & 4 \leqslant m \leqslant 2n, \\ 0, & m \geqslant 2n+1. \end{cases} \tag{4.2.15}$$

用式 (4.2.15), 对于 $n=1,2,3$, 可得到

$$\begin{aligned} &F_{\star,1}=x+x^2, \quad F_{\star,2}=2x+2x^2+2x^3+x^4, \\ &F_{\star,3}=7x+7x^2+7x^3+5x^4+3x^5+x^6. \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

在此基础上, 图 4.2.1~ 图 4.2.6 显示了边数为 3 及 3 以下的带限制外平面根地图的同构分类. 在这些图中, $T_{m,n(i)}$ 是指边数为 n、根点次为 m 的带限制外平面根地图中的第 i 个地图. 在表示这个地图的图形中, 小空心圆提供不同构的定根方式.



图 4.2.1 边数为 1、根点次为 $1\sim 2$ 的带限制外平面根地图的分类

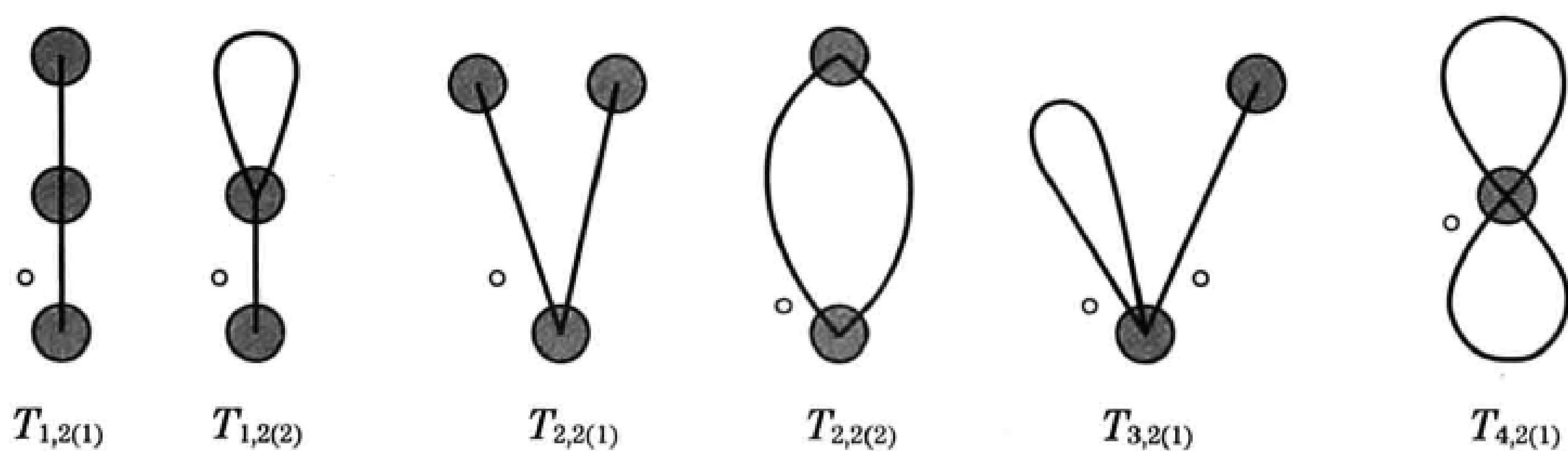


图 4.2.2 边数为 2、根点次为 $1\sim 4$ 的带限制外平面根地图的分类

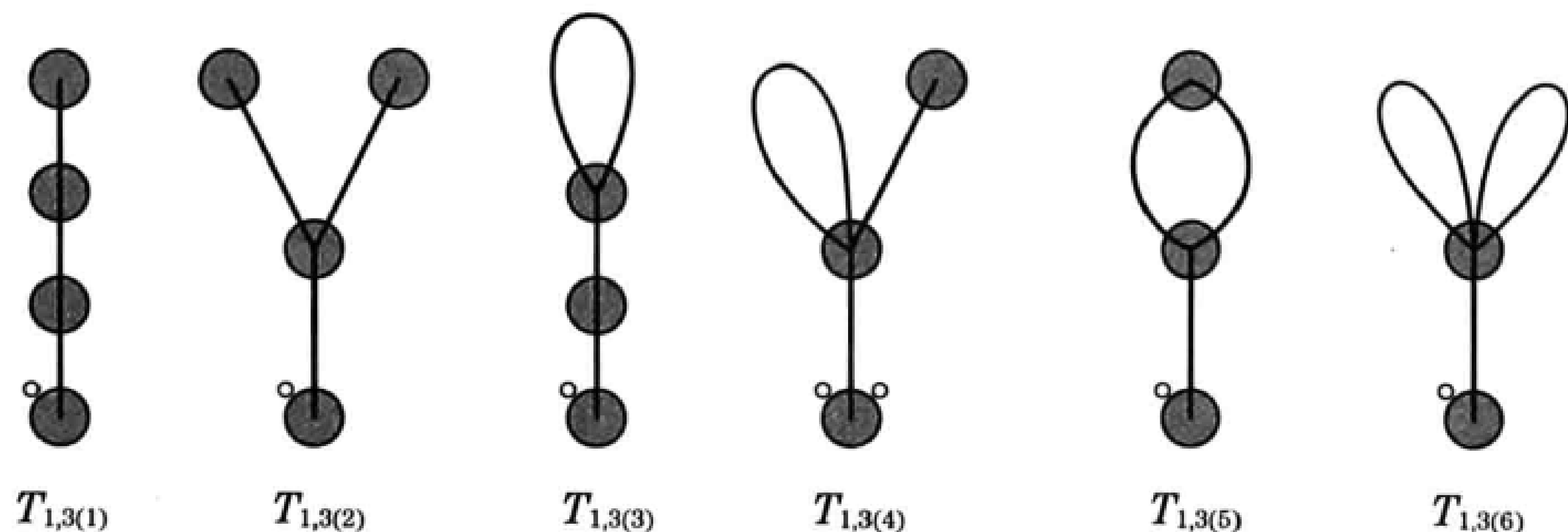


图 4.2.3 边数为 3、根点次为 1 的带限制外平面根地图的分类

从式 (4.2.16) 可以看出, 一条边的带限制外平面地图的根点次只能为 1 或 2, 并且 $(F_{1,1},F_{2,1})=(1,1)$. 图 4.2.1 显示了这两个同构类, 即

$$F_{1,1}=1 \quad \Rightarrow \quad 1T_{1,1(1)}, \quad F_{2,1}=1 \quad \Rightarrow \quad 1T_{2,1(1)}.$$

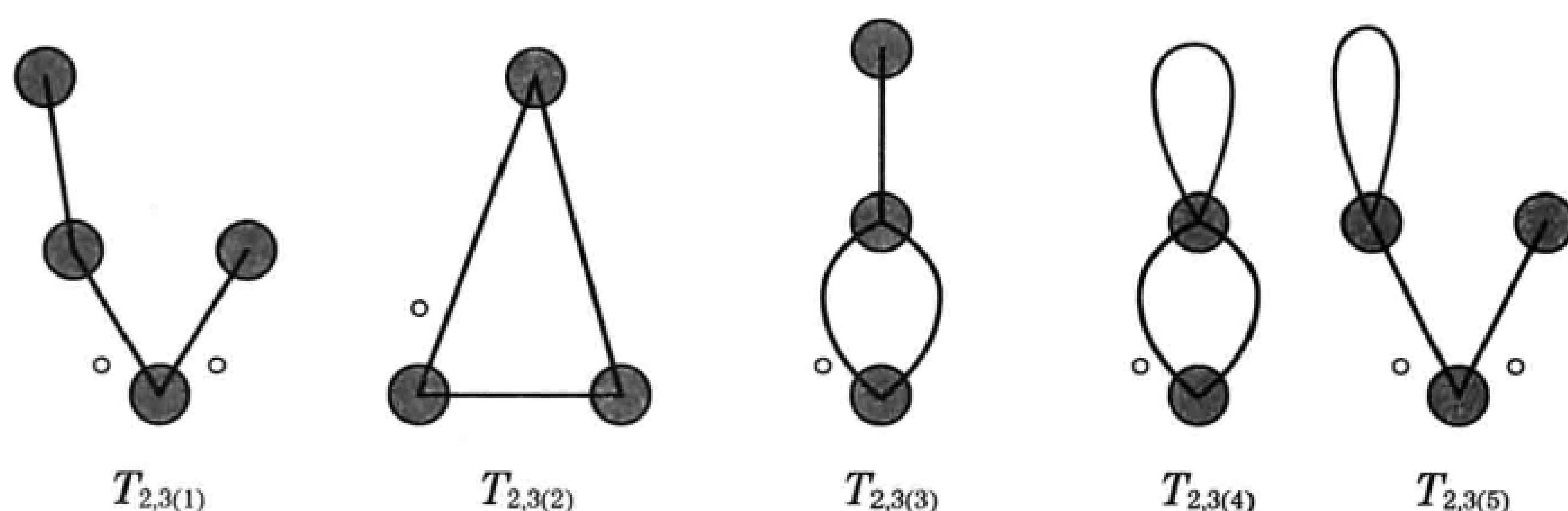


图 4.2.4　边数为 3、根点次为 2 的带限制外平面根地图的分类

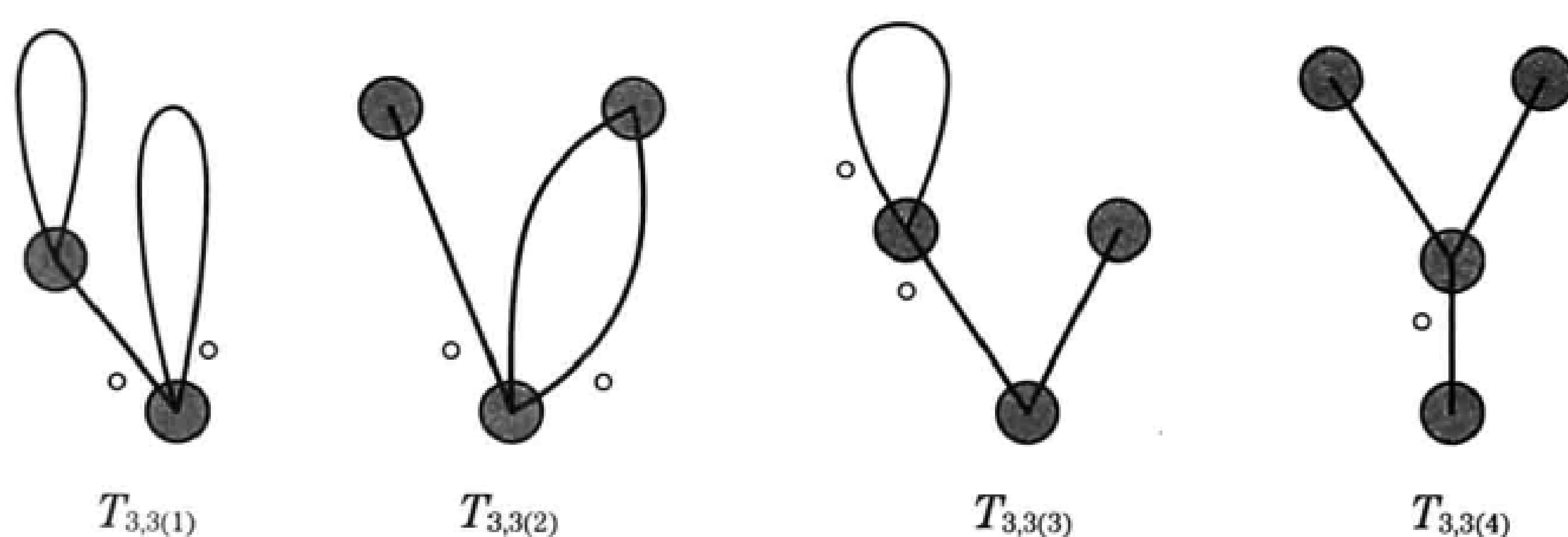


图 4.2.5　边数为 3、根点次为 3 的带限制外平面根地图的分类

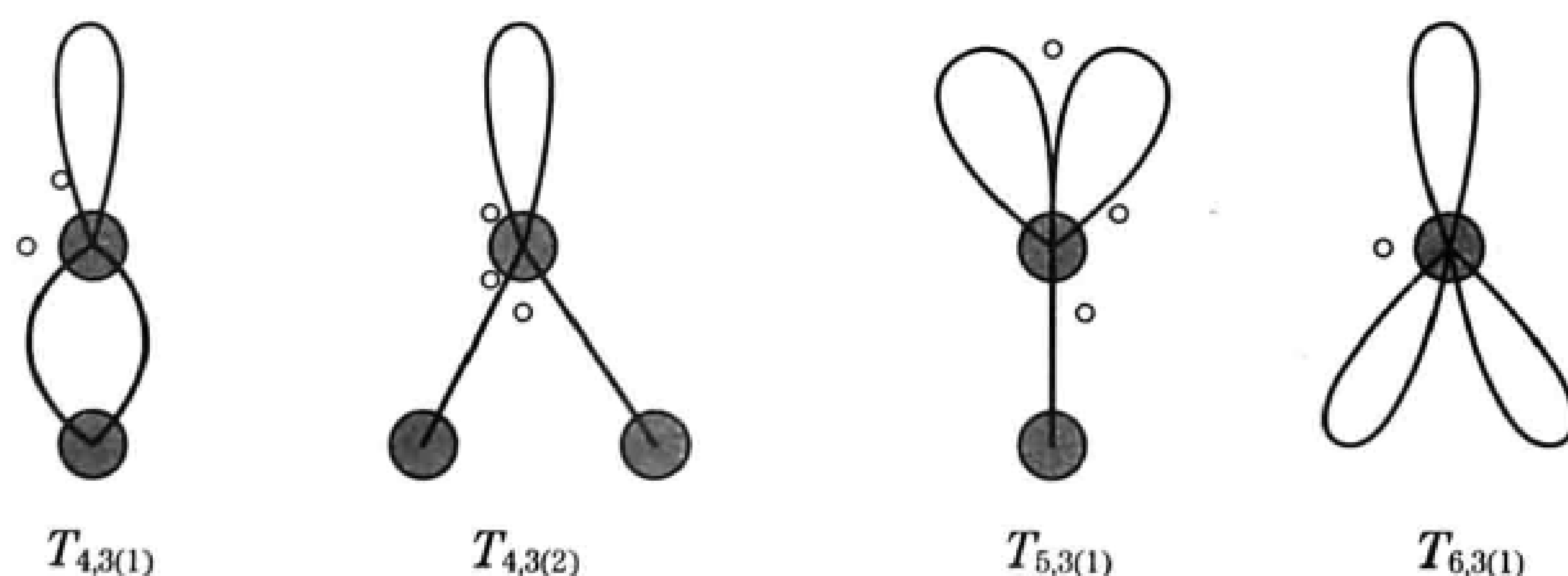


图 4.2.6　边数为 1、根点次为 $4\sim 6$ 的带限制外平面根地图的分类

从式 (4.2.16) 可以看出, 两条边的带限制外平面地图的根点次 m 只能为 $1\sim 4$, 并且

$$(F_{1,2},F_{2,2},F_{3,2},F_{4,2})=(2,2,2,1).$$

图 4.2.2 显示了这四个同构类, 即

$$\begin{aligned}
F_{1,2}=2 &\quad\Rightarrow\quad 1T_{1,2(1)}+1T_{1,2(2)},\\
F_{2,2}=2 &\quad\Rightarrow\quad 1T_{2,2(1)}+1T_{2,2(2)},\\
F_{3,2}=2 &\quad\Rightarrow\quad 2T_{3,2(1)},\\
F_{4,2}=1 &\quad\Rightarrow\quad 1T_{4,2(1)}.
\end{aligned}$$

从式 (4.2.16) 可以看出, 三条边的带限制外平面地图的根点次 m 只能为

$1\sim 6$, 并且

$$(F_{1,3},F_{2,3},F_{3,3},F_{4,3},F_{5,3},F_{6,3})=(7,7,7,5,3,1).$$

图 4.2.3 给出了根点次为 1 时这类根地图的分类, 即

$$F_{1,3}=7 \quad\Rightarrow\quad 1T_{1,3(1)}+1T_{1,3(2)}+1T_{1,3(3)}+2T_{1,3(4)}+1T_{1,3(5)}+1T_{1,3(6)}.$$

图 4.2.4 给出了根点次为 2 时这类根地图的分类, 即

$$F_{2,3}=7 \quad\Rightarrow\quad 2T_{2,3(1)}+1T_{2,3(2)}+1T_{2,3(3)}+1T_{2,3(4)}+2T_{2,3(5)}.$$

图 4.2.5 和图 4.2.6 分别给出了根点次为 3 和 $4\sim 6$ 时这类根地图的分类, 即

$$\begin{aligned}
F_{3,3}=7 &\quad\Rightarrow\quad 2T_{3,3(1)}+2T_{3,3(2)}+2T_{3,3(3)}+1T_{3,3(4)},\\
F_{4,3}=5 &\quad\Rightarrow\quad 2T_{4,3(1)}+3T_{4,3(2)},\\
F_{5,3}=3 &\quad\Rightarrow\quad 3T_{5,3(1)},\\
F_{6,3}=1 &\quad\Rightarrow\quad 1T_{6,3(1)}.
\end{aligned}$$

定理 4.2.4 令 $f_{\rm rop}=f(x,y)$ 是方程式 (4.1.11) 的解, $h_{\rm rop}=h(y)$, 则

$$\partial_y^n h_{\rm rop}=\begin{cases}1, & n=0,\\ \dfrac{2(3n+1)!}{n!(2n+2)!}, & n\geqslant 1,\end{cases}\tag{4.2.17}$$

$$\partial_{(x,y)}^{(m,n)} f_{\rm rop}=\begin{cases}1, & m=0,\ n=0,\\ \dfrac{3k-m}{n-k}\dbinom{3n-m-1}{n-k-1}\dbinom{k}{m-k}, & n\geqslant 1,\ 1\leqslant m\leqslant 2n.\end{cases}\tag{4.2.18}$$

证明 由式 (4.2.13), 通过特征方程

$$\begin{cases}1-\xi+\xi^3y=0,\\ 1-\xi+\xi yh,\end{cases}$$

以 $\xi=x$ 为参数, 解出 h 和 y, 得

$$\begin{cases}y=\dfrac{\xi-1}{\xi^3},\\ h=\xi^2.\end{cases}$$

为了计算的方便, 引进 $\zeta=\xi-1$, 则

$$\begin{cases}\zeta=y(1+\zeta)^3,\\ h=(1+\zeta)^2.\end{cases}\tag{4.2.19}$$

利用定理 1.5.1 (即式 (1.5.6)), 就得到 $h_{\rm sop} = h(y)$ 由式 (4.2.17) 所确定. 从而, 定理的前一个结论成立.

从式 (4.2.13), 可得

$$f = 1 + \frac{xy(h - x^2)}{1 - x + x^2 y}.$$

再引进 $x = \eta(1+\zeta)$, 则结合式 (4.2.19), 有

$$\begin{cases} \eta = x\left(\dfrac{1}{1+\zeta}\right), \\ \zeta = y(1+\zeta)^3, \\ f = \dfrac{1}{1 - \eta\zeta(1+\eta)}. \end{cases} \tag{4.2.20}$$

利用定理 1.5.2 (即式 (1.5.20) 和式 (1.5.21)), 就得到 $f_{\rm rop} = f(x, y)$ 由式 (4.2.18) 所确定. 从而, 定理的后一个结论成立. □

推论 4.2.2　对于整数 $n \geqslant 1$, 有恒等式

$$\frac{2(3n+1)!}{n!(2n+2)!} = \sum_{m=1}^{2n} \frac{3k-m}{n-k}\binom{3n-m-1}{n-k-1}\binom{k}{m-k}. \tag{4.2.21}$$

证明　由方程式 (4.2.11), 知 $h_{\rm rop} = f_{\rm rop}|_{x=1}$. 利用式 (4.2.17) 和式 (4.2.18), 即得式 (4.2.21). □

这个推论启示我们, 当直接求两变量函数 f 麻烦的时候, 最好先单独确定单变量函数 h, 然后再考虑关于 f 的问题.

4.3　二次形式

本节讨论方程

$$\begin{cases} x^2y(1-x^2)f^2 - (1 - x^2 + x^2 y)f + (1 - x^2) + x^2 y h = 0, \\ f|_{x=0,y=0} = 1, \end{cases} \tag{4.3.1}$$

其中 $h = f(1, y)$.

为了推演的方便, 用式 (4.3.1) 的等价形式

$$f=1+\frac{x^2y}{1-x^2}(h-f)+x^2yf^2. \tag{4.3.2}$$

因为变量 x 在方程中总以 x^2 的形式出现, 故可用代换 $z=x^2$, 将之转换为

$$f=1+\frac{zy}{1-z}(h-f)+zyf^2. \tag{4.3.3}$$

令 $F_{\star,n}=\partial_y^n f$, $H_{\star,n}=\partial_y^n h$, 则

$$H_{\star,n}=F_{\star,n}|_{z=1}=\sum_{m\geqslant 0}F_{m,n}, \tag{4.3.4}$$

其中 $F_{m,n}=\partial_{(z,y)}^{(m,n)}f\ (m,n\geqslant 0)$.

为了方便, 记 $F_{\star,n}^{[2]}=\partial_y^n f^2$, 则

$$F_{\star,n}^{[2]}=\sum_{i=0}^{n}F_{\star,i}F_{\star,n-i}. \tag{4.3.5}$$

由方程式 (4.3.3), 有

$$F_{\star,n}=\begin{cases}1, & n=0,\\ zF_{\star,n-1}^{[2]}+\dfrac{z}{1-z}(H_{n-1}-F_{\star,n-1}), & n\geqslant 2.\end{cases}$$

由式 (4.3.4), 可以看出

$$\begin{aligned}H_n-F_{\star,n}&=\sum_{m\geqslant 0}(F_{m,n}-F_{m,n}z^m)=(1-z)\sum_{m\geqslant 1}F_{m,n}\Big(\sum_{i=0}^{m-1}z^i\Big)\\&=(1-z)\sum_{i\geqslant 0}\Big(\sum_{m\geqslant i+1}F_{m,n}\Big)z^i.\end{aligned}$$

从而

$$F_{\star,n}=\begin{cases}1, & n=0,\\ z\left(F_{\star,n-1}^{[2]}+\displaystyle\sum_{i\geqslant 0}\Big(\sum_{m\geqslant i+1}F_{m,n}\Big)z^i\right), & n\geqslant 1.\end{cases} \tag{4.3.6}$$

引理 4.3.1 对于任何整数 $n\geqslant 0$, $F_{\star,n}$ 是 z 的一个次至多为 n 的多项式.

证明 因为 $F_{\star,0}=1$, 故对于 $n=0$, 结论成立. 归纳地, 假设对于 $n=k\geqslant 1$, 结论成立. 由式 (4.3.6),

$$F_{\star,k+1}=z\left(F_{\star,k}^{[2]}+\sum_{i=0}\Big(\sum_{m\geqslant i+1}F_{m,k}\Big)z^i\right).$$

再由归纳假设, $F^{[2]}_{\star,k}$ 是 z 的一个次至多为 k 的多项式, $\sum_{i=0}\Big(\sum_{m\geqslant i+1}F_{m,k}\Big)z^i$ 的次比 $F^{[2]}_{\star,k}$ 的小, 即得 $F_{\star,k}$ 是 z 的一个次至多为 $k+1$ 的多项式. 从而, 对于 $n=k+1$, 结论成立. □

基于这个引理, 利用式 (4.3.5), 式 (4.3.6) 可变为

$$F_{\star,n}=\begin{cases}1, & n=0,\\ z\left(\sum_{i=0}^{n-1}F_{\star,i}F_{\star,n-i}+\sum_{i=0}^{n-2}\Big(\sum_{m=i+1}^{n-1}F_{m,n-1}\Big)z^i\right), & n\geqslant 1.\end{cases}\tag{4.3.7}$$

定理 4.3.1　方程式 (4.3.2) 在 $\mathcal{R}\{z,y\}$ 中有且仅有一个解.

证明　首先注意到, 由式 (4.3.7) 所确定的以 z 和 y 为变量的函数 f 是方程式 (4.3.1) 的一个解. 然后注意到, 对任何整数 $n\geqslant 0$, $F_{\star,n}\in\mathcal{R}\{z\}$. 方程式 (4.3.1) 解的存在性得证. 唯一性来自用式 (4.3.7) 求所有 $F_{\star,n}$ 过程的唯一性. □

例 4.3.1　平面 Euler 根地图按根点次和边数的同构分类. 用式 (4.3.7), 得

$$\begin{aligned}
F_{\star,1}&=z(F^2_{\star,0}+0)=z(1+0)=z,\\
F_{\star,2}&=z(2F_{\star,0}F_{\star,1}+F_{1,1})=z(2z+1)=z+2z^2,\\
F_{\star,3}&=z\left(2F_{\star,0}F_{\star,2}+F^2_{\star,1}+\sum_{i=0}^{1}\Big(\sum_{m=i+1}^{2}F_{m,2}\Big)x^i\right)\\
&=z(2z+5z^2+3+2z)=3z+4z^2+5z^3,\\
F_{\star,4}&=z\left(2F_{\star,0}F_{\star,3}+2F_{\star,0}F_{\star,3}+\sum_{i=0}^{2}\Big(\sum_{m=i+1}^{3}F_{m,3}\Big)x^i\right)\\
&=z(6z+10z^2+14z^3+12+9z+5z^2)=12z+15z^2+15z^3+14z^4.
\end{aligned}$$

就是说, 方程式 (4.3.1) 的解, 记为 $f_{\rm pE}=f(x,y)$, $h_{\rm pE}=h(y)$, 分别为

$$\begin{aligned}
f_{\rm pE}&=1+(z)y+(z+2z^2)y^2+(3z+4z^2+5z^3)y^3+(15z^2+15z^3+14z^4)y^4+\cdots,\\
h_{\rm pE}&=1+(1)y+(3)y^2+(12)y^3+(56)y^4+\cdots,
\end{aligned}$$

其中 $z=x^2$.

在图 4.3.1∼ 图 4.3.5 中, $aT_{m,n}$ 表示其上的图形为根点次是 m、边数是 n 的地图中的一个, 提供了 a 个同构类, $2\leqslant m\leqslant 8$, $1\leqslant n\leqslant 4$.

从 图 4.3.1 ∼ 图 4.3.2 可以看出, 一条边的平面 Euler 根地图只有 1 类, 即 $1T_{2,1}$, 提供了 $f_{\rm pE}$ 的一次项 y 的系数 $F_{\star,1}=x^2$; 两条边的平面 Euler 根地图有

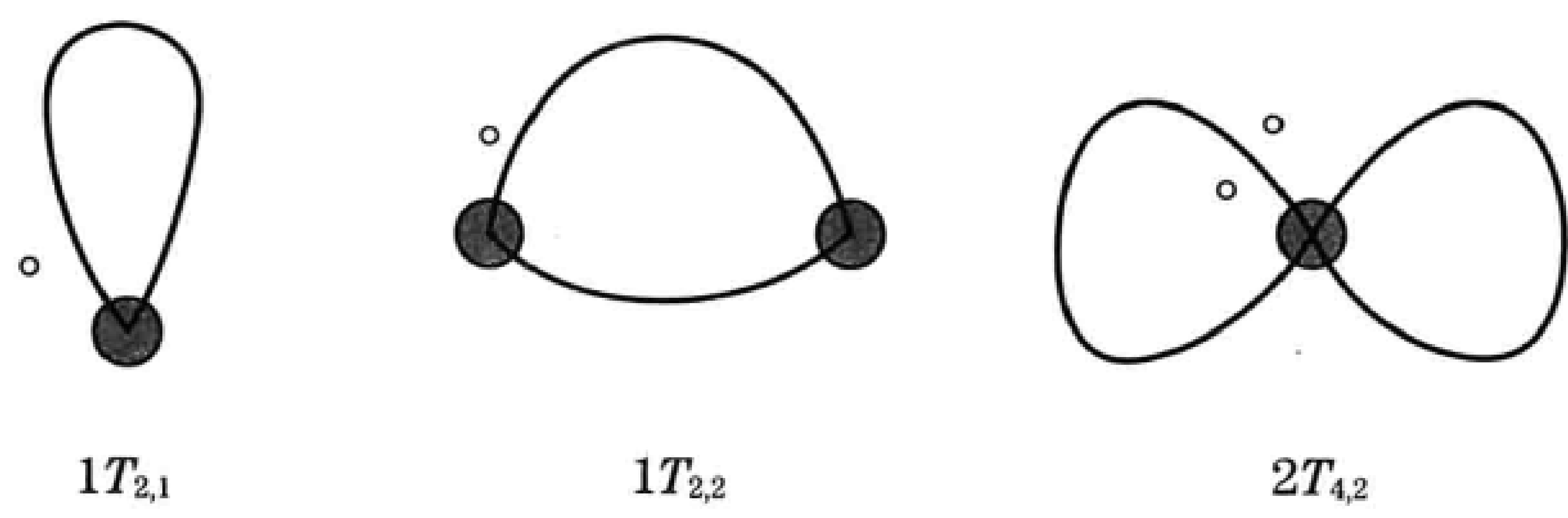


图 4.3.1 边数为 1～2 的平面 Euler 根地图的分类

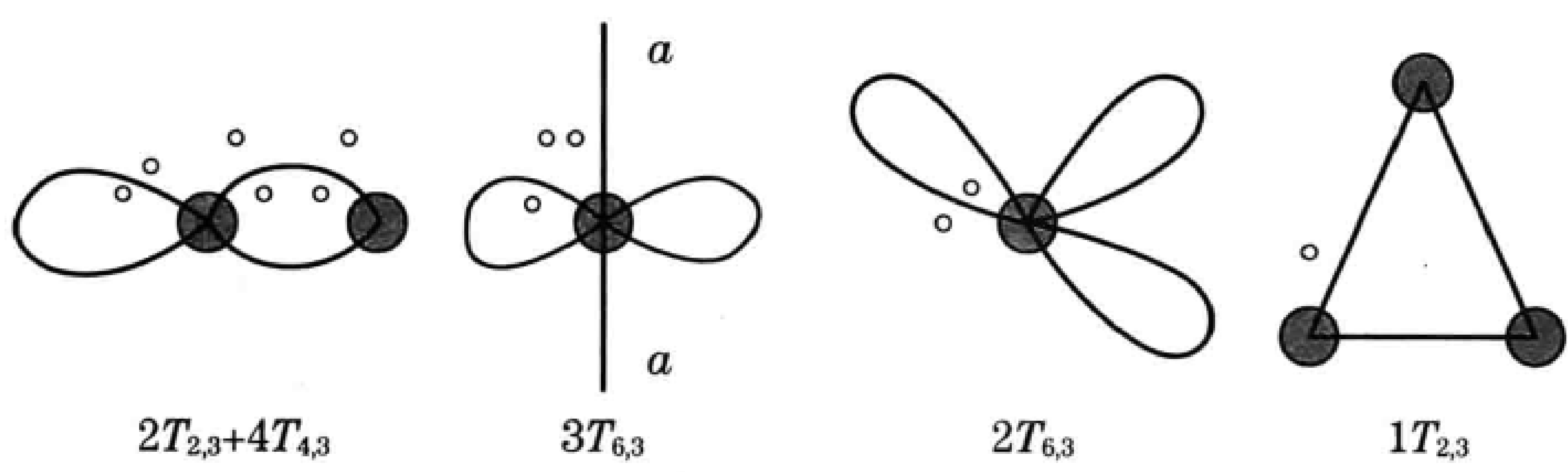


图 4.3.2 边数为 3 的平面 Euler 根地图的分类

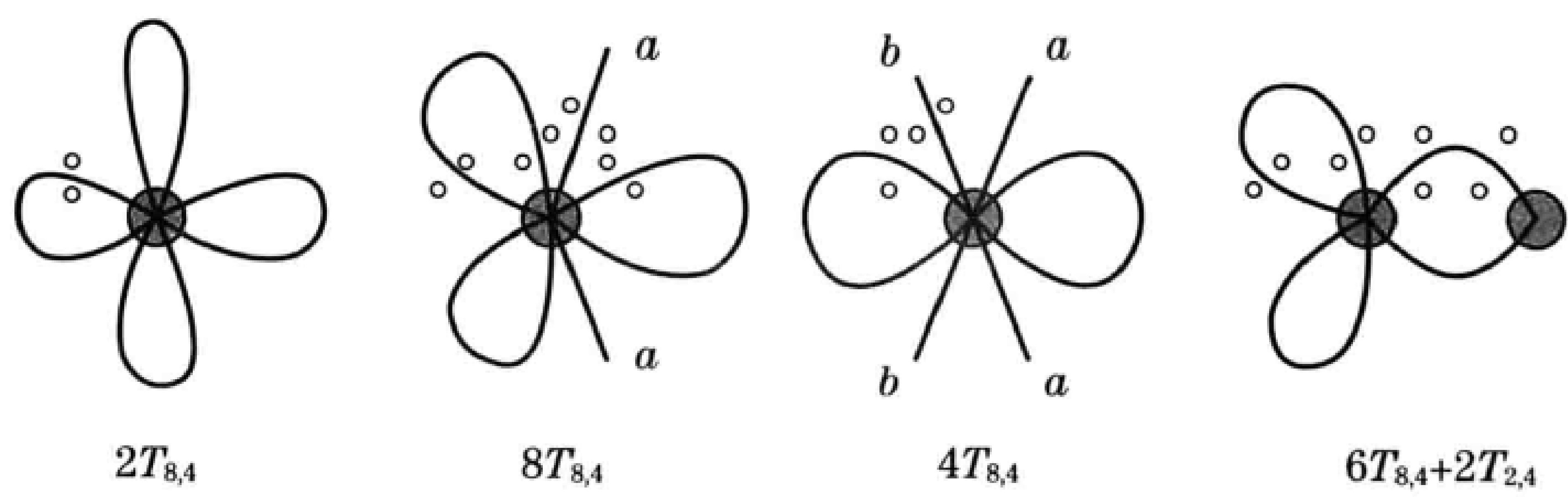


图 4.3.3 边数为 4 的平面 Euler 根地图的分类 (I)

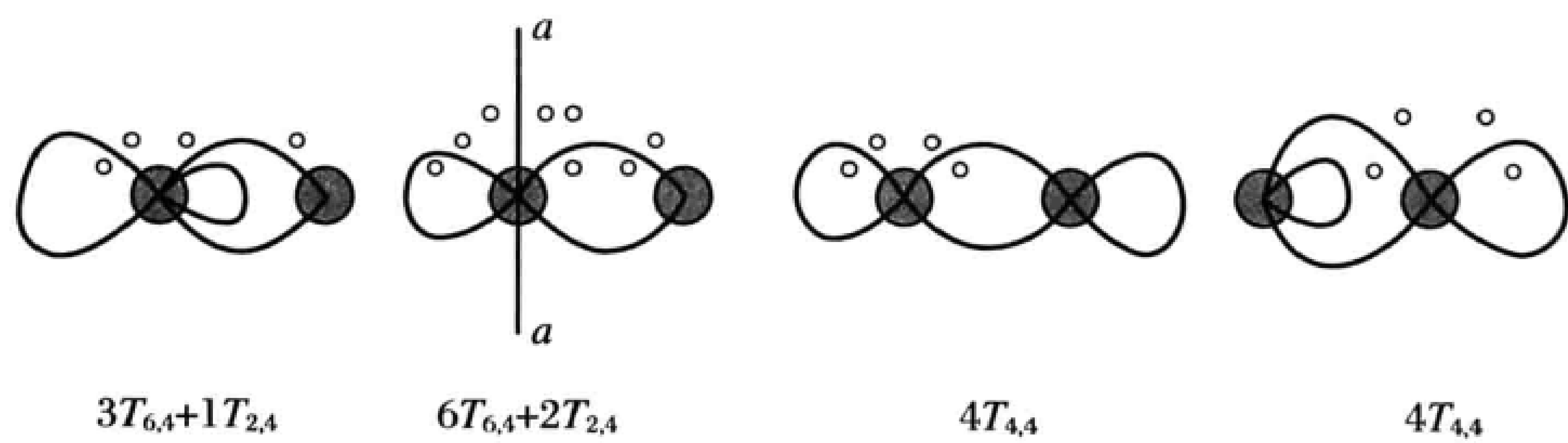


图 4.3.4 边数为 4 的平面 Euler 根地图的分类 (II)

3 类, 即 $1T_{2,2}+2T_{4,2}$, 提供了 f_{pE} 的二次项 y^2 的系数 $F_{\star,2}=x^2+2x^4$; 三条边的平面 Euler 根地图有 12 类, 即 $(2T_{2,3}+4T_{4,3})+(3T_{6,3})+(2T_{6,3})+(1T_{2,3})=3T_{2,3}+4T_{4,3}+5T_{6,3}$, 提供了 f_{pE} 的三次项 y^3 的系数 $F_{\star,3}=3x^2+4x^4+5x^6$.

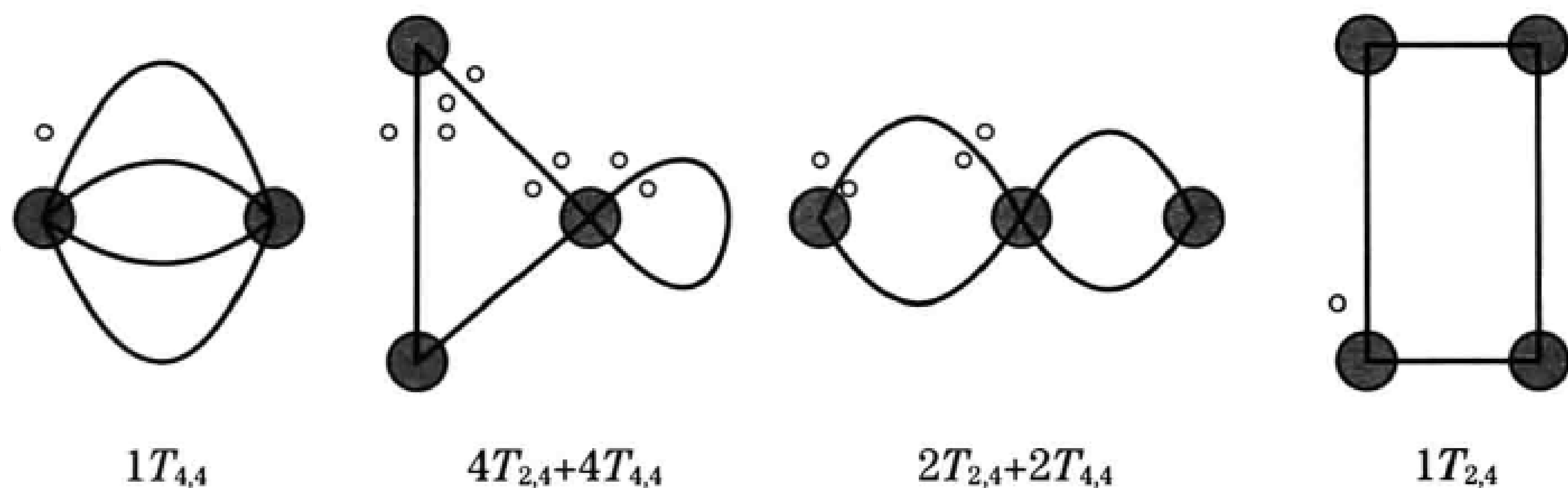


图 4.3.5　边数为 4 的平面 Euler 根地图的分类 (III)

从图 4.3.3~ 图 4.3.5 可以看出, 四条边的平面 Euler 根地图有 56 类, 即图 4.3.3: $20T_{8,4}+2T_{2,4}$, 图 4.3.4: $9T_{6,4}+8T_{4,4}+3T_{2,4}$, 图 4.3.5: $7T_{4,4}+7T_{2,4}$, 从而得 $20T_{8,4}+9T_{6,4}+15T_{4,4}+12T_{2,4}$, 提供了 f_{pE} 的四次项 y^4 的系数 $F_{\star,4}=12x^2+15x^4+9x^6+20x^8$.

例 4.3.2　考虑方程

$$\begin{cases} x^2y(1-x)f^2-(1-x+x^2y)f+xyh+(1-x)=0, \\ f|_{x=0,y=0}=1, \end{cases} \tag{4.3.8}$$

其中 $h=f(1,y)$.

为了推演的方便, 用上式的等价形式

$$f=1+\frac{xy}{1-x}(h-xf)+x^2yf^2. \tag{4.3.9}$$

同样, 可得到方程式 (4.3.8) 的适定性定理, 并可得解的有限正项和表示.

4.4　高次形式

给定方程

$$\begin{cases} f=x^2y+\dfrac{x^2y(f-h)}{x^2(1+h)^2-(1+f)^2}, \\ f|_{y=0}=0 \quad (\Rightarrow h_{y=0}=0), \end{cases} \tag{4.4.1}$$

其中 $h=f(1,y)$.

因为在方程中只出现 x^2, 故 f 只与 x^2 有关. 令 $z=x^2$, 则在 $\mathcal{R}\{x,y\}$ 中讨论方程式 (4.4.1), 与在 $\mathcal{R}\{z,y\}$ 中讨论方程

$$\begin{cases} f=zy+\dfrac{zy(f-h)}{z(1+h)^2-(1+f)^2}, \\ f|_{y=0}=0 \quad (\Rightarrow h_{y=0}=0), \end{cases} \tag{4.4.2}$$

等价, 其中 $h=f(1,y)$.

为了行文的方便, 将方程等价地转换成

$$\begin{cases} (f-zy)(z(1+h)^2-(1+f)^2)=zy(f-h), \\ f|_{y=0}=0 \quad (\Rightarrow h_{y=0}=0). \end{cases} \tag{4.4.3}$$

定理 4.4.1 方程式 (4.4.2) 在 $\mathcal{R}\{z,y\}$ 中有且仅有一个解.

证明 为了便于推导, 还是先约定一些记号. 对于整数 $n\geqslant 0$, 令

$$F_n^{[i]}=\begin{cases} \partial_y^n f=[f]_n=F_n, & i=1, \\ \partial_y^n f^i=[f^i]_n=[f]_n^{[i]}, & i\geqslant 2. \end{cases} \tag{4.4.4}$$

事实上, 这里只用到 $i=2$ 的情形. 因为

$$F_n^{[2]}=\sum_{j=0}^{n}F_{n-i}F_i \quad (n\geqslant 0) \tag{4.4.5}$$

以及 $h=f|_{z=1}$, 所以对于整数 $n\geqslant 0$, 有

$$\begin{cases} H_n=\partial_y^n h=F_n|_{z=1}, \\ H_n^{[2]}=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}H_{n-i}H_i. \end{cases} \tag{4.4.6}$$

从而, 目的在于确定所有以 z 为单变量的函数 F_n $(n\geqslant 0)$.

为了便于利用方程式 (4.4.3), 要注意到

$$[1+f]_n=\partial_y^n(1+f)=\begin{cases} 1+F_0, & n=0, \\ F_n, & n\geqslant 1, \end{cases} \tag{4.4.7}$$

$$[1+f]_n^{[2]}=\partial_y^n(1+f)^2=\begin{cases} (1+F_0)^2, & n=0, \\ 2F_n+F_n^{[2]}, & n\geqslant 1. \end{cases} \tag{4.4.8}$$

由式 (4.4.6), 还有

$$[1+h]_n = \partial_y^n(1+h) = \begin{cases} 1+H_0, & n=0, \\ H_n, & n \geqslant 1, \end{cases} \tag{4.4.9}$$

$$[1+h]_n^{[2]} = \partial_y^n(1+h)^2 = \begin{cases} (1+H_0)^2, & n=0, \\ 2H_n + H_n^{[2]}, & n \geqslant 1. \end{cases} \tag{4.4.10}$$

因为

$$\begin{aligned} [(f-zy)(z(1+h)^2-(1+f)^2)]_0 &= [f-zy]_0[z(1+h)^2-(1+f)^2)]_0 \\ &= [f]_0(z[(1+h)^2]_0) - [(1+f)^2]_0 \\ &= F_0\big(z(1+H_0)^2-(1+F_0)^2\big), \end{aligned}$$

以及

$$[zy(f-h)]_0 = 0,$$

由方程式 (4.4.3), 有

$$F_0\big(z(1+H_0)^2-(1+F_0)^2\big) = 0. \tag{4.4.11}$$

可见, 方程式 (4.4.3) 的初始条件满足这个方程, 即

$$F_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} H_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_0^{[2]} = 0, \\ F_0^{[2]} = 0. \end{cases} \tag{4.4.12}$$

对于任何整数 $n \geqslant 1$, 由

$$\begin{aligned} &[(f-zy)(z(1+h)^2-(1+f)^2)]_n \\ &= \sum_{i=0}^{n}[f-zy]_i[z(1+h)^2-(1+f)^2)]_{n-i} \\ &= \begin{cases} (F_1-z)[z(1+h)^2-(1+f)^2)]_0 = (F_1-z)(z-1), & n=1, \\ F_n(z-1) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} F_{n-i}\Big(z[1+h]_i^{[2]} - [1+f]_i^{[2]}\Big), & n \geqslant 2, \end{cases} \end{aligned}$$

以及

$$[zy(f-h)]_n = z(F_{n-1} - H_{n-1}),$$

再由方程式 (4.4.3), 得

$$\begin{cases} (F_1-z)(z-1)=z(F_0-H_0) \quad \Rightarrow \quad F_1-z=0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \quad F_1=z \quad (n=1), \\ F_2(z-1)=z(F_1-H_1) \quad \Rightarrow \quad F_2(z-1)=z(z-1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \quad F_2=z \quad (n=2), \\ F_n(z-1)=z(F_{n-1}-H_{n-1})+\sum\limits_{i=1}^{n-2}F_{n-i}([1+f]_i^{[2]}-z[1+h]_i^{[2]}) \\ \Rightarrow \quad F_n=z\dfrac{F_{n-1}-H_{n-1}}{z-1}+\sum\limits_{i=1}^{n-2}F_{n-i}\dfrac{[1+f]_i^{[2]}-z[1+h]_i^{[2]}}{z-1} \quad (n\geqslant 3). \end{cases} \tag{4.4.13}$$

由式 (4.4.4) ~ 式 (4.4.10) 知, 所有 F_n $(n\geqslant 2)$ 都是被 F_i $(0\leqslant i\leqslant n-1)$ 确定的. 易见, $F_n\in\mathcal{R}\{z\}\subseteq\mathcal{R}\{z,y\}$. 从而, $f\in\mathcal{R}\{z,y\}$ 是方程式 (4.4.3) 的一个解. 又由于 F_n $(n\geqslant 1)$, 只要 F_0 选定, 这个解就是唯一的. 从方程式 (4.4.3) 的始条件, 这个解是唯一的. □

设 F_n 是 z 的一个 m_n 次多项式, 即有形式

$$F_n=\sum_{j=0}^{m_n}F_{j,n}z^j, \tag{4.4.14}$$

其中 $F_{j,n}\in\mathcal{R}$, $0\leqslant j\leqslant m_n$, $n\geqslant 1$.

一方面，由式 (4.4.6), 有

$$\begin{aligned} F_{n-1}-H_{n-1}&=\sum_{j=1}^{m_{n-1}}F_{j,n-1}(z^j-1) \\ &=(z-1)\sum_{j=1}^{m_{n-1}}F_{j,n-1}(1+z+\cdots+z^{j-1}) \\ &=(z-1)\sum_{k=0}^{m_{n-1}-1}\left(\sum_{j=k+1}^{m_{n-1}}F_{j,n-1}\right)z^k. \end{aligned} \tag{4.4.15}$$

另一方面, 由式 (4.4.4) 和式 (4.4.6), 有

$$\begin{aligned} F_i^{[2]}-zH_i^{[2]}&=\sum_{j=1}^{i}(F_jF_{i-j}-zH_jH_{i-j}) \\ &=z(z-1)\sum_{j=1}^{i}\sum_{t=0}^{m_j+m_{i-j}-1}\left(\sum_{s=t+1}^{m_j+m_{i-j}}\varLambda_{j,i}^{(s)}\right)z^t, \end{aligned}$$

其中

$$
\Lambda_{j,i}^{(s)} = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant s < 2, \\ \displaystyle\sum_{\substack{k+l=s \\ 1 \leqslant k \leqslant m_j \\ 1 \leqslant l \leqslant m_{i-j}}} F_{k,j} F_{l,i-j}, & s \geqslant 2, \end{cases} \tag{4.4.16}
$$

$$
\begin{aligned}
F_i - zH_i &= \sum_{j=1}^{m_i} F_{j,i}(z^j - z) \\
&= z(z-1)\sum_{j=2}^{m_i} F_{j,i}(1 + z + \cdots + z^{j-2}) \\
&= z(z-1)\sum_{t=0}^{m_i-2}\left(\sum_{j=t+2}^{m_i} F_{j,i}\right) z^t.
\end{aligned}
$$

从式 (4.4.8) 和式 (4.4.10), 得

$$
\begin{aligned}
&[1+f]_i^{[2]} - z[1+h]_i^{[2]} \\
&\quad = 2(F_i - zH_i) + (F_i^{[2]} - zH_i^{[2]}) \\
&\quad = z(z-1)\left(2\sum_{t=0}^{m_i-2}\left(\sum_{j=t+2}^{m_i} F_{j,i}\right)z^t + \sum_{j=1}^{i}\sum_{t=0}^{m_j+m_{i-j}-1}\left(\sum_{s=t+1}^{m_j+m_{i-j}} \Lambda_{j,i}^{(s)}\right)z^t\right).
\end{aligned} \tag{4.4.17}
$$

用式 (4.4.15) 和式 (4.4.17), 从式 (4.4.13), 导出

$$
F_n = \begin{cases} 0, \quad n = 0, \\ z, \quad n = 1,2,3, \\ z\displaystyle\sum_{k=0}^{m_{n-1}-1}\left(\sum_{j=k+1}^{m_{n-1}} F_{j,n-1}\right)z^k + z\sum_{i=1}^{n-2} F_{n-i}\Bigg(2\sum_{t=0}^{m_i-2}\left(\sum_{j=t+2}^{m_i} F_{j,i}\right)z^t \\ \quad + \displaystyle\sum_{j=1}^{i}\sum_{t=0}^{m_j+m_{i-j}-1} A_{j,i}z^t\Bigg), \quad n \geqslant 4, \end{cases} \tag{4.4.18}
$$

其中

$$
A_{j,i} = \sum_{s=t+1}^{m_j+m_{i-j}} \Lambda_{j,i}^{(s)}, \tag{4.4.19}
$$

$\Lambda_{j,i}^{(s)}$ 由式 (4.4.16) 给出.

可见, 由式 (4.4.18) 和式 (4.4.19) 所确定的 F_n $(n \geqslant 0)$, 提供了方程式 (4.4.2) 解 $f \in \mathcal{R}\{z,y\}$ 的一个显式.

引理 4.4.1 对 $\forall\, n \geqslant 2$, F_n 是 z 的一个 $\lfloor n/2 \rfloor$ 次多项式.

证明 对于任何一个关于 z 的多项式 P, 记 $\mu(P)$ 为 P 的次, 则 $m_n = \mu(F_n) = \lfloor n/2 \rfloor$. 由式 (4.4.5), 知

$$\mu(F_n^{[2]}) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n}(m_{n-i} + m_i). \tag{4.4.20}$$

易见, 当 $n=2$ 和 3 时, 结论成立. 用数学归纳法, 假设对 $\forall 0 \leqslant i \leqslant n-1$, $\mu(F_i) = m_i = \lfloor i/2 \rfloor$, 往证 $m_n = \lfloor n/2 \rfloor$.

由式 (4.4.5), 可知 $\mu(F_n^{[2]}) \leqslant \max\{\mu(F_{n-i}) + \mu(F_i) | 0 \leqslant i \leqslant n\} = \lfloor n/2 \rfloor$. 因为 $F_0 = 0$, 故 $\lfloor n/2 \rfloor = \max\{\mu(F_{n-i}) + \mu(F_i) | 1 \leqslant i \leqslant n-1\} = \lfloor n/2 \rfloor$. 由归纳假定, 知

$$\lfloor n/2 \rfloor \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n-1}\{\mu(F_{n-i}) + \mu(F_i) \leqslant \lfloor (n-i)/2 \rfloor + \lfloor i/2 \rfloor\} \leqslant \lfloor n/2 \rfloor.$$

对于 $n \geqslant 4$, 由归纳假设, 利用式 (4.4.17), 有

$$\begin{aligned}\mu(F_n) &= \mu\Big(\frac{[1+f]_{n-1}^{[2]} - z[1+h]_{n-1}^{[2]}}{z-1}\Big) = 1 + \mu(F_{n-2}^{[2]}) \\ &= 1 + \lfloor (n-1)/2 \rfloor = 1 + \lfloor n/2 \rfloor - 1 = \lfloor n/2 \rfloor.\end{aligned}$$

由式 (4.4.13), 即得欲证的结论. □

基于这个引理, 在式 (4.4.18) 和式 (4.4.19) 中的所有 m_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ 都可用 $\lfloor i/2 \rfloor$ 替代.

引理 4.4.2 对于任何整数 $n \geqslant 2$, 多项式 F_n 的所有系数都是非负整数.

证明 由式 (4.4.18) 和式 (4.4.19), 用数学归纳法, 即可导出欲证的结论. □

只要通过边变量代替 $z = x^2$, 式 (4.4.18) 本身就可提供方程式 (4.4.1) 在 $\mathcal{R}\{x,y\}$ 中这个解作为以 x 和 y 为变量函数的一个显式. 要想知道 F_n, 则必须先知道所有 F_i $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, 这样就可以探求是否可以以及如何实现, 对于任何给定的正整数 n, 直接确定 F_n, 而不必知道任何一个 F_i $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$.

令 $g = f+1$, $l = h+1$, 即得方程式 (4.4.1) 的等价形式

$$\begin{cases} g^3 - (1+x^2y)g^2 + x^2(y-l^2)g + x^2(l^2 - yl + x^2yl^2) = 0, \\ g|_{x=y=0} = 1, \end{cases} \tag{4.4.21}$$

其中 $l = g(1,y)$.

定理 4.4.2 方程式 (4.4.21) 在 $\mathcal{R}\{x,y\}$ 中有且仅有一个解.

证明 由于方程式 (4.4.21) 和方程式 (4.4.1) 等价, 方程式 (4.4.1) 和方程式 (4.4.2) 等价, 从定理 4.4.1 即可导出欲证的结论. □

因为方程式 (4.4.21) 是三次的, 所以直接求解多很复杂. 再考虑到 l 是 g 的一部分. 为了转化为一个或多个较低次的方程, 先求出 l, 引进一个函数 $q=q(y)\in\mathcal{R}\{x,y\}$, 使得

$$q-1=l(yq^2), \tag{4.4.22}$$

并且由二次方程

$$\begin{cases} x^2y(x^2-1)p^2+(x^2y-x^2+1)p+x^2-1-x^2yq=0, \\ p|_{x=y=0}=1 \end{cases} \tag{4.4.23}$$

确定 $q=p(1,y)$.

在 $\mathcal{R}\{x,y\}$ 上, 只要用变量替换 $z=x^2$, 式 (4.4.23) 就可转化为等价方程

$$\begin{cases} zy(z-1)f^2+(zy-z+1)f+z-1-zyq=0, \\ f|_{x=y=0}=1, \end{cases} \tag{4.4.24}$$

其中 $q=f(1,y)$.

定理 4.4.3 方程式 (4.4.24) 在 $\mathcal{R}\{z,y\}$ 中有且仅有一个解, 设这个解为 f, 则对任何整数 $n\geqslant 0$, $\partial_y^n f$ 都是 z 的非负正系数多项式.

证明 注意到方程式 (4.4.24) 就是方程式 (4.3.3) (其中的 q 就是那里的 l), 由定理 4.3.1, 即得欲证的结论. □

在 4.3 节中, 已经提供了确定方程式 (4.3.3) 解的式 (4.3.6). 它的 $z=1$ 的情形就是这里的 q. 不过这个形式只利于用计算机计算, 而不能直接得到 q 的显函数表示.

方程式 (4.4.24) 的判别式为

$$\delta(z,y)=(zy-z+1)^2-4yz(z-1)(z-1-zyq). \tag{4.4.25}$$

要想在 $\delta(z,y)$ 中提出因子 $(z-\xi)^2$, 或者说有一个重根 $z=\xi$, 就得解方程组

$$\begin{cases} \delta(z,y)|_{z=\xi}=0, \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}\delta(z,y)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=\xi}=0, \end{cases}$$

也就是

$$\begin{cases}(\xi y-\xi+1)^2-4y\xi(\xi-1)(\xi-1-\xi yq)=0,\\ 2\xi y^2-2(2\xi-1)y+2(\xi-1)-4(\xi-1)(3\xi-1)+4y^2\xi^2(\xi-1)q=0.\end{cases} \tag{4.4.26}$$

用 $3\xi-2$ 乘第一个方程, 用 $\xi(\xi-1)$ 乘第二个方程, 然后相减, 简化后得到关于 y 的一个二次方程

$$\xi^2y^2+2\xi(\xi-1)^2y+(\xi-1)^2(\xi-2)=0.$$

它的两个可能解为

$$y=-\frac{\xi-1}{\xi},\quad 或\quad y=-\frac{(\xi-1)(\xi-2)}{\xi^2}.$$

若取前者, 可以验证, 将有 $q\notin\mathcal{R}\{y\}$. 因此, 只能取后者. 再用式 (4.4.26) 的第一个方程, 即可得

$$\begin{cases} y=-\dfrac{(\xi-1)(\xi-2)}{\xi^2} \quad \big(或\ 1-\xi=y\big(\xi^2/(\xi-2)\big)\big),\\ q=\dfrac{1+\xi-\xi^2}{(\xi-2)^2}.\end{cases} \tag{4.4.27}$$

为计算方便, 利用变量替换

$$\eta=\xi-1 \quad 或 \quad \xi=\eta+1, \tag{4.4.28}$$

式 (4.4.27) 变为

$$\begin{cases} \eta=y\Big(\dfrac{1+\eta}{1-\eta}\Big),\\ q=\dfrac{1-\eta-\eta^2}{(1-\eta)^2}.\end{cases} \tag{4.4.29}$$

因为 $(\eta+1)/(1-\eta)|_{\eta=0}=1\neq 0$, 用式 (1.5.6), 对于 $n\geqslant 1$, 得

$$\begin{aligned}\partial_y^n q&=\frac{1}{n}\partial_\eta^{n-1}\Big(\frac{1+\eta}{1-\eta}\Big)^n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\Big(\frac{1-\eta-\eta^2}{(1-\eta)^2}\Big)\\ &=\frac{1}{n}\partial_\eta^{n-1}\Big(\frac{1+\eta}{1-\eta}\Big)^n\frac{1-2\eta}{(1-\eta)^3}\\ &=\frac{1}{n}\big(\partial_\eta^{n-1}-2\partial_\eta^{n-2}\big)\frac{(1+\eta)^n}{(1-\eta)^{n+3}}=\frac{3\cdot 2^{n-1}(2n)!}{n!(n+2)!}.\end{aligned} \tag{4.4.30}$$

现在, 回过头来考虑如何直接确定方程式 (4.4.21) 解中的单变量函数 l. 由式 (4.4.22), 令

$$X=yq^2, \tag{4.4.31}$$

则由式 (4.4.27), 有

$$\begin{cases} X=\dfrac{(\xi-1)(1+\xi-\xi^2)^2}{\xi^2(2-\xi)^3}, \\ l+1=\dfrac{1+\xi-\xi^2}{(2-\xi)^2}. \end{cases} \tag{4.4.32}$$

将 $\xi-1$ 用 η 代替, 即得

$$\begin{cases} \eta=X\dfrac{(1+\eta)^2(1-\eta)}{\left(1-\dfrac{\eta^2}{1-\eta}\right)^2}, \\ l=\dfrac{\eta(1-2\eta)}{(1-\eta)^2}. \end{cases} \tag{4.4.33}$$

因为 $(1+\eta)^2(1-\eta)/\big(1-\eta^2/(1-\eta)^2\big)|_{\eta=0}=1\neq 0$, 用式 (1.5.6), 对于 $n\geqslant 1$, 得

$$\begin{aligned} \partial_X^n l &= \frac{1}{n}\partial_\eta^{n-1}\left(\frac{(1+\eta)^2(1-\eta)}{\big(1-\eta^2/(1-\eta)\big)^2}\right)^n\frac{1-7\eta}{(1-\eta)^2} \\ &= \frac{1}{n}\left(\partial_\eta^{n-1}-7\partial_\eta^{n-2}\right)\frac{(1+\eta)^{2n}(1-\eta)^{n-2}}{\big(1-\eta^2/(1-\eta)\big)^{2n}}. \end{aligned} \tag{4.4.34}$$

最后, 从 g 的三次方程式 (4.4.21), 导出用参数 η 的表示, 结合 $z=x^2$ 和用 η 表示的 l, 通过定理 1.5.2, 即可得到对于整数 $m,n\geqslant 1$, $\partial_{(z,y)}^{(m,n)}g\in\mathcal{R}$.

例 4.4.1　不可分离 Euler 平面根地图按边数的同构分类. 实际上, 由式 (4.4.18) 给出的 $F_{m,n}$ 就是边数为 n、根点次为 $2m$ 的不同构的不可分离 Euler 平面根地图的数目. 在图 4.4.1～图 4.4.3 中, 分别给出了边数为 $1\sim3$, $4\sim5$ 和 6 的不可分离 Euler 平面根地图的同构类. 例如, 从图 4.4.3, 可以看出

$$\begin{aligned} &(1T_{2,6})+(2T_{4,6})+(2T_{2,6}+2T_{4,6})+(2T_{2,6}+4T_{4,6})+(1T_{2,6}+4T_{4,6})+(T_{6,6}) \\ &\quad=6T_{2,6}+12T_{4,6}+1T_{6,6}. \end{aligned}$$

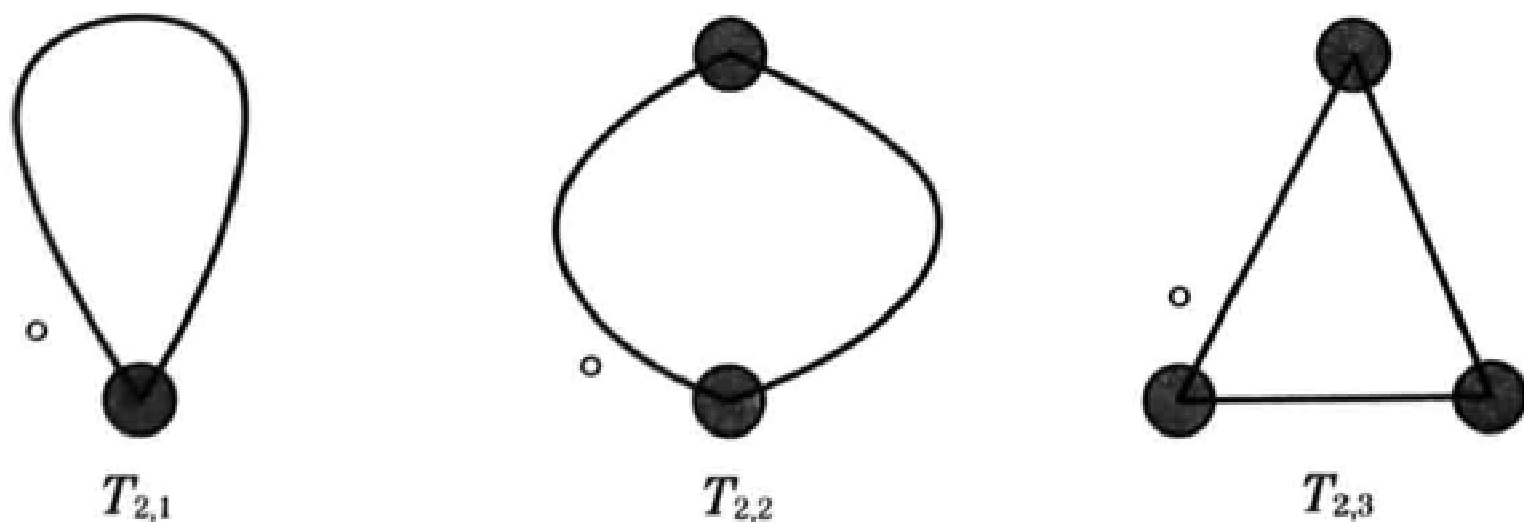


图 4.4.1　边数为 $1\sim3$ 的不可分离 Euler 平面根地图的分类

也就是, 在 6 条边的不可分离 Euler 平面根地图中, 根点次只能为 2, 4 和 6, 分别有 6, 12 和 1 类.

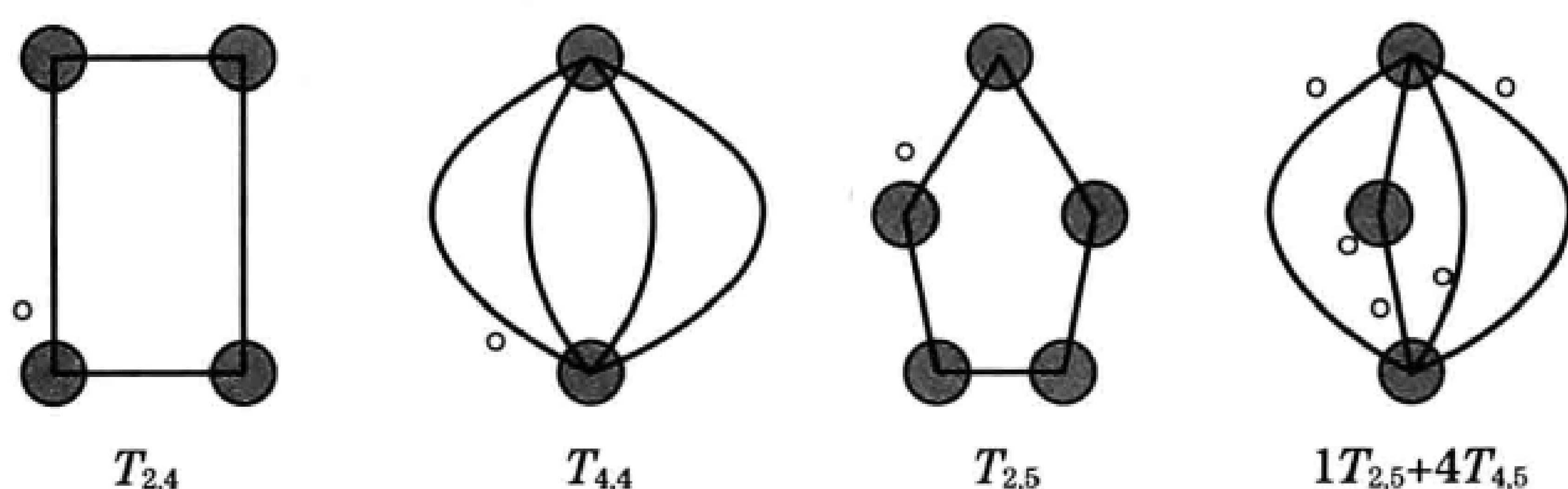


图 4.4.2 边数为 4 ~ 5 的不可分离 Euler 平面根地图的分类

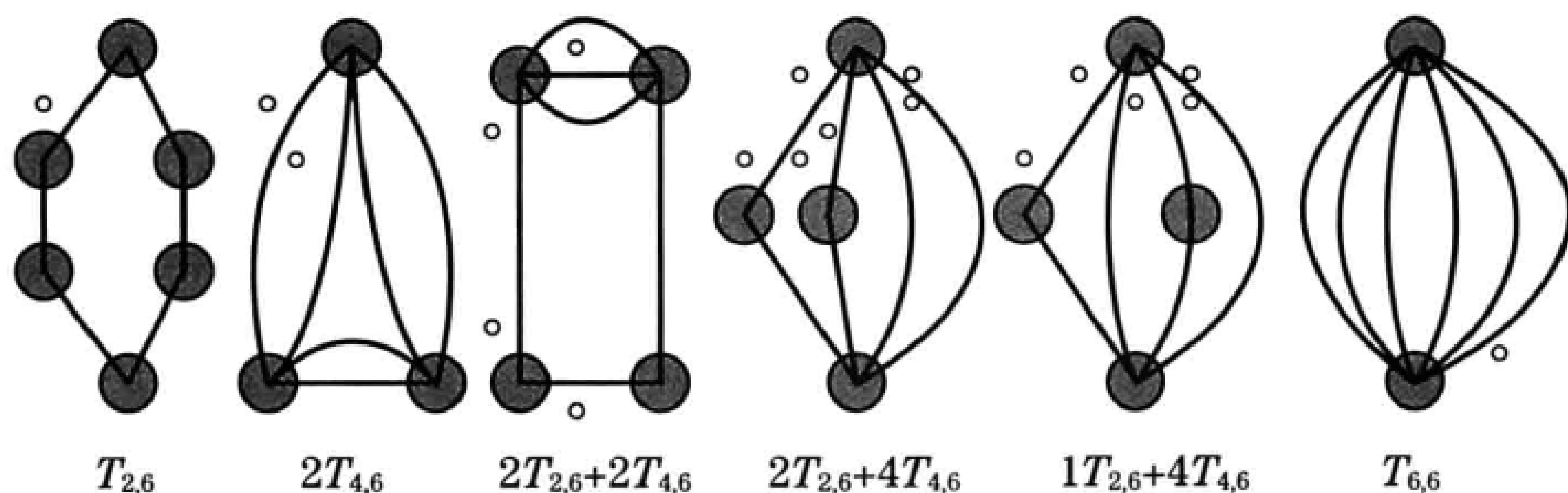


图 4.4.3 边数为 6 的不可分离 Euler 平面根地图的分类

例 4.4.2 一般 Euler 平面根地图按边数的同构分类. 方程式 (4.4.24) 的解, 与例 1 类似, 提供了一般 Euler 平面根地图按边数的同构分类. 所谓"一般", 是指允许有自环和重边.

4.5 注 记

1. 在解多变量函数的方程式时, 一个普遍适用的原则是设法减少变量或降低方程的次数, 以便将它转换为带较少变量函数或次较低的一个或多个方程, 简化求解过程. 如何找到一种合适的方式, 以实现这个过程, 因方程形式的不同而大相径庭. 本书所讨论的方程中的函数, 通常总是伴随其一部分与这个函数本身同时出现在这个方程之中, 从而导致各种不同思路处理方法的提出. 第一次注意到这种方程的是 Tutte[95−99]. 不过, 这些方程都是二次的. 对于这类二次方程, 他提出了重根法, 以先确定解的一部分, 然后再延伸到这个有计数意义的解. 这个重根在

理论上的存在性, 则是由 Brown[5] 完成的. 在本书的理论体系中, 重根的存在性就完全不需要了.

2. 多变量函数连同它的特定未知部分的一次方程, 源于对于外平面根地图的研究, 参见 [27–30]. 基于此, 形成了特征曲线法, 如 4.2节, 由方程式 (4.2.13), 在定理 4.2.4 的证明过程中所导出的特征方程就确定一个特征曲线. 由此可见, 重根法也是一类特征曲线法.

3. 从文献 [25] 所提供的分解原理, 可直接导出方程式 (4.4.1) . 在文献 [49] 中, 给出了解的无和显式. 文献 [51] 中的方程式 (1) 就是方程式 (4.4.23). 不过, 那里是 x^2, 这里是 x.

第 5 章　差分函数方程

5.1　单变直差式

考虑方程

$$\begin{cases} f\big(1-xy\delta_{1,x}(xf)\big)=1, \\ f|_{x=y=0}=1, \end{cases} \tag{5.1.1}$$

其中 $\delta_{1,x}(xf)=((xf)_{x=1}-(xf))/(1-x)$ 为 xf 在 1 和 x 之间的直差分. 因为这只是对变量 x 的一个直差分, 便称这类方程为单变直差式.

对于任何整数 $n\geqslant 0$, 令 $F_n=[f]_n=\partial_y^n f$, 则

$$\partial_y^n f(1-xy\delta_{1,x}(xf))=\sum_{i=0}^{n}F_i[1-xy\delta_{1,x}(xf)]_{n-i}. \tag{5.1.2}$$

记 $h=f|_{x=1}$, $H_n=[h]_n=\partial_y^n h$ $(n\geqslant 0)$, 则

$$[1-xy\delta_{1,x}(xf)]_j=\left[1-xy\frac{h-xf}{1-x}\right]_j. \tag{5.1.3}$$

当 $j=0$ 时,

$$[1-xy\delta_{1,x}(xf)]_0=1. \tag{5.1.4}$$

当 $j\geqslant 1$ 时,

$$\begin{aligned}[1-xy\delta_{1,x}(xf)]_j&=-\left[xy\frac{h-xf}{1-x}\right]_j=-\frac{x}{1-x}[h-xf]_{j-1}\\ &=-\frac{x}{1-x}(H_{j-1}-xF_{j-1}).\end{aligned} \tag{5.1.5}$$

由于方程式 (5.1.1) 与如下关于 F_n $(n\geqslant 0)$ 的方程组

$$\begin{cases} \partial_y^0\Big(f\big(1-xy\delta_{1,x}(xf)\big)\Big)=1, & n=0, \\ \partial_y^n\Big(f\big(1-xy\delta_{1,x}(xf)\big)\Big)=0, & n\geqslant 1 \end{cases} \tag{5.1.6}$$

等价, 方程式 (5.1.1) 在 $\mathcal{R}\{x,y\}$ 中有且仅有一个解, 当且仅当方程组式 (5.1.6) 在 $\mathcal{R}$ 中有且仅有一组解.

由于

$$\partial_y^0\big(f(1-xy\delta_{1,x}(xf))\big)=[f(1-xy\delta_{1,x}(xf)]_0,$$

且由式 (5.1.2),

$$[f(1-xy\delta_{1,x}(xf)]_0=F_0[1-xy\delta_{1,x}(xf)]_0=F_0=1, \tag{5.1.7}$$

所以式 (5.1.6) 中 $n=0$ 时的情形成立.

对于 $n\geqslant 1$, 由式 (5.1.2) 和式 (5.1.6), 知

$$\begin{aligned}\partial_y^n\Big(f\big(1-xy\delta_{1,x}(xf)\big)\Big)&=\Big[f\big(1-xy\delta_{1,x}(xf)\big)\Big]_n \quad (\text{由式 (5.1.2)})\\&=\sum_{i=0}^{n}F_i\Big[1-xy\delta_{1,x}(xf)\Big]_{n-i} \quad (\text{由式 (5.1.4) 和式 (5.1.5)})\\&=F_n-\frac{x}{1-x}\sum_{i=0}^{n-1}F_i(H_{n-i-1}-xF_{n-i-1})\\&=0,\end{aligned}$$

即

$$F_n=\frac{x}{1-x}\sum_{i=0}^{n-1}F_i(H_{n-i-1}-xF_{n-i-1}). \tag{5.1.8}$$

引理 5.1.1　对于整数 $n\geqslant 0$, F_n 是 $\mathcal{R}\{x\}$ 上的一个 n 次非负整系数多项式.

证明　因为 $F_0=1$, F_0 是一个 0 次非负整系数多项式. 归纳地, 假设对任何整数 k $(n-1\geqslant k\geqslant 1)$, F_k 都是 x 的 k 次非负整系数多项式, 往证 F_n 是 x 的一个 n 次非负整系数多项式.

首先注意到, 在式 (5.1.8) 中, 由 $H_{n-i-1}=F_{n-i-1}|_{x=1}$, 有

$$(1-x)\big|H_{n-i-1}-xF_{n-i-1},$$

即 $1-x$ 是 $H_{n-i-1}-xF_{n-i-1}$ 的一个因子. 从而, 在式 (5.1.8) 的基础上, 由于 F_k $(n-1\geqslant k\geqslant 1)$ 是 x 的多项式 (归纳假设), 故 F_n 是 x 的一个多项式.

进而对任何多项式 F, 令 $m_F = m(F)$ 为 F 的次和, 记 $m_n = m(F_n)$. 由式 (5.1.8), 有

$$\begin{aligned} m_n &= \max_{n-1\geqslant i\geqslant 0} m(xF_{n-i-1}) = 1+m\Big(\frac{H_{n-1}-xF_{n-1}}{1-x}\Big) \\ &= 1+m(F_{n-1}) = 1+m_{n-1} = 1+(n-1) = n. \end{aligned} \tag{5.1.9}$$

从而, 引理得证. □

在上面的证明过程中, 还可以看出对于所有 $n\geqslant 1$, F_n 的常数项都是零. 因此, 由式 (5.1.9), 我们可令

$$F_n = F_{1,n}+F_{2,n}+\cdots+F_{n,n}, \quad \{F_{j,n}|n\geqslant j\geqslant 1\}\subseteq \mathcal{R}. \tag{5.1.10}$$

因为对任何整数 $j\geqslant 0$, 由式 (5.1.10), 得

$$\begin{aligned} H_j - xF_j &= \sum_{l=1}^{j} F_{l,j}\Big(1-x^{j+1}\Big) = (1-x)\sum_{l=1}^{j} F_{l,j}\Big(\sum_{s=0}^{j} x^s\Big) \\ &= (1-x)\Big(H_j + \sum_{l=1}^{j}\sum_{s=l}^{j} F_{s,j}x^l\Big). \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

将式 (5.1.11) 代入式 (5.1.8), 得

$$F_n = x\sum_{i=0}^{n-1} F_i\Big(H_{n-i-1} + \sum_{l=1}^{n-i-1}\sum_{s=l}^{n-i-1} F_{s,n-i-1}x^l\Big). \tag{5.1.12}$$

由式 (5.1.7) 和式 (5.1.12), 有

$$F_n = \begin{cases} 1, & n=0, \\ x\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} F_i\Big(H_{n-i-1} + \sum_{l=1}^{n-i-1} \varLambda_{l,n-i-1}x^l\Big) & (F_{0,k}=0, k\geqslant 1), \\ = x\Big(F_{n-1} + \displaystyle\sum_{i=0}^{n-2} F_i \sum_{l=0}^{n-i-1} \varLambda_{l,n-i-1}x^l\Big) & n\geqslant 1, \end{cases} \tag{5.1.13}$$

其中

$$\varLambda_{l,n-i-1} = \sum_{s=l}^{n-i-1} F_{s,n-i-1}. \tag{5.1.14}$$

定理 5.1.1 方程式 (5.1.1) 在 $\mathcal{R}\{x,y\}$ 中有且仅有一个非负整系数的解.

证明　由于式 (5.1.13) 和式 (5.1.14) 提供了方程组式 (5.1.6) 的唯一一组解, 故从方程组式 (5.1.6) 与方程式 (5.1.1) 的等价性, 即得定理. □

实际上, 式 (5.1.13) 和式 (5.1.14) 本身就给出了方程式 (5.1.1) 的解 f 的一个显函数表示. 虽然该表示便于利用计算机, 但形式上特别对于 h 看上去过于复杂. 还是需要探求直接确定 h 而不是由 f 导出 h, 或者简便的话, 从 h 导出 f.

例 5.1.1　无自环平面根地图依边数和根点次的同构分类. 在文献 [41] 中, 给出了无自环平面根地图以根点次 (x) 和边数 (y) 为参数的计数函数 f 所满足的方程

$$f=1+\frac{xy\delta_{1,x}(xf)}{1-xy\delta_{1,x}(xf)}. \tag{5.1.15}$$

不过注意, 为了避免记号上的混淆, 那里的 u, v 和 h 分别用 x, y 和 f 代替. 自然, 那里的 h_1 就是这里的 $h=f|_{x=1}$.

将式 (5.1.15) 的两端同乘 $1-xy\delta_{1,x}(xf)$, 化简后即得方程式 (5.1.1).

图 5.1.1 给出了边数为 0~2 的无自环平面根地图的分类.

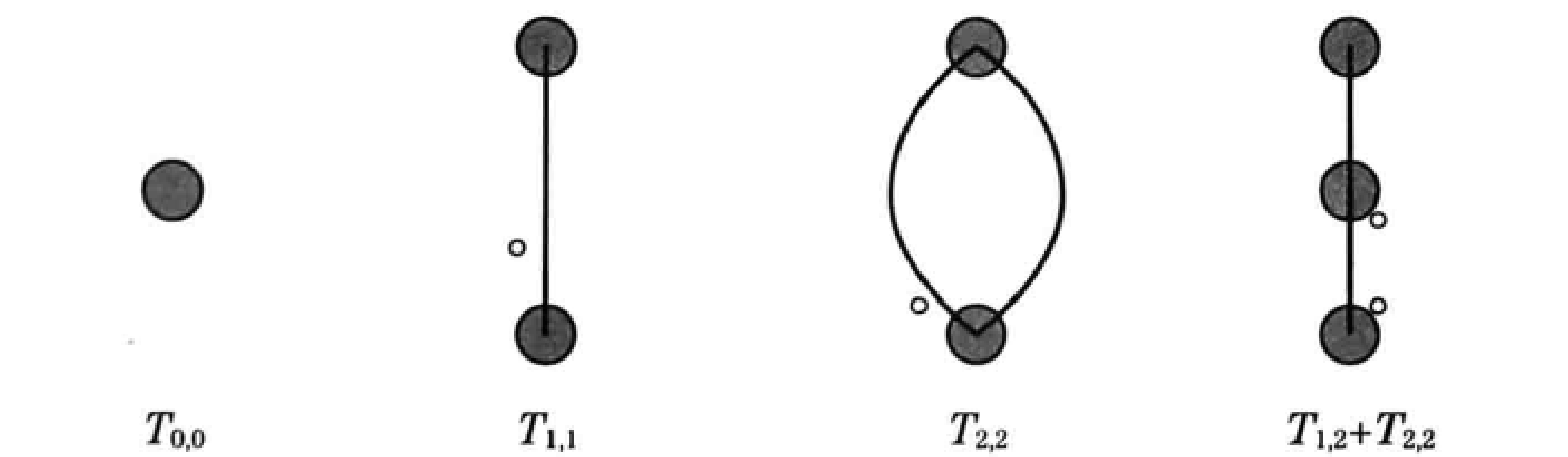


图 5.1.1　边数为 0 ~ 2 的无自环平面根地图的分类

图 5.1.2 给出了边数为 3 的无自环平面根地图的分类, 即

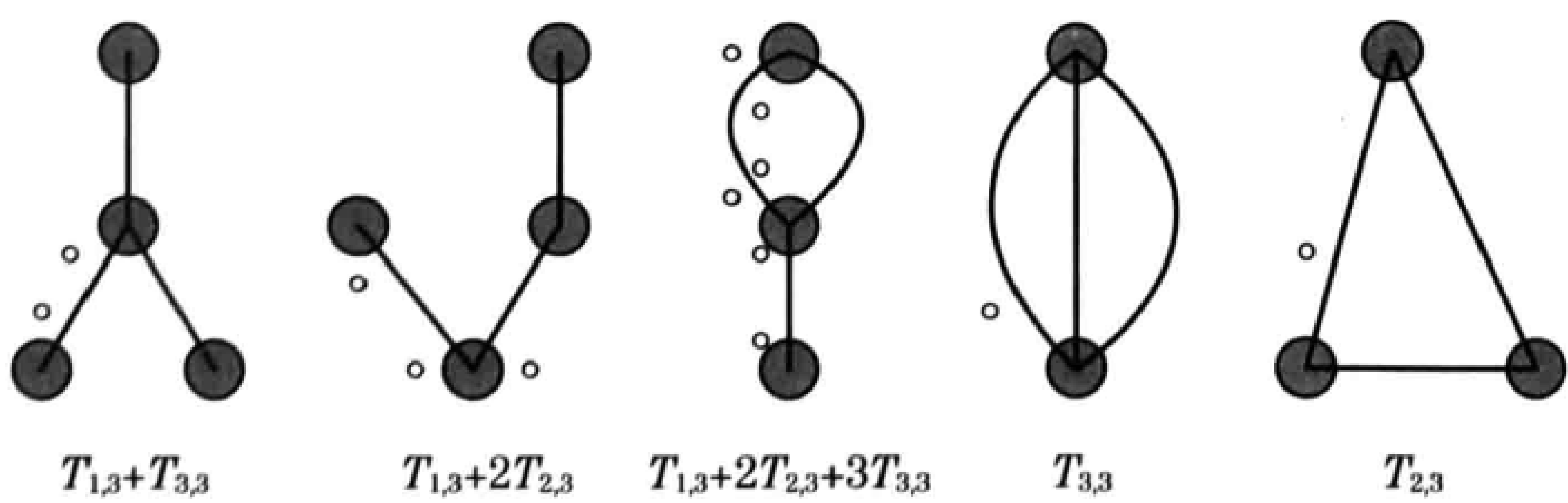


图 5.1.2　边数为 3 的无自环平面根地图的分类

$$
\begin{aligned}
&(T_{1,3}+T_{3,3})+(T_{1,3}+2T_{2,3})+(T_{1,3}+2T_{2,3}+3T_{3,3})+(T_{3,3})+(T_{2,3})\\
&\quad=(1+1+1)T_{1,3}+(2+2+1)T_{2,3}+(1+3+1)T_{3,3}\\
&\quad=3T_{1,3}+5T_{2,3}+5T_{3,3}.
\end{aligned}
$$

图 5.1.3 给出的是 4 条边无自环平面根地图的分类, 即

$$
\begin{aligned}
&(T_{1,4}+3T_{2,4})+(3T_{1,4}+2T_{2,4}+3T_{3,4})+(T_{1,4}+T_{4,4})\\
&+(T_{1,4}+4T_{2,4}+3T_{3,4})+(T_{1,4}+4T_{2,4}+3T_{3,4})\\
&\quad=(1+3+1+1+1)T_{1,4}+(3+2+4+4)T_{2,4}+(3+3+3)T_{3,4}+T_{4,4}\\
&\quad=7T_{1,4}+13T_{2,4}+9T_{3,4}+T_{4,4}.
\end{aligned}
$$

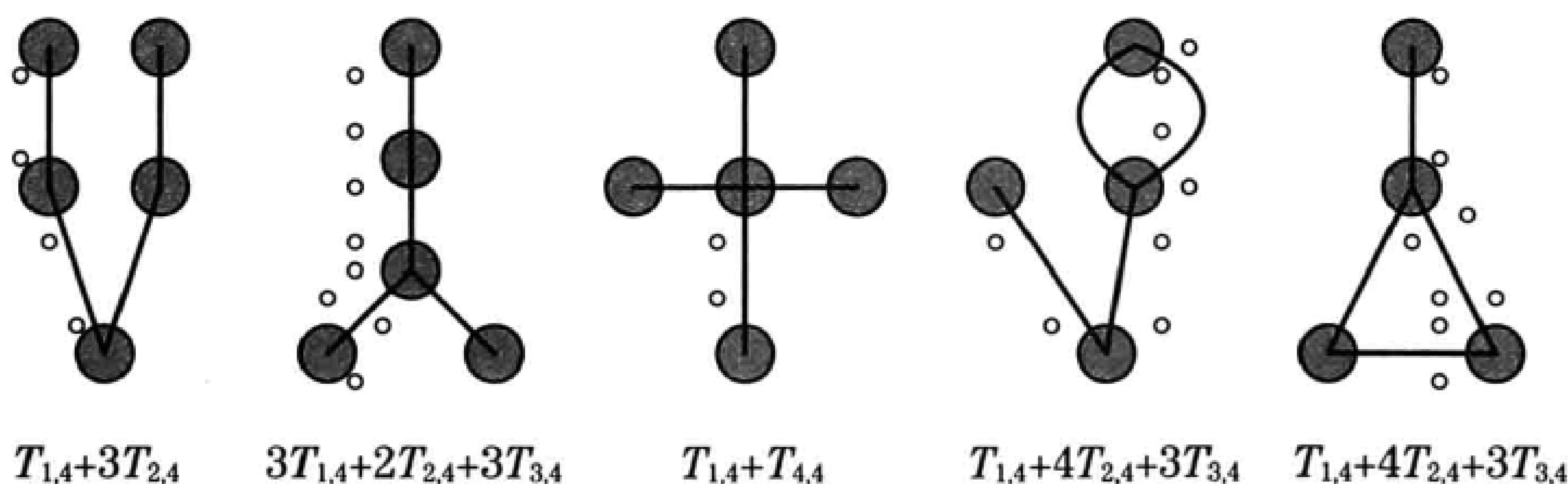


图 5.1.3 边数为 4 的无自环平面根地图的分类 (I)

图 5.1.4 和图 5.1.5 给出了 4 条边的无自环平面根地图的分类, 即

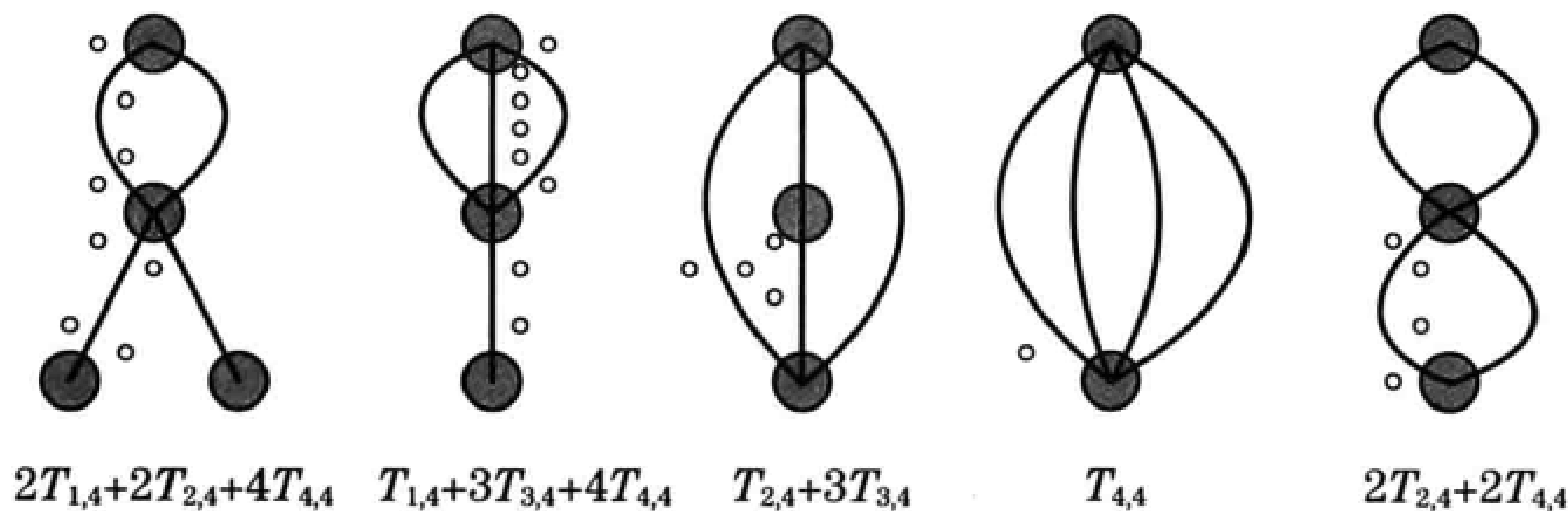


图 5.1.4 边数为 4 的无自环平面根地图的分类 (II)

$$
\begin{aligned}
&(2T_{1,4}+2T_{2,4}+4T_{4,4})+(T_{1,4}+3T_{3,4}+4T_{4,4})+(T_{2,4}+3T_{3,4})+(T_{4,4})\\
&+(2T_{2,4}+2T_{4,4})\\
&\quad=(2+1)T_{1,4}+(2+1+2)T_{2,4}+(3+3)T_{3,4}+(4+4+1+2)T_{4,4}\\
&\quad=3T_{1,4}+5T_{2,4}+6T_{3,4}+11T_{4,4},
\end{aligned}
$$

$$(T_{1,4}+T_{2,4}+2T_{4,4})+(T_{1,4}+3T_{3,4})+(T_{1,4}+3T_{3,4})+(T_{2,4})$$

$$= (1+1+1)T_{1,4} + (1+1)T_{2,4} + (3+3)T_{3,4} + (2)T_{4,4}$$
$$= 3T_{1,4} + 2T_{2,4} + 6T_{3,4} + 2T_{4,4}.$$

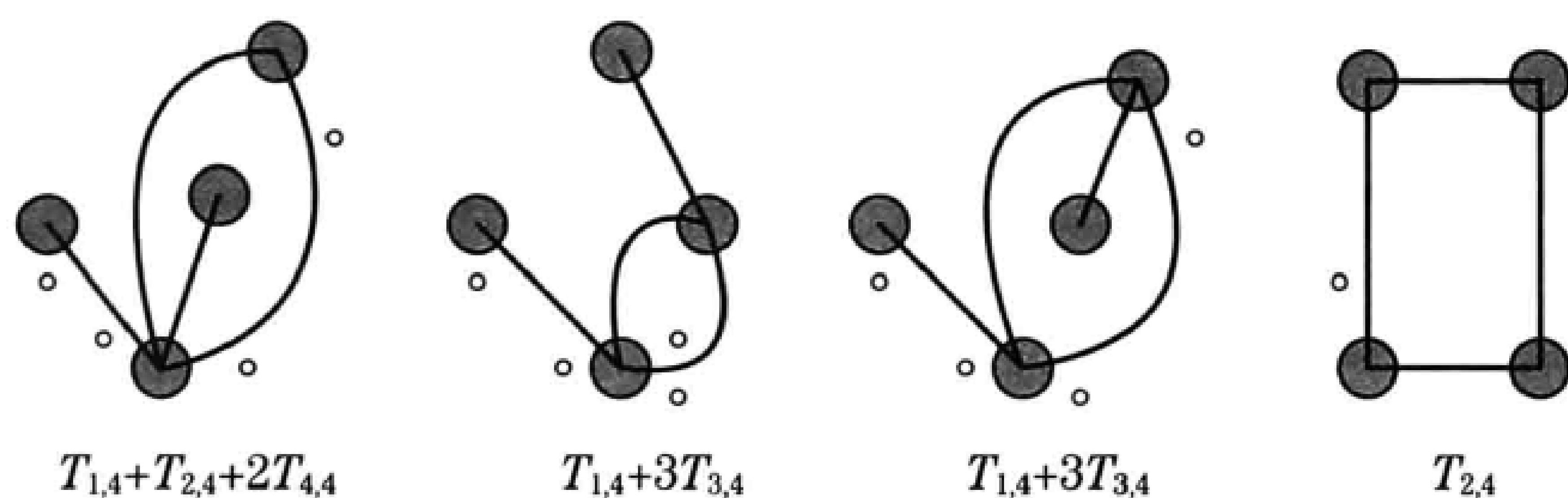


图 5.1.5　边数为 4 的无自环平面根地图的分类 (III)

综合图 5.1.3~图 5.1.5 的结果, 带 4 条边的无自环平面根地图的分类为

$$13T_{1,4} + 20T_{2,4} + 21T_{3,4} + 14T_{4,4},$$

也就是式 (5.1.13) 的 F_n 中 $n=4$ 时的情形,

$$F_4 = 13x + 20x^2 + 21x^3 + 14x^4.$$

5.2　多变直差式

考虑方程

$$\begin{cases} f\big(1+yzt(f_{t=1}+f_{z=1})\big) = 1 + yzt\big(\delta_{1,t}(tf) + \delta_{1,z}(zf)\big), \\ f|_{y=0\Rightarrow z=t=0} = 1. \end{cases} \tag{5.2.1}$$

在这个方程中, 既含对于变量 z 的直差分, 又含对于变量 t 的直差分, 故将它称为*多变直差式*.

先讨论适定性, 即这个方程是否有解, 若有解, 这个解是否是唯一的, 否则给出在什么条件下才具有适定性; 然后, 提供一种方法将这个解求出来.

因为 $f\in\mathcal{R}\{y,z,t\}$, 故只要由方程式 (5.2.1) 可以确定出 $F_n=\partial_y^n f\in\mathcal{R}\{z,t\}$ $(n\geqslant 0)$, 就得到它的一个解. 为了方便, 对 $\forall\, g\in\mathcal{R}\{y,z,t\}$, 常记 $[g]_n=\partial_y^n g$ $(n\geqslant 0)$. 自然, $[f]_n=F_n$.

由此即可导出

$$\begin{cases} [f|_{z=1}]_n = [f]_n|_{z=1} = F_n|_{z=1}, \\ [f|_{t=1}]_n = [f]_n|_{t=1} = F_n|_{t=1}, \end{cases} \tag{5.2.2}$$

$$\begin{cases} [\delta_{1,z}(zf)]_n = \dfrac{1}{1-z}\big([f|_{z=1}]_n - z[f]_n\big) \\ \qquad = \dfrac{1}{1-z}\big(F_n|_{z=1} - zF_n\big), \\ [\delta_{1,t}(tf)]_n = \dfrac{1}{1-t}\big([f|_{t=1}]_n - z[f]_n\big) \\ \qquad = \dfrac{1}{1-t}\big(F_n|_{t=1} - zF_n\big). \end{cases} \tag{5.2.3}$$

在式 (5.2.2) 和式 (5.2.3) 的基础上, 就可以从 F_0 起依次确定 F_n.

当 $n=0$ 时, 有

$$y^0 : [f\big(1+yzt(f|_{z=1}+f|_{t=1})\big)]_0 = [1+yzt\big(\delta_{1,z}(zf)+\delta_{1,t}(tf)\big)]_0.$$

由

$$[f\big(1+yzt(f|_{z=1}+f|_{t=1})\big)]_0 = [f]_0[1+yzt(f|_{z=1}+f|_{t=1})]_0 = F_0,$$
$$[1+yzt\big(\delta_{1,z}(zf)+\delta_{1,t}(tf)\big)]_0 = 1,$$

有

$$F_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad F_0|_{z=1} = 1,\ F_0|_{t=1} = 1. \tag{5.2.4}$$

当 $n=1$ 时, 有

$$y^1 : [f\big(1+yzt(f|_{z=1}+f|_{t=1})\big)]_1 = [1+yzt\big(\delta_{1,z}(zf)+\delta_{1,t}(tf)\big)]_1.$$

由

$$\begin{aligned} &[f\big(1+yzt(f|_{z=1}+f|_{t=1})\big)]_1 \\ &\quad = [f]_0[1+yzt(f|_{z=1}+f|_{t=1})]_1 + [f]_1[1+yzt(f|_{z=1}+f|_{t=1})]_0 \\ &\quad = zt[f|_{z=1}+f|_{t=1}]_0 + F_1 = F_1 + 2zt, \\ &[1+yzt\big(\delta_{1,z}(zf)+\delta_{1,t}(tf)\big)]_1 = zt[\delta_{1,z}(zf)+\delta_{1,t}(tf)]_0 = 2zt, \end{aligned}$$

有 $F_1 + 2zt = 2zt$, 即

$$F_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1|_{z=1} = 0,\ F_1|_{t=1} = 0. \tag{5.2.5}$$

对 $\forall\ n\geqslant 2$, 由方程式 (5.2.1), 有

$$y^n:[f\big(1+yzt(f|_{z=1}+f|_{t=1})\big)]_n=[1+yzt\big(\delta_{1,z}(zf)+\delta_{1,t}(tf)\big)]_n.$$

先看一看上面等式的左端,

$$\begin{aligned}[f\big(1+yzt(f|_{z=1}+f|_{t=1})\big)]_n&=\sum_{i=0}^{n}[f]_i[1-yzt(f|_{z=1}+f|_{t=1})]_{n-i}\\&=F_n+zt\sum_{i=0}^{n-1}F_i[f|_{z=1}+f|_{t=1}]_{n-i-1}\\&=F_n+zt\sum_{i=0}^{n-1}F_i\big(F_{n-i-1}|_{z=1}+F_{n-i-1}|_{t=1}\big).\end{aligned}$$

再看一看右端, 由于 $n\neq 0$, 所以

$$\begin{aligned}[1+yzt\big(\delta_{1,z}(zf)+\delta_{1,t}(tf)\big)]_n&=zt[\delta_{1,z}(zf)+\delta_{1,t}(tf)]_{n-1}\\&=zt\Big(\frac{F_{n-1}|_{z=1}-zF_{n-1}]}{1-z}+\frac{F_{n-1}|_{t=1}-tF_{n-1}]}{1-t}\Big).\end{aligned}$$

从而, 得

$$\begin{aligned}F_n=zt\Big(&\frac{F_{n-1}|_{z=1}-zF_{n-1}]}{1-z}+\frac{F_{n-1}|_{t=1}-tF_{n-1}]}{1-t}\\&-\sum_{i=0}^{n-1}F_i\big(F_{n-i-1}|_{z=1}+F_{n-i-1}|_{t=1}\big)\Big).\end{aligned}\tag{5.2.6}$$

而且 $F_n\in\mathcal{R}\{z,t\}$.

定理 5.2.1　方程式 (5.2.1) 在 $\mathcal{R}\{y,z,t\}$ 中有且仅有一个解.

证明　易见, 式 (5.2.4) 提供了方程式 (5.2.1) 的始条件. 由式 (5.2.6), 对 $\forall n\geqslant 1$, F_n 只由 F_i $(0\leqslant i\leqslant n-1)$ 确定. 从而, 方程式 (5.2.1) 在 $\mathcal{R}\{y,z,t\}$ 中有一个解.

由决定 F_n 的过程对于初始条件的唯一性, 可知这个解是仅有的. □

事实上, 式 (5.2.6) 已经使我们能够导出 F_n 的一个有限正项和表达式.

定理 5.2.2　方程式 (5.2.1) 在 $\mathcal{R}\{y,z,t\}$ 中的解是 $f=1$, 即

$$\partial_y^n f=\begin{cases}1, & n=0,\\ 0, & n\geqslant 1.\end{cases}\tag{5.2.7}$$

证明 当 $n=0$ 时, 式 (5.2.7) 就是方程式 (5.2.1) 的始条件. 当 $n=1$ 时, 由式 (5.2.5) 给出 $F_1=0$. 假设对于 $n-1\geqslant i\geqslant 1$, 已经得到 $F_i=0$. 下面, 用式 (5.2.6) 求 F_n. 由归纳假设, 知

$$\frac{F_{n-1}|_{z=1}-zF_{n-1}]}{1-z}+\frac{F_{n-1}|_{t=1}-tF_{n-1}]}{1-t}=0,$$
$$\sum_{i=0}^{n-1}F_i\big(F_{n-i-1}|_{z=1}+F_{n-i-1}|_{t=1}\big)=F_0\big(F_{n-1}|_{z=1}+F_{n-1}|_{t=1}\big)=0.$$

再由式 (5.2.6), 即得 $F_n=0$. 从而, 定理得证. □

例 5.2.1 普通平面根地图的范色和方程. 在文献 [104] 中, Tutte 给出了如下的方程

$$\phi=1+\mu xz^2t-xzt\Big(\phi\phi_{t=1}-\frac{\phi_{t=1}-t\phi}{1-t}\Big)+\nu yzt^2-yzt\Big(\phi\phi_{z=1}-\frac{\phi_{z=1}-z\phi}{1-z}\Big). \tag{5.2.8}$$

如果在方程式 (5.2.8) 中取 $x=y$, 则 ϕ 变为

$$\phi=1+\mu yz^2t-yzt\Big(\phi\phi_{t=1}-\frac{\phi_{t=1}-t\phi}{1-t}\Big)+\nu yzt^2-yzt\Big(\phi\phi_{z=1}-\frac{\phi_{z=1}-z\phi}{1-z}\Big). \tag{5.2.9}$$

实际上, 方程式 (5.2.1) 就是方程式 (5.2.9) 中 $\mu=\nu=0$ 时的情形. 方程式 (5.2.8) 和方程式 (5.2.9) 都是多变直差式. 虽然都可用与方程式 (5.2.1) 相仿的方法讨论适定性和求解, 但解的形式比方程式 (5.2.1) 要复杂得多.

例 5.2.2 当色范式中的两个参数都为 0 时, 除节点地图的色范式为 1 外, 所有地图的色范式都是 0. 虽然这个结论可以只从色范式本身的内涵证明, 本节则从定理 5.2.2, 由方程式 (5.2.1) 的解直接导出.

5.3 单变斜差式

给定方程

$$\begin{cases} f=1+x^2yf^2+y\partial_{1,x}(x^2f)-xyhf-(h-1)(f-1), \\ f|_{x=0\Rightarrow y=0}=1, \end{cases} \tag{5.3.1}$$

其中 $h=f|_{x=1}\in\mathcal{R}\{y\}$. 因为在这个方程中仅含变量 x 的一个斜差分, 所以将这个方程称为单变斜差式.

因为 $f\in\mathcal{R}\{x,y\}$, 故 f 由

$$F_n=[f]_n=\partial_y^n f\in\mathcal{R}\{x\}\quad(n\geqslant 0)\tag{5.3.2}$$

确定. 从而, 求解方程式 (5.3.1) 的问题就变成从始条件出发, 用方程式 (5.3.1) 本身导出所有 F_n $(n\geqslant 1)$.

假若 F_i $(0\leqslant i\leqslant n)$ 已经确定, 则

$$F_n^{[2]}=[f^2]_n=\partial_y^n f^2=\sum_{i=0}^{n}F_iF_{n-i}.\tag{5.3.3}$$

因为

$$[hf]_n=\partial_y^n(hf)=\sum_{i=0}^{n}[h]_i[f]_{n-i},\tag{5.3.4}$$

$$[h]_n=\begin{cases}F_0(=1=F_0|_{x=1}), & n=0\ (\text{即始条件}),\\ F_n|_{x=1}, & n\geqslant 1,\end{cases}\tag{5.3.5}$$

故

$$[hf]_n=\sum_{i=0}^{n}F_i|_{x=1}F_{n-i}.\tag{5.3.6}$$

进而, 还有

$$[\partial_{1,x}(x^2f)]_n=\frac{x}{1-x}(F_n|_{x=1}-xF_n),\tag{5.3.7}$$

$$\begin{aligned}[(h-1)(f-1)]_n&=\sum_{i=0}^{n}[h-1]_i[f-1]_{n-i}\\&=\begin{cases}0, & n=0,\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}[h]_if_{n-i}, & n\geqslant 1.\end{cases}\end{aligned}\tag{5.3.8}$$

在此基础上, 利用方程式 (5.3.1), 即可得到

$$\begin{aligned}y^0:[f]_0&=1-[(h-1)(f-1)]_0=1([h]_0-1)([f]_0-1)=1-(F_0-1)^2\\&\Rightarrow\quad F_0=1-(F_0-1)^2=2F_0-F_0^2\\&\Rightarrow\quad 0=F_0(1-F_0).\end{aligned}$$

由方程式 (5.3.1) 的始条件, 只能取

$$F_0 = 1. \tag{5.3.9}$$

从方程式 (5.3.1), 还有

$$y^1: \ [f]_1 = x^2[f^2]_0 + [\partial_{1,x}(x^2 f)]_0 - x[hf]_0 - [(h-1)(f-1)]_1. \tag{5.3.10}$$

由式 (5.3.9), 知 $[h-1]_0 = [f-1]_0 = F_0 - 1 = 0$. 对于整数 $n \geqslant 2$,

$$[(h-1)(f-1)]_n = \sum_{i=1}^{n-1}[h]_i[f]_{n-i}. \tag{5.3.11}$$

当 $n=1$ 时, $[(h-1)(f-1)]_1 = 0$. 从而, 式 (5.3.10) 变为

$$[f]_1 = x^2[f^2]_0 + [\partial_{1,x}(x^2 f)]_0 - x[hf]_0.$$

利用式 (5.3.3) 和式 (5.3.7), 有

$$F_1 = x^2 F_0^2 + x - xF_0^2 = x^2. \tag{5.3.12}$$

如果对于整数 $n \geqslant 1$, 所有 F_i $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ 已被导出, 则由方程式 (5.3.1) 以及式 (5.3.3) ~ 式 (5.3.8), 有

$$\begin{aligned} y^n: [f]_n &= x^2[f^2]_{n-1} + [\partial_{1,x}(x^2 f)]_{n-1} - x[hf]_{n-1} - [(h-1)(f-1)]_n \\ &= x^2\sum_{i=0}^{n-1} F_i F_{n-1-i} + \frac{x}{1-x}(F_{n-1}|_{x=1} - xF_{n-1}) \\ &\quad - x\sum_{i=0}^{n-1} F_i|_{x=1} F_{n-1-i} - \sum_{i=1}^{n-1} F_i|_{x=1} F_{n-i}. \end{aligned} \tag{5.3.13}$$

引理 5.3.1 对于任何整数 $n \geqslant 1$, F_n 是 x 的最小次不低于 2 的一个 $2n$ 次多项式.

证明 当 $n=1$ 时, 由式 (5.3.12), 引理的结论成立.

对于 $n \geqslant 2$, 归纳地, 假设 F_i $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ 都是 x 的最小次为 2 的一个 $2i$ 次多项式. 用 $d(P)$ 表示多项式的次. 由归纳假设, 可知

$$d\Big(\sum_{i=0}^{n-1} F_i F_{n-1-i}\Big) = 2i + 2(n-1-i) = 2(n-1),$$

$$d(F_{n-1}|_{x=1} - F_{n-1}) = 1 + 2(n-1) = 2n-1,$$

$$d\Big(\sum_{i=0}^{n-1} F_i|_{x=1} F_{n-1-i}\Big) \leqslant 2(n-1),$$

$$d\Big(\sum_{i=1}^{n-1} [h]_i [f]_{n-i}\Big) \leqslant 2(n-1).$$

由式 (5.3.13), 有

$$d(F_n) = 2 + 2(n-1) = 2n. \tag{5.3.14}$$

再考虑到, F_n 无 x 的 0 次项和 1 次项, 即得引理的结论. □

这个引理使我们可以将 F_n $(n \geqslant 1)$ 表示为

$$F_n = \sum_{m=2}^{2n} F_{m,n} x^m \quad (F_{m,n} \in \mathcal{R}). \tag{5.3.15}$$

从而, 有

$$\begin{aligned} \frac{F_{n-1}|_{x=1} - xF_{n-1}}{1-x} &= \frac{1}{1-x}\Big(\sum_{m=2}^{2(n-1)} F_{m,n-1}(1-x^{m+1})\Big) \\ &= \sum_{m=2}^{2(n-1)} F_{m,n-1} \sum_{i=0}^{m} x^i = \sum_{i=0}^{2(n-1)} \Lambda_{i,n-1} x^i, \end{aligned} \tag{5.3.16}$$

其中

$$\Lambda_{i,n-1} = \sum_{m=\max\{2,i\}}^{2(n-1)} F_{m,n-1}. \tag{5.3.17}$$

定理 5.3.1 方程式 (5.3.1) 在 $\mathcal{R}\{x,y\}$ 中有且仅有一个解.

证明 通过式 (5.3.2) ~ 式 (5.3.13) 所得的 F_n $(n \geqslant 0)$, 提供了方程式 (5.3.1) 的一个解 f. 由 $F_n \in \mathcal{R}\{x\}$, 知 $f \in \mathcal{R}\{x,y\}$. 再由 F_n 对于始条件的唯一性, 这个解是仅有的. □

引理 5.3.2 对于任何整数 $n \geqslant 3$, 多项式 F_n 的最小次不小于 n.

证明 可以用式 (5.3.13) 验证. 当 $n = 1, 2$ 时, F_n 的最小次都大于 n, F_3 的最小次为 3.

归纳地, 假设对于任何整数 i $(3 \leqslant i \leqslant n-1)$, 多项式 F_i 的最小次为 i. 由引理 5.3.1, 有

$$F_i = \sum_{m=i}^{2i} F_{m,i} x^i. \tag{5.3.18}$$

用 $l(F_i)$ 表示多项式 F_i 的最小次, 则 $l(F_i)=i$. 由

$$\frac{F_{n-1}|_{x=1}-xF_{n-1}}{1-x}=\sum_{i=0}^{2(n-1)}\Big(\sum_{m=\langle n-1,i\rangle}^{2(n-1)}F_{m,n-1}\Big)x^i, \tag{5.3.19}$$

有

$$\begin{aligned}[\partial_{1,x}(x^2f)]_{n-1}&=x\sum_{i=0}^{2(n-1)}\Big(\sum_{m=\langle n-1,i\rangle}^{2(n-1)}F_{m,n-1}\Big)x^i\\&=\sum_{i=0}^{2(n-1)}\Big(\sum_{m=\langle n-1,i\rangle}^{2(n-1)}F_{m,n-1}\Big)x^{i+1},\end{aligned} \tag{5.3.20}$$

式中 $\langle n-1,i\rangle=\max\{n-1,i\}$,

$$x[hf]_{n-1}=\sum_{m=0}^{2(n-1)}\varPsi_{m,n-1}x^{m+1}, \tag{5.3.21}$$

这里

$$\varPsi_{m,n-1}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=n-1-m}^{n-1-\lfloor m/2\rfloor}F_i|_{x=1}F_{m,n-1-i}, & 0\leqslant m\leqslant n-1,\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1-\lfloor m/2\rfloor}F_i|_{x=1}F_{m,n-1-i}, & n\leqslant m\leqslant 2(n-1),\end{cases}$$

以及

$$[(h-1)(f-1)]_n=\sum_{m=1}^{2(n-1)}\varPhi_{m,n-1}x^m, \tag{5.3.22}$$

其中

$$\varPhi_{m,n-1}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=n-m}^{n-1}F_i|_{x=1}F_{m,n-1-i}, & 1\leqslant m\leqslant 2,\\ \displaystyle\sum_{i=n-m}^{n-\lfloor m/2\rfloor}F_i|_{x=1}F_{m,n-1-i}, & 3\leqslant m\leqslant n-1,\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n-\lfloor m/2\rfloor}F_i|_{x=1}F_{m,n-1-i}, & n\leqslant m\leqslant 2(n-1).\end{cases}$$

断言 1 对于整数 $n-1\geqslant m\geqslant 0$, $n\geqslant 3$,

$$\varLambda_{m-1,n-1}-\varPsi_{m-1,n-1}-\varPhi_{m,n-1}=0.$$

说明　将从例 5.3.1 看出.

在此基础上, 利用式 (5.3.3)、式 (5.3.19) 和式 (5.3.13), 以及归纳假设, 有

$$\begin{aligned}l(F_n) &= \min\{2+l([f^2]_{n-1}), l([\partial_{1,x}(x^2 f)]_{n-1} - x[hf]_{n-1} - [(h-1)(f-1)]_n)\}\\ &\geqslant \min\{2+(n-1), n\} \geqslant n.\end{aligned}$$

从而, 引理得证. □

由引理 5.3.1 和引理 5.3.2, 记

$$[f^2]_{n-1} = \sum_{m=n-1}^{2(n-1)} \Omega_{m,n-1} x^m, \tag{5.3.23}$$

$$\Omega_{m,n-1} = \sum_{\substack{l+t=m\\(l,t)\in\mathcal{S}_{m,n-1}}} F_{l,i}F_{t,n-1-i}, \tag{5.3.24}$$

其中 $\mathcal{S}_{m,n-1} = \{(l,t) \mid i \leqslant l \leqslant 2i, n-1-i \leqslant t \leqslant 2(n-1-i), 0 \leqslant i \leqslant n-1\}$.

断言 2　对于整数 $2(n-1) \geqslant m \geqslant n-1$, $n \geqslant 3$,

$$\Lambda_{m-1,n-1} \geqslant \Psi_{m-1,n-1} + \Phi_{m,n-1}.$$

说明　同样, 将从例 5.3.1 看出.

引理 5.3.3　多项式 F_n 的所有系数都是非负整数.

证明　由断言 2, 即可得引理. □

至此, 我们能够给出方程式 (5.3.1) 的解的一个所有系数都是正项和的表达式.

定理 5.3.2　方程式 (5.3.1) 的解为

$$F_n = \begin{cases} 1, & n=0,\\ x^2, & n=1,\\ 2x^4, & n=2,\\ x^2 \displaystyle\sum_{m=n-1}^{2(n-1)} \Omega_{m,n-1}x^m + \sum_{m=n}^{2n} \Delta_{m,n-1}x^m, & n\geqslant 3,\end{cases} \tag{5.3.25}$$

其中

$$\Delta_{m,n-1} = \Lambda_{m-1,n-1} - \Psi_{m-1,n-1} - \Phi_{m,n-1}, \tag{5.3.26}$$

$\Omega_{m,n-1}, \Lambda_{m-1,n-1}, \Psi_{m-1,n-1}$ 和 $\Phi_{m,n-1}$ 分别由式 (5.3.24)、式 (5.3.17)、式 (5.3.21) 和式 (5.3.22) 给出.

证明 由上面提供的推导过程, 即可得定理的结论. □

从下面的例子, 可以看出方程式 (5.3.1) 的一些实际意义.

例 5.3.1 平面根单 (或简单) 地图按边数和根面次的同构分类. 一个单地图就是指既无重边也无自环. 以往的文献多称简单地图. 因为简单地图本身的结构常常并不简单, 故本书用单地图而不用简单地图以避免误解. 方程式 (5.3.1) 在文献 [39] 中是作为面节点剖分方程的一种特殊情形导出来的. 不过要注意符号上的不同和那里的一个笔误.

在图 5.3.1 ~ 图 5.3.3 中, $kS_{m,n}$ 表示其上的地图有 n 条边, 根面次 m, k(小空心圆的个数) 个不同根地图的同构类. 可看出:

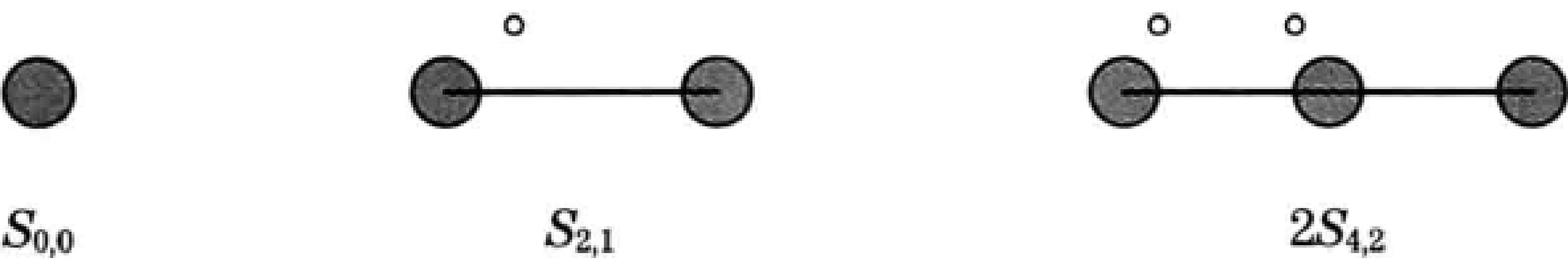


图 5.3.1 边数为 0 ~ 2 的平面根单地图的同构分类

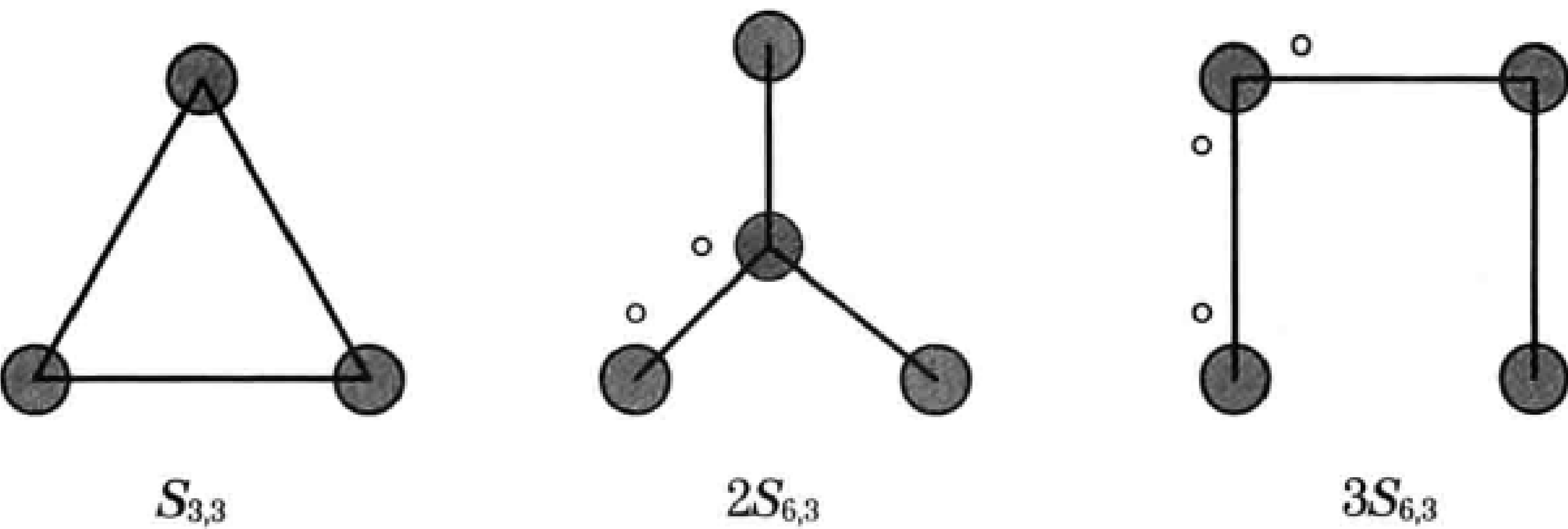


图 5.3.2 边数为 3 的平面根单地图的同构分类

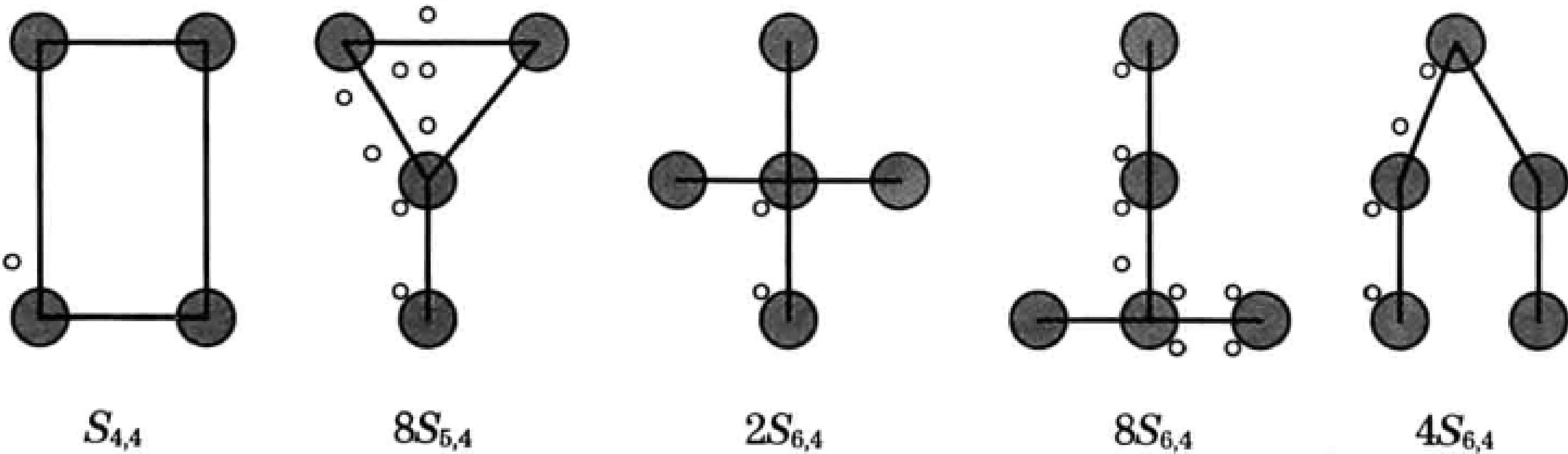


图 5.3.3 边数为 4 的平面根单地图的同构分类

当 $n=0$ 时, $1S_{0,0} \Leftrightarrow F_0 = 1$;
当 $n=1$ 时, $1S_{2,1} \Leftrightarrow F_1 = x^2$;

当 $n=2$ 时, $2S_{4,2} \Leftrightarrow F_2=2x^4$;
当 $n=3$ 时, $1S_{3,3}+5S_{6,3} \Leftrightarrow F_3=x^3+5x^6$;
当 $n=4$ 时, $1S_{4,4}+8S_{5,4}+14S_{8,4} \Leftrightarrow F_4=x^4+8x^5+14x^8$.
由此可见, 断言 1 和断言 2 的正确性是自然的.

例 5.3.2 方程

$$\begin{cases} f=1+zyf^2+y\partial_{1,z}(zf), \\ f|_{z=y=0}=1 \end{cases} \tag{5.3.27}$$

也是一类单变斜差式.

在文献 [50] 中, 作者给出了不可分离 Euler 平面根地图以边数 (y) 和根点次 (x) 为参数的计数函数 f 满足的方程

$$x^2y(1-x^2)f^2-(1-x^2+x^2y)f+(1-x^2)+x^2yh=0, \tag{5.3.28}$$

其中 $h=f|_{x=1}$.

如果将方程式 (5.3.28) 两端同除以 $1-x^2$, 用变量代换 $z=x^2$, 经过整理后, 即可得方程式 (5.3.27).

可见, 不可分离 Euler 平面地图依边数和根点次的根同构分类, 也可通过解单变斜差式的差分函数方程得到.

5.4 多变斜差式

在一个多变量函数的方程中, 如果含这个函数至少对于两个变量的斜差分, 则称之为多变斜差式.

考虑方程

$$\begin{cases} f=2yz^2t+\dfrac{yzt\partial_{1,z}f}{1-\dfrac{\partial_{1,z}f_{t=1}}{2}}-\dfrac{yzt\partial_{1,t}f}{1-\dfrac{\partial_{1,t}f_{z=1}}{2}}, \\ f|_{y=0\Rightarrow z=t=0}=0. \end{cases} \tag{5.4.1}$$

因为 $f\in\mathcal{R}\{z,t,y\}$, 只需确定 $F_n=[f]_n=\partial_y^n f \ (n\geqslant 0)$.

首先, 由方程式 (5.4.1) 的始条件, 可知

$$F_0=[f]_0=f|_{y=0\Rightarrow z=t=0}=0. \tag{5.4.2}$$

由此, 对任何整数 $n \geqslant 0$, 可得

$$\begin{cases} [f|_{z=1}]_n = F_n|_{z=1} \ (n \geqslant 1), \quad [f|_{z=1}]_0 = 0, \\ [f|_{t=1}]_n = F_n|_{t=1} \ (n \geqslant 1), \quad [f|_{t=1}]_0 = 0. \end{cases} \tag{5.4.3}$$

进而, 有

$$[\partial_{1,z} f]_n = \frac{zF_n|_{z=1} - F_n}{1-z} = \begin{cases} 0, & n=0, \\ \dfrac{tF_n|_{t=1} - F_n}{1-t}, & n>0, \end{cases} \tag{5.4.4}$$

$$[\partial_{1,t} f]_n = \frac{tF_n|_{t=1} - F_n}{1-t} = \begin{cases} 0, & n=0, \\ \dfrac{zF_n|_{z=1} - F_n}{1-z}, & n>0, \end{cases} \tag{5.4.5}$$

$$\begin{aligned}[\partial_{1,z} f_{t=1}]_n &= \frac{zF_n|_{t=1,z=1} - F_n|_{t=1}}{1-z} \\ &= \begin{cases} 0, & n=0, \\ \dfrac{zF_n|_{t=1,z=1} - F_n|_{t=1}}{1-z}, & n>0, \end{cases}\end{aligned} \tag{5.4.6}$$

$$\begin{aligned}[\partial_{1,t} f_{z=1}]_n &= \frac{tF_n|_{z=1,t=1} - F_n|_{z=1}}{1-t} \\ &= \begin{cases} 0, & n=0, \\ \dfrac{tF_n|_{z=1,t=1} - F_n|_{z=1}}{1-t}, & n>0. \end{cases}\end{aligned} \tag{5.4.7}$$

注意到

$$\left(1 - \frac{\partial_{1,z} f|_{t=1}}{2}\right)^{-1} = \sum_{i \geqslant 0} \left(\frac{\partial_{1,z} f|_{t=1}}{2}\right)^i.$$

由式 (5.4.6), 对任何整数 $i \geqslant 0$, 有

$$y^i \Big| \left(\frac{\partial_{1,z} f|_{t=1}}{2}\right)^i,$$

从而

$$\left[\left(1 - \frac{\partial_{1,z} f|_{t=1}}{2}\right)^{-1}\right]_i = \left[\sum_{j=0}^{i} \left(\frac{\partial_{1,z} f|_{t=1}}{2}\right)^i\right]_i. \tag{5.4.8}$$

类似地, 由式 (5.4.6), 对任何整数 $i \geqslant 0$, 有

$$\left[\left(1 - \frac{\partial_{1,t} f|_{z=1}}{2}\right)^{-1}\right]_i = \left[\sum_{j=0}^{i} \left(\frac{\partial_{1,t} f|_{z=1}}{2}\right)^j\right]_i. \tag{5.4.9}$$

现在, 开始依次确定 F_n ($n=0,\ 1,\ 2,\cdots$).

当 $n=0$ 时, 由方程式 (5.4.1) 以及式 (5.4.3) ~ 式 (5.4.9), 得

$$\begin{aligned}&y^0: F_0=0 \quad \Rightarrow\\&\quad [f|_{z=1}]_0=[f|_{t=1}]_0=0, \quad [\partial_{1,z}f]_0=[\partial_{1,t}f]_0=0,\\&\quad [\partial_{1,z}f|_{t=1}]_0=[\partial_{1,t}f|_{z=1}]_0=0,\\&\quad \left[\left(1-\frac{\partial_{1,z}f|_{t=1}}{2}\right)^{-1}\right]_0=1, \quad \left[\left(1-\frac{\partial_{1,t}f|_{z=1}}{2}\right)^{-1}\right]_0=1.\end{aligned} \tag{5.4.10}$$

这就是方程式 (5.4.1) 的始条件.

当 $n=1$ 时, 由方程式 (5.4.1) 和式 (5.4.10), 得

$$\begin{aligned}&y^1: F_1=2z^2t+zt\big([\partial_{1,z}f]_0-[\partial_{1,t}f]_0\big)=2z^2t \quad \Rightarrow\\&\quad [f|_{z=1}]_1=2t, \quad [f|_{t=1}]_1=2z^2, \quad [\partial_{1,z}f]_1=2zt, \quad [\partial_{1,t}f]_1=0,\\&\quad [\partial_{1,z}f|_{t=1}]_1=2, \quad [\partial_{1,t}f|_{z=1}]_1=0,\\&\quad \left[\left(1-\frac{\partial_{1,z}f|_{t=1}}{2}\right)^{-1}\right]_1=2, \quad \left[\left(1-\frac{\partial_{1,t}f|_{z=1}}{2}\right)^{-1}\right]_0=0.\end{aligned} \tag{5.4.11}$$

当 $n=2$ 时, 由方程式 (5.4.1) 和式 (5.4.11), 得

$$\begin{aligned}&y^2: F_2=zt\left(\left[\frac{\partial_{1,z}f}{1-\dfrac{\partial_{1,z}f|_{t=1}}{2}}\right]_1-\left[\frac{\partial_{1,t}f}{1-\dfrac{\partial_{1,t}f|_{z=1}}{2}}\right]_1\right)=zt[\partial_{1,z}f]_1=2z^2t^2 \quad \Rightarrow\\&\quad [f|_{z=1}]_2=2t^2, \quad [f|_{t=1}]_2=2z^2, \quad [\partial_{1,z}f]_2=2zt^2, \quad [\partial_{1,t}f]_2=2z^2t,\\&\quad [\partial_{1,z}f|_{t=1}]_2=2, \quad [\partial_{1,t}f|_{z=1}]_2=2,\\&\quad \left[\left(1-\frac{\partial_{1,z}f|_{t=1}}{2}\right)^{-1}\right]_2=2zt+t^2, \quad \left[\left(1-\frac{\partial_{1,t}f|_{z=1}}{2}\right)^{-1}\right]_2=2.\end{aligned} \tag{5.4.12}$$

对一般情形 ($n\geqslant 3$), 先讨论

$$\left(1-\frac{\partial_{1,z}f|_{t=1}}{2}\right)^{-1} \quad 和 \quad \left(1-\frac{\partial_{1,t}f|_{z=1}}{2}\right)^{-1}$$

如何用 F_i ($0\leqslant i\leqslant n-1$) 表示出来.

由式 (5.4.8) 和式 (5.4.9), 有

$$\left[\left(1-\frac{\partial_{1,z}f|_{t=1}}{2}\right)^{-1}\right]_i=\sum_{j=0}^{i}\left[\left(\frac{\partial_{1,z}f|_{t=1}}{2}\right)^j\right]_i \quad (即\ \Sigma_i^{(z)}), \tag{5.4.13}$$

$$\left[\left(1-\frac{\partial_{1,t}f|_{z=1}}{2}\right)^{-1}\right]_i=\sum_{j=0}^{i}\left[\left(\frac{\partial_{1,t}f|_{z=1}}{2}\right)^j\right]_i \quad (即\ \Sigma_i^{(t)}). \tag{5.4.14}$$

因为 $\partial_{1,z}f|_{t=1}$, $\partial_{1,t}f|_{z=1}\in\mathcal{R}\{z,t\}$, 故由乘积原则, 有

$$\left[\left(\frac{\partial_{1,z}f|_{t=1}}{2}\right)^j\right]_i,\ \left[\left(\frac{\partial_{1,t}f|_{z=1}}{2}\right)^j\right]_i\in\mathcal{R}\{z,t\}.$$

考虑到它们都仅由 F_0, F_1, $\cdots$, F_i 确定, 可知式 (5.4.13) 和式 (5.4.14) 也仅由 F_0, F_1, $\cdots$, F_i 确定.

定理 5.4.1 方程式 (5.4.1) 在 $\mathcal{R}\{z,t,y\}$ 中有且仅有一个解.

证明 只需确定 $F_n=\partial_y^n f\in\mathcal{R}\{z,t\}$ $(n\geqslant 0)$. 由式 (5.4.10) $\sim$ 式 (5.4.12) 知, $F_0=0$(即方程的始条件!), $F_1=2z^2t$, $F_2=2z^2t^2$. 易见, 它们都属于 $\mathcal{R}\{z,t\}$.

对于 $n\geqslant 3$, 假设 $F_i\in\mathcal{R}\{z,t\}$ $(0\leqslant i\leqslant n-1)$ 都已经确定, 往证 $F_n\in\mathcal{R}\{z,t\}$.

利用方程式 (5.4.1), 由 $n\geqslant 3$, 有

$$\begin{aligned}y^n:\ F_n&=zt\sum_{i=0}^{n-1}\left([\partial_{1,z}f]_i\left[1-\frac{\partial_{1,z}f|_{t=1}}{2}\right]_{n-1-i}-[\partial_{1,t}f]_i\left[1-\frac{\partial_{1,t}f|_{z=1}}{2}\right]_{n-1-i}\right)\\&=zt\sum_{i=0}^{n-1}([\partial_{1,z}f]_i\Sigma_{n-1-i}^{(z)}-[\partial_{1,t}f]_i\Sigma_{n-1-i}^{(t)}),\end{aligned}\tag{5.4.15}$$

其中 $\Sigma_{n-1-i}^{(z)}$ 和 $\Sigma_{n-1-i}^{(t)}$ 分别由式 (5.4.13) 和式 (5.4.14) 给出.

由式 (5.4.4) $\sim$ 式 (5.4.9) 知, 式 (5.4.15) 的右端只依赖 F_i $(0\leqslant i\leqslant n-1)$. 由归纳假设, 可以看出 $F_n\in\mathcal{R}\{z,t\}$. 从而, $f\in\mathcal{R}\{z,t,y\}$ 是方程式 (5.4.1) 的一个解.

从上面的推导过程中对给定初始条件的唯一性可知, 方程式 (5.4.1) 的这个解是唯一的. □

下面, 进一步讨论 F_n $(n\geqslant 1)$ 的结构特征.

引理 5.4.1 对于任何整数 $n\geqslant 1$, $2\big|F_n$, 即 2 是 F_n 的一个因子.

证明 由式 (5.4.11) 和式 (5.4.11) 知, 当 $n=1$, 2 时, $2\big|F_n$.

假若对于任一整数 i $(2\leqslant i\leqslant n-1)$, 都已经得到 $2\big|F_n$, 往证 $i=n$ 时的情形.

由式 (5.4.4) 和式 (5.4.5), 再由归纳假设, 可知 $2\big|[\partial_{1,z}f]_i$, $2\big|[\partial_{1,t}f]_i$ $(0\leqslant i\leqslant n-1)$. 从式 (5.4.15), 即得 $2\big|F_n$. □

引理 5.4.2 对于任何整数 $n\geqslant 1$, F_n 不管对于 z 还是对于 t, 都是一个最低次不小于 2 的 n 次多项式.

证明 由式 (5.4.11) 和式 (5.4.12) 知, 当 $n=1$, 2 时, 引理的结论成立. 为叙述方便, 记 $d_z(P)$ 和 $d_t(P)$ 分别为多项式 $P\in\mathcal{R}\{z,t\}$ 对于 z 和 t 的次.

归纳地, 假设对于 F_k $(2 \leqslant k \leqslant n-1)$, 引理的结论成立, 往证对于 F_n, 引理的结论也成立.

断言 1　对于整数 $n \geqslant 3$,

$$\sum_{i=0}^{n-1}[\partial_{1,z}f]_i\Sigma_{n-1-i}^{(z)} - \sum_{i=0}^{n-1}[\partial_{1,t}f]_i\Sigma_{n-1-i}^{(t)} \geqslant 0.$$

说明　从例 5.4.2 中可看出断言 1 成立.

断言 2　对于整数 s $(1 \leqslant s \leqslant n-1)$, $d_z(\Sigma_s^{(z)}) \leqslant s$.

说明　由归纳假设和式 (5.4.13), 即可导出结论.

由式 (5.4.15), 有

$$\begin{aligned}
d_z(F_n) &= 1 + d_z\left(\sum_{i=0}^{n-1}([\partial_{1,z}f]_i\Sigma_{n-1-i}^{(z)} - [\partial_{1,t}f]_i\Sigma_{n-1-i}^{(t)})\right) \quad (\text{断言 } 1)\\
&= 1 + d_z\left(\sum_{i=0}^{n-1}([\partial_{1,z}f]_i\Sigma_{n-1-i}^{(z)}\right)\\
&= 1 + \max_{0\leqslant i\leqslant n-1} d_z([\partial_{1,z}f]_i) + d_z(\Sigma_{n-1-i}^{(z)})\\
&= 1 + d_z([\partial_{1,z}f]_1) + d_z(\Sigma_{n-2}^{(z)}) \quad (\text{断言 } 2)\\
&= 1 + (1+n-2) = n, \qquad (5.4.16)\\
d_t(F_n) &= 1 + \max_{0\leqslant i\leqslant n-1} d_t([\partial_{1,z}f]_i) + d_t(\Sigma_{n-1-i}^{(z)})\\
&= 1 + d_t([\partial_{1,z}f]_{n-1}) + d_t(\Sigma_0^{(z)})\\
&= 1 + (n-1) + 0 = n. \qquad (5.4.17)
\end{aligned}$$

从而, F_n 是一个不管对 z 还是对 t 都是 n 次的多项式.

可以看出, 对于 $n \geqslant 2$, $zt\big|[\partial_{1,z}f]_n$. 由式 (5.4.15), 知 $z^2t^2\big|[\partial_{1,z}f]_n$, 即 F_n 不管对 z 还是对 t 的最小次均不小于 2. □

引理 5.4.3　对于任何整数 $n \geqslant 1$, F_n 的系数都是非负整数.

证明　由式 (5.4.15) 看出, 断言 1 导致多项式 F_n 的系数非负. 至于系数的整数性, 则可从 $F_n \in \mathcal{R}\{z,t\}$ 直接得到. □

在定理 5.4.1 和引理 5.4.1~引理 5.4.3 的基础上, 令

$$[f]_n = F_n = \sum_{\substack{2\leqslant m\leqslant n\\ 2\leqslant s\leqslant n}} F_{m,s;n}z^m t^s \quad (0 \leqslant F_{m,s;n} \in \mathcal{R}). \qquad (5.4.18)$$

由此即可得

$$\begin{cases}[\partial_{1,z}f]_n=\sum\limits_{\substack{1\leqslant m\leqslant n-1\\2\leqslant s\leqslant n}}\Big(\sum\limits_{k=m+1}^{n}F_{k,s;n}\Big)z^mt^s,\\[\partial_{1,z}f|_{t=1}]_n=\sum\limits_{\substack{1\leqslant m\leqslant n-1\\2\leqslant s\leqslant n}}\Big(\sum\limits_{k=m+1}^{n}F_{k,s;n}\Big)z^m,\end{cases}\tag{5.4.19}$$

$$\begin{cases}[\partial_{1,t}f]_n=\sum\limits_{\substack{2\leqslant m\leqslant n\\1\leqslant s\leqslant n-1}}\Big(\sum\limits_{k=s+1}^{n}F_{m,k;n}\Big)z^mt^s,\\[\partial_{1,t}f|_{z=1}]_n=\sum\limits_{\substack{2\leqslant m\leqslant n\\1\leqslant s\leqslant n-1}}\Big(\sum\limits_{k=s+1}^{n}F_{m,k;n}\Big)z^m.\end{cases}\tag{5.4.20}$$

基于式 (5.4.18), 对任何一个整数 $i\geqslant 2$, 记

$$[f^i]_n=F_n^{[i]}=\begin{cases}\sum\limits_{l=0}^{n}F_lF_{n-l}, & i=2,\\ \sum\limits_{l=0}^{n}F_lF_{n-l}^{[i-1]}, & i\geqslant 3,\end{cases}\tag{5.4.21}$$

则由式 (5.4.13) 和式 (5.4.14), 有

$$\begin{aligned}&\Sigma_i^{(z)}=\begin{cases}1, & i=0,\\ \sum\limits_{j=1}^{i}\Big[\dfrac{\partial_{1,z}f|_{t=1}}{2}\Big]_i^{[j]}, & i\geqslant 1,\end{cases}\\ &\Sigma_i^{(t)}=\begin{cases}1, & i=0,\\ \sum\limits_{j=1}^{i}\Big[\dfrac{\partial_{1,t}f|_{z=1}}{2}\Big]_i^{[j]}, & i\geqslant 1.\end{cases}\end{aligned}\tag{5.4.22}$$

从而, 由式 (5.4.19)、式 (5.4.20) 和式 (5.4.22), 可得

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{n-1}[\partial_{1,z}f]_i\Sigma_{n-1-i}^{(z)}=\sum\limits_{1\leqslant m,s\leqslant n-1}A_{m,s;n-1}z^mt^s,\\ \sum\limits_{i=0}^{n-1}[\partial_{1,t}f]_i\Sigma_{n-1-i}^{(t)}=\sum\limits_{1\leqslant m,s\leqslant n-1}B_{m,s;n-1}z^mt^s,\end{cases}\tag{5.4.23}$$

其中 $A_{m,s;n-1}$, $B_{m,s;n-1}\in\mathcal{R}\{z,t\}$, $A_{m,s;n-1}-B_{m,s;n-1}\geqslant 0$(断言 1), 都只与 F_i $(0\leqslant i\leqslant n-1)$ 有关, 且由式 (5.4.19) ~ 式 (5.4.22) 确定.

定理 5.4.2 对于任何整数 $n \geqslant 3$,

$$F_n = \sum_{2 \leqslant m, k \leqslant n} F_{m,k;n} z^m t^k, \tag{5.4.24}$$

其中

$$F_{m,k;n} = A_{m-1,s-1;n-1} - B_{m-1,s-1;n-1}. \tag{5.4.25}$$

证明 这是上面所讨论的直接结果. □

定理中的式 (5.4.24) 和式 (5.4.25), 提供了方程式 (5.4.1) 解的一个正项和表示.

例 5.4.1 不可分离平面根地图的色和方程. 在文献 [19] 中, 得到了方程

$$\begin{aligned}(g - \lambda(\lambda-1)xz^2t)\Big(1 - \frac{\partial_z g|_{t=1}}{\lambda}\Big)\Big(1 - \frac{\partial_t g|_{z=1}}{\lambda}\Big)\\ = yzt\partial_z g\Big(1 - \frac{\partial_t g|_{z=1}}{\lambda}\Big) - xzt\partial_t g\Big(1 - \frac{\partial_z g|_{t=1}}{\lambda}\Big),\end{aligned} \tag{5.4.26}$$

其中 x, y, z 和 t 的函数

$$g = \sum_{M \in \mathcal{M}} P(M:\lambda) x^{p(M)} y^{q(M)} r^{p(M)} t^{s(M)},$$

使得 $\mathcal{M}$ 是所有不可分离平面根地图的集合, $p(M)$, $q(M)$, $r(M)$ 和 $s(M)$ 分别为地图 M 非根节点的数目, 非根面的数目, 根面次和根点次, $P(M:\lambda)$ 是 M 的色多项式.

方程式 (5.4.26) 中的 ∂_z 和 ∂_t 分别就是这里的斜差分 $\partial_{1,z}$ 和 $\partial_{1,t}$.

当在方程式 (5.4.26) 中取 $x=y$ (边数 $n(M)=p(M)+q(M)$) 和 $\lambda=2$ 时, 通过等价变换, 即可得方程式 (5.4.1).

例 5.4.2 不可分离平面二部根地图按边数、根面次和根节点次的同构分类. 因为一个地图的色数是 2, 当且仅当它的基准图是二部的, 可以看出, 对于任何整数 $n \geqslant 1$, $F_n/2$ 提供边数为 n 的不可分离平面二部根地图按根面次与根节点次的同构分类 (图 5.4.1~图 5.4.3).

由图 5.4.1 中的 $a \sim c$, 分别给出 $F_1/2 = z^2t$, $F_2/2 = z^2t^2$ 和 $F_3/2 = z^2t^3$. 这里, z 的幂表示根面次, t 的幂表示根节点次. 由图 5.4.1 中的 d 和图 5.4.2 中的 a, 给出 $F_4/2 = z^2t^4 + z^4t^2$. 由图 5.4.2 中的 $b \sim d$, 给出

$$\begin{aligned}F_5/2 &= z^2t^5 + (z^2t^3 + 2z^4t^2 + 2z^4t^3)\\ &= z^2(t^3 + t^5) + z^4(2t^2 + 2t^3).\end{aligned}$$

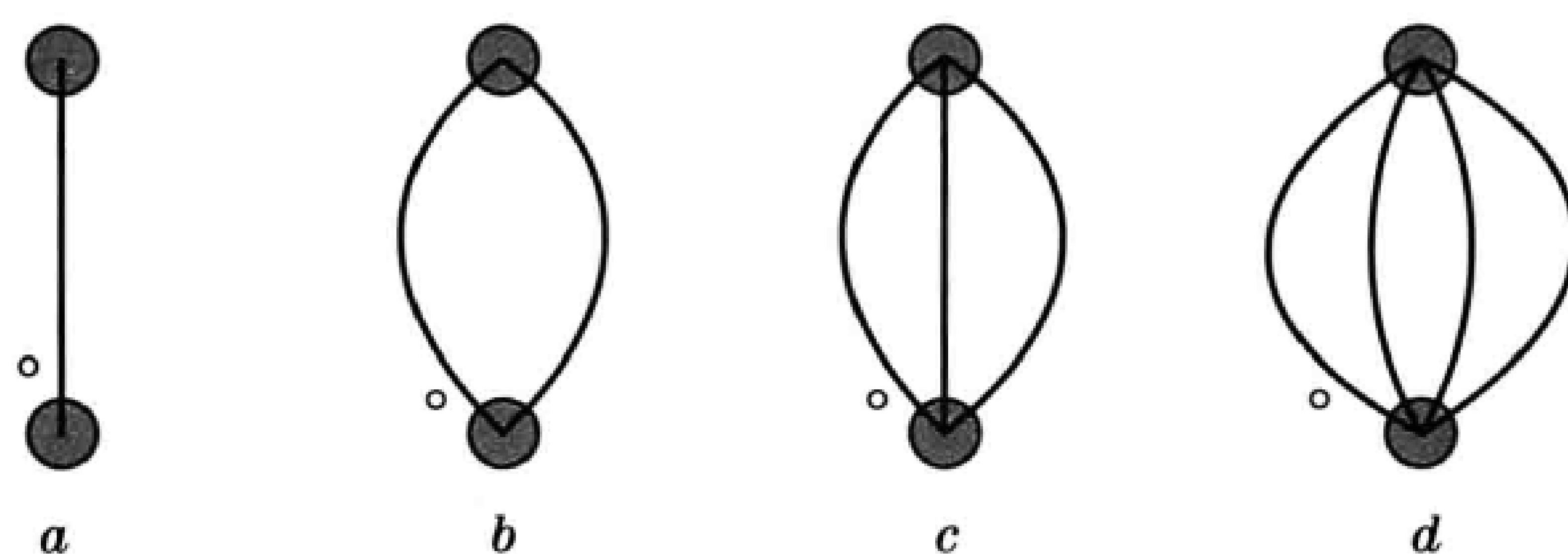


图 5.4.1 边数为 $1\sim 4$ 的不可分离平面二部根地图的同构分类

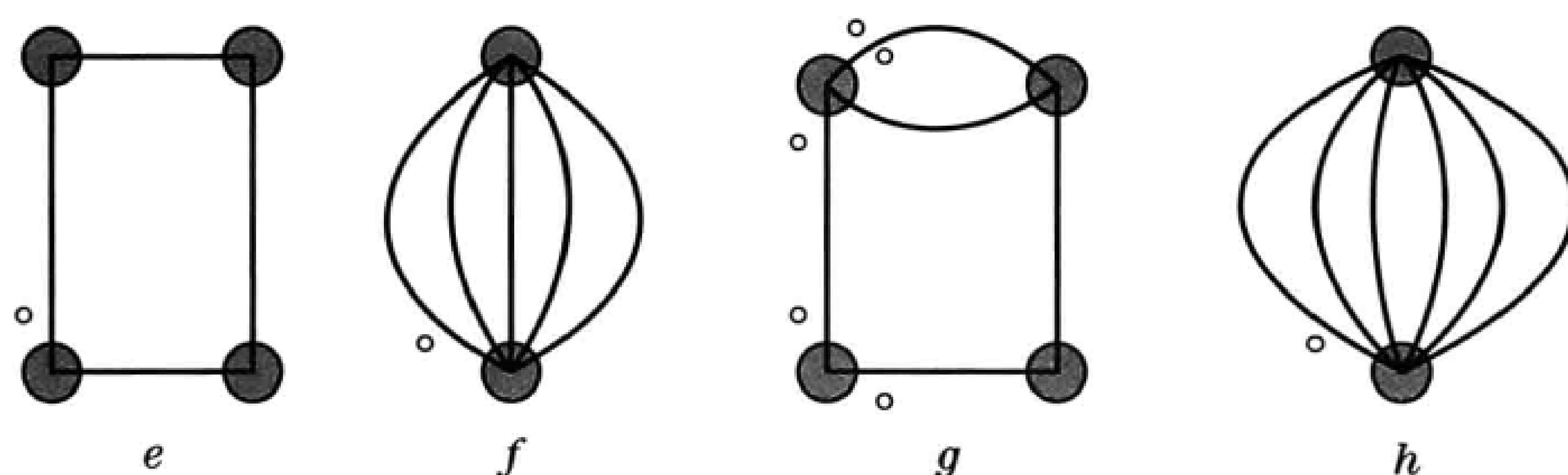


图 5.4.2 边数为 $4\sim 5$ 的不可分离平面二部根地图的同构分类

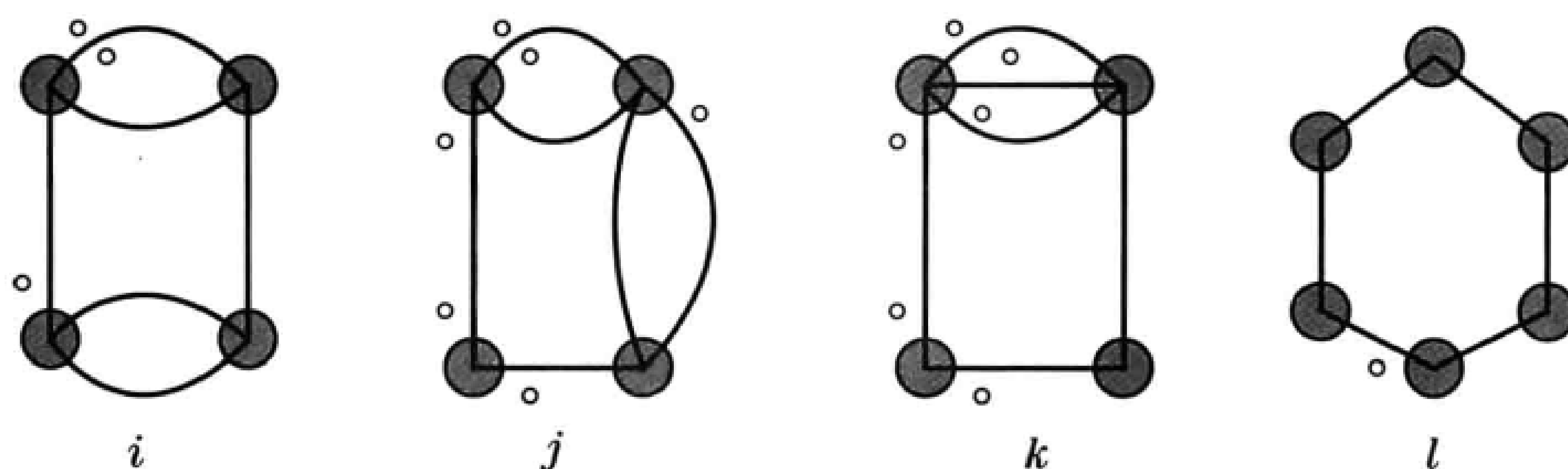


图 5.4.3 边数为 6 的不可分离平面二部根地图的同构分类

由图 5.4.2 中的 d 和图 5.4.3 中的 $a\sim d$, 给出

$$
\begin{aligned}
F_6/2 &= z^2t^6+(z^2t^3+2z^4t^3)+(z^2t^3+2z^4t^2+2z^4t^3+z^4t^4)\\
&\quad +(2z^2t^4+2z^4tr+2z^4t^4)+z^6t^2\\
&= z^2(4t^3+2t^4+t^6)+z^4(4t^2+2t^3+3t^4)+z^6t^2.
\end{aligned}
$$

5.5　直斜混合式

在下面的方程中, 既有欲求函数的直差分又有斜差分, 故称之为直斜混合式. 这里, 只考虑对同一个变量的直斜混合式方程.

讨论方程

$$\begin{cases} f = 1 + xy\delta_{1,x}(xf) + \dfrac{x^2y(\delta_{1,x}f)^2}{1-(1+\partial_{1,x}f)}, \\ f|_{y=0\Rightarrow x=0} = 1, \end{cases} \tag{5.5.1}$$

使得 $f \in \mathcal{R}\{x,y\}$.

从这个方程出发, 虽然可以直接导出解中 $F_n \in \mathcal{R}\{x\}$ $(n \geqslant 1)$ 的一个正项和的表示, 但必须要考虑到如何确定无限和

$$\sum_{k\geqslant 0}\left[1+\frac{\partial_{1,x}f}{1-x}\right]_i \quad (i \geqslant 1).$$

本节提供的解法无需求无限和, 只需将方程式 (5.5.1) 中的 $\delta_{1,x}f$, $\delta_{1,x}(xf)$ 和 $\partial_{1,x}f$ 展开, 转化为如下的等价形式

$$\begin{cases} f^2-(xh+xy(1-x)h+1)f+xh=0, \\ f|_{y=0,x=0} = 1, \end{cases} \tag{5.5.2}$$

其中 $h = f|_{x=1}$.

然后, 方程 (5.5.1) 的第一式演变如下:

$$\begin{aligned} & f(f-1) = xh(f-1) = xy(1-x)hf \\ \Rightarrow \quad & f(f-1)-xh(f-1) = xy(1-x)hf \\ \Rightarrow \quad & (1-f)\partial_{1,x}f = xyhf. \end{aligned} \tag{5.5.3}$$

对于任何整数 $i \geqslant 1$. 令 $F_i = \partial_y^i f$ 为 x 的一个 m_i 次多项式, 由方程式 (5.5.1) 的始条件, 则有形式

$$F_i = \sum_{m=1}^{m_i} F_{m,i}x^m, \tag{5.5.4}$$

$$\left[\frac{xh-f}{1-x}\right]_i = \begin{cases} -1, & i=0, \\ \sum_{k=0}^{m_i-1}\Big(\sum_{l=\max\{k+1,2\}}^{m_l} F_{l,i}\Big)x^k, & i\geqslant 1. \end{cases} \tag{5.5.5}$$

利用式 (5.5.3) 的第三式, 可得

$$\begin{aligned} y^0 : {} & [1-f]_0[\partial_{1,x}f]_0 = 0 \\ & \Rightarrow \quad (1-F_0)(-1)=0 \\ & \Rightarrow \quad F_0 = 1 \quad (\text{即方程 (5.5.1) 的始条件}), \end{aligned} \tag{5.5.6}$$

$$\begin{aligned} y^1 : {} & [1-f]_0[\partial_{1,x}f]_1 + [1-f]_1[\partial_{1,x}f]_0 = x[hf]_0 \\ & \Rightarrow \quad (-F_1)(-1) = xF_0|_{x=1}F_0 \\ & \Rightarrow \quad F_1 = x. \end{aligned} \tag{5.5.7}$$

一般地, 对于任何整数 $n\geqslant 2$,

$$y^n : \sum_{i=0}^{n}[1-f]_i[\partial_{1,x}f]_{n-i} = x[hf]_{n-1} \quad (\text{由 } [1-f]_0=0 \text{ 和 } [\partial_{1,x}f]_0=-1)$$

$$\Rightarrow \quad F_n = \sum_{i=1}^{n-1}F_i[\partial_{1,x}f]_{n-i} + x\sum_{i=0}^{n-1}F_i|_{x=1}F_{n-1-i}. \tag{5.5.8}$$

定理 5.5.1 方程式 (5.5.1) 在 $\mathcal{R}\{x,y\}$ 中有且仅有一个解.

证明 根据数学归纳法原理, 基于式 (5.5.3) 和式 (5.5.6) ~ 式 (5.5.8), 所确定的 F_n $(n\geqslant 0)$ 已经提供了方程式 (5.5.1) 在 $\mathcal{R}\{x,y\}$ 中的一个解.

由这个过程对于方程式 (5.5.1) 始条件的唯一性, 这个解是仅有的. □

为了确定解的简明的表达式, 还需进一步调查多项式 F_n $(n\geqslant 1)$ 的具体结构.

引理 5.5.1 对于任何整数 $n\geqslant 1$, F_n 是 $\mathcal{R}\{x\}$ 中 x 的最小次不小于 1 的一个 n 次多项式.

证明 为叙述上的方便, 令 $d_z(P)$ 代表含变量 z 的多项式 P 对于 z 的次. 如果 P 仅含一个变量, 就用 $d(P)$ 代替. 由式 (5.5.7), 知 $d(F_1)=m_1=1$. 符合欲证的结论.

假若对于任何整数 i $(1\leqslant i\leqslant n-1)$, 都有 $d(F_1)=m_i=i$, 往证 $d(F_n)=m_n=n$.

由式 (5.5.8), 有

$$\begin{aligned}d(F_n) &= \max\{\max\{d(F_i)+d(F_{n-i})\big|1\leqslant i\leqslant n-1\},\\&\quad 1+\max\{d(F_{n-1-i})\big|0\leqslant i\leqslant n-1\}\}\\&= \max\{\max\{i+(n-i)\big|1\leqslant i\leqslant n-1\},\\&\quad 1+\max\{n-1-i\big|0\leqslant i\leqslant n-1\}\}\\&= 1+(n-1)=n.\end{aligned}$$

这就得到欲证的主要结论. 至于最小次, 可由式 (5.5.4) 和式 (5.5.7) 直接导出. □

因此, 式 (5.5.4) 可以准确写为

$$F_i=\sum_{m=1}^{i}F_{m,i}x^m. \tag{5.5.9}$$

引理 5.5.2 对于任何整数 $n\geqslant 1$, 多项式 F_n 的所有系数都是 $\mathcal{R}$ 中的非负整数.

证明 用数学归纳法, 即可得欲证的结论. □

为了方便, 对任何两个多项式 p 和 q, 记 $X_i^{[pq]}=\partial_x^i(pq)$, 则

$$X_i^{[pq]}=\sum_{\substack{i_1+i_2=i\\0\leqslant i_1,i_2\leqslant i}}X_{i_1}^{[p]}X_{i_2}^{[q]}. \tag{5.5.10}$$

记 $[\partial f]=[\partial_{1,x}f]$, 令

$$\varPi_{k,i}=\begin{cases}-1, & i=0,\\ \displaystyle\sum_{l=\max\{k+1,2\}}^{m_l}F_{l,i}, & i\geqslant 1,\end{cases} \tag{5.5.11}$$

则有

$$[\partial_{1,x}f]_{n-i}=\sum_{j=1}^{n-i}\varPi_{j,n-i}x^j. \tag{5.5.12}$$

由引理 5.5.1 的证明过程, 知

$$F_i[\partial_{1,x}f]_{n-i}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{j_1+j_2=j\\0\leqslant j_1,j_2\leqslant n-1}}F_{j_1,i}\varPi_{j_2,n-i}x^j. \tag{5.5.13}$$

由式 (5.5.12), 知

$$X_{j,n-1}^{[F_i\partial F_{n-i}]}=\sum_{\substack{j_1+j_2=j\\0\leqslant j_1,j_2\leqslant n-1}}F_{j_1,i}\Pi_{j_2,n-i} \tag{5.5.14}$$

是由多项式 F_i $(0\leqslant i\leqslant n-1)$ 的系数确定的显式.

定理 5.5.2 在方程式 (5.5.1) 的解中, F_n $(n\geqslant 0)$ 有如下由多项式 F_i $(0\leqslant i\leqslant n-1)$ 的系数确定的表达式

$$F_n=\begin{cases}1, & n=0,\\ \displaystyle\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1}X_{m,n-1}^{[F_i\partial F_{n-i}]}+\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1}H_iF_{m-1,n-1-i}\right)\right)x^m, & n\geqslant 1,\end{cases} \tag{5.5.15}$$

其中 $X_m^{[F_i\partial F_{n-i}]}$ 由式 (5.5.14) 确定,

$$H_i=[h]_i=F_i|_{x=1}=\sum_{m=0}^{i}F_{m,i}. \tag{5.5.16}$$

证明 基于定理 5.5.2 和式 (5.5.8), 由式 (5.5.11)、式 (5.5.14) 和式 (5.5.16) 知, F_n $(n\geqslant 0)$ 仅由多项式 F_i $(0\leqslant i\leqslant n-1)$ 的系数确定. □

例 5.5.1 孤平面根地图按边数和根面次的计数方程. 一个地图称为孤的, 是指在这个地图中, 既无割边又无 2 边割.

因为平面孤地图和平面单地图是对偶的, 由这种对偶的唯一性可知, 孤平面根地图按边数和根面次的计数方程, 就是单平面根地图按边数和根节点次的计数方程, 即如式 (5.5.1) 所示.

例 5.2.2 单平面根地图按边数与根节点次的同构分类. 在这里, 单是指既无自环又无重边. 允许有割边和长 2 的圈.

图 5.5.1 ~ 图 5.5.3 显示了边数为 0 ~ 4 的单平面根地图按边数与根节点次的同构分类.

图 5.5.1 中的 a 给出了 $F_0=1$, 即无边的单平面根地图只有节点地图自己. 图 5.5.1 中的 b 和 c 分别给出了 $F_1=x$, $F_2=x+x^2$, 即边数为 1 和 2 的分类.

图 5.5.1 中的 $a\sim c$ 给出了

$$F_3=(x+2x^2)+(x+x^3)+(x^2)=2x+3x^2+x^3,$$

即边数为 3 的分类.

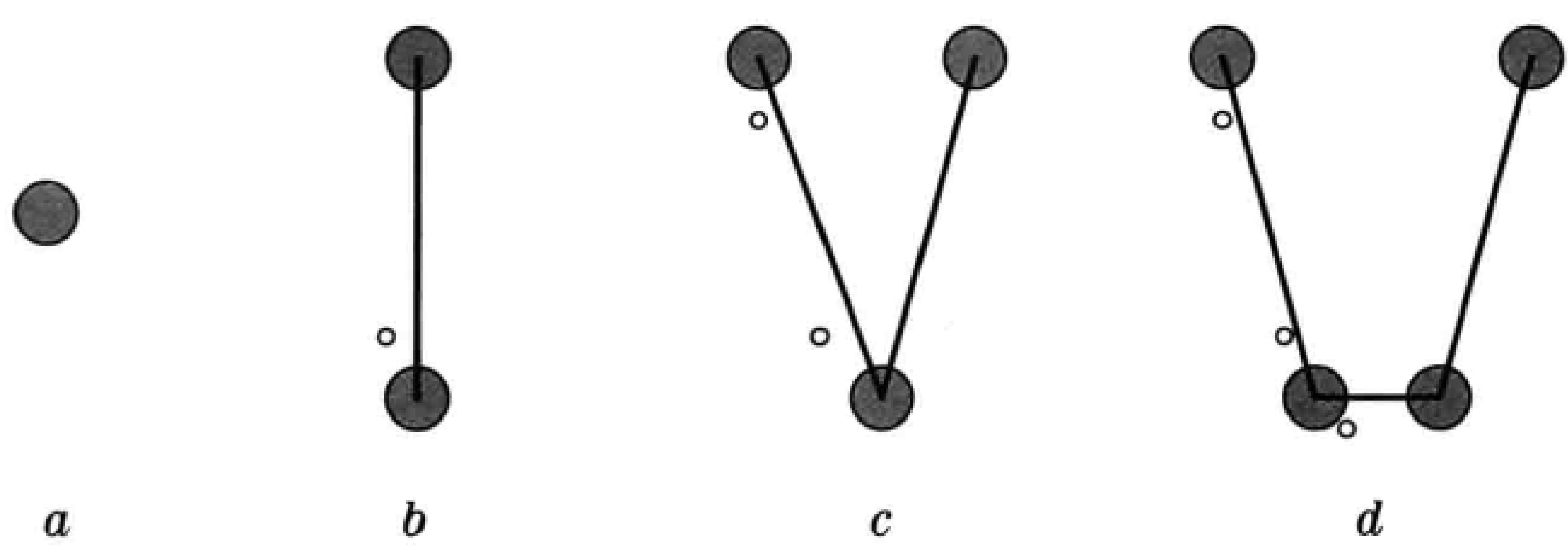


图 5.5.1　边数为 $0\sim 3$ 的单平面根地图的同构分类

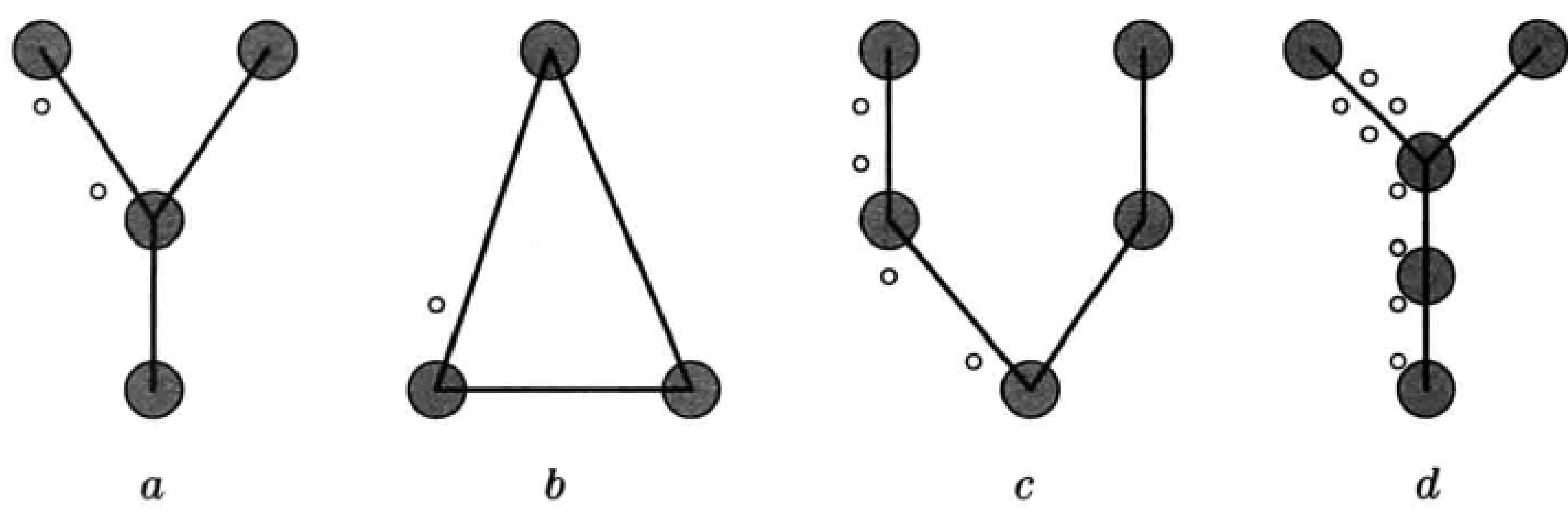


图 5.5.2　边数为 $3\sim 4$ 的单平面根地图的同构分类

图 5.5.2 中的 $a\sim c$ 给出了

$$\begin{aligned}F_4 &= (x+3x^2)+(3x+2x^2+3x^3)+(x+x^4)+(x+4x^2+3x^3)+(x^2)\\&= 6x+10x^2+6x^3+x^4,\end{aligned}$$

即边数为 4 的分类.

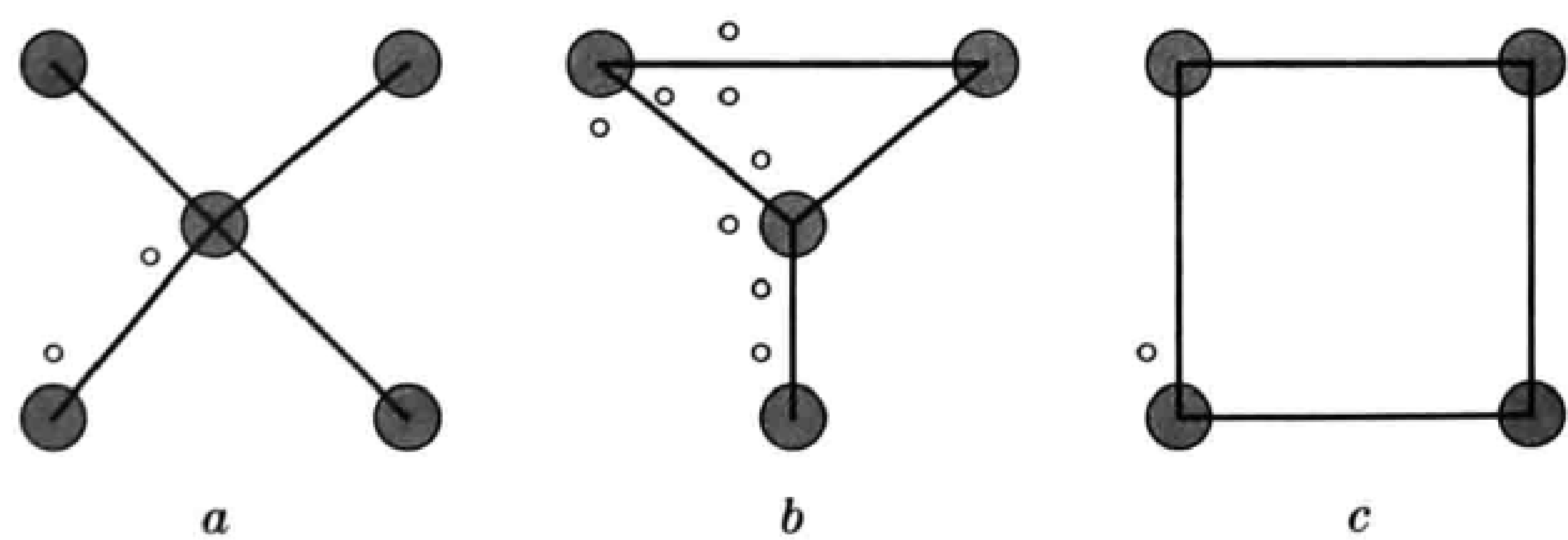


图 5.5.3　边数为 4 的单平面根地图的同构分类

5.6 注 记

1. 在 5.1 节中, 所提供方程的解给出的是一个两变元 x 和 y 函数的一个正项和的递推显式, 从而导出以边数和根点次为参数的不同构无环平面根地图数目, 为一个正项的有限和. 作为特殊情形, 则自然地得到仅以边数为参数的这类地图的数目. 但注意, 这里没有借助于 Lagrange 反演. 在 [41] 中, 利用反演推出单参数情形的结果却比这里的简单, 即无和显式 (理想的结果), 也见 [18], 其中还提供了其他一些理想或较理想的结果. 因为没找到合适的参数表达式, 所以未能导出两参数情形的较理想的结果, 或者说正项和显式 (较理想).

这样一种地图的计数源于 [20], 但此文只提供了一些正项和的显式. 与此同时, 在 [1] 中也提供了单参数理想的显式.

在 [15] 中, 通过研究无环平面根地图依根面次 (x) 和边数 (y) 的计数函数, 得到方程

$$(1-x)x^2yf^2-(1-x+xy(1-x)h+x^2y)f+1-x+xyh=0, \tag{5.6.1}$$

其中 $h=f|_{x=1}$. 通过等价变换, 考虑到 f 的常数项, 得单变直差式方程

$$\begin{cases} f=1+x^2yf^2-xyhf+xy\delta_{1,x}(xf), \\ f|_{y=0\Rightarrow x=0}=1. \end{cases} \tag{5.6.2}$$

进而, 通过研究在射影平面上无环根地图依根面次 (x) 和边数 (y) 的计数函数, 仍得单变直差式方程

$$\begin{cases} f=x^2ySf-xy(Sh+S_1f)+xy\delta_{1,x}(xf)+\mathcal{L}(S), \\ f|_{y=0\Rightarrow x=0}=0, \end{cases} \tag{5.6.3}$$

其中 $h=f|_{x=1}$, S 是方程式 (5.6.2) 的解, $S_1=S|_{x=1}$,

$$\mathcal{L}(S)=x^2y\Big(\frac{\partial(xS)}{\partial x}-S^2\Big).$$

2. 在 [8] 中, 从普通平面根地图依根面次、根节点次和边数的计数中, 导出了关于 g 的如下关系

$$\big((1-x)(1-z)(f^*-f)+x-z\big)g=(1-x)f^*-(1-z)f, \tag{5.6.4}$$

其中 $g=g(x,y,z)$ 是普通平面根地图依根面次 (x)、根节点次 (z) 和边数 (y) 的计数函数, $f(x,y)=g|_{z=1}$, $f^*=g|_{x=1}$.

通过等价变换, 考虑到 g 的常数项, 即可得一个多变直差式的方程

$$\begin{cases} (f^*-f)g=(f^*-f)\dfrac{z-x}{(1-z)(1-x)}+\delta_{1,z}g-\delta_{1,x}g, \\ g|_{y=0\Rightarrow x=0,z=0}=0. \end{cases} \tag{5.6.5}$$

因为在这个方程中没有出现 y, 无法用 5.2 节中的方法直接确定其解.

还是用基于集合分解理论, 所导出的关于 g 方程为

$$g=1+x^2yzfg+xyz\delta_{1,x}(xg)-(1-z)xyzf^*g. \tag{5.6.6}$$

由于 g 是 x 和 z 的对称函数, 考虑到常数项, 即得方程

$$\begin{cases} g=1+xyz\Big(xf+zf^*-\dfrac{f^*+f}{2}\Big)g+xyz\big(\delta_{1,x}(xg)+\delta_{1,z}(zg)\big), \\ g|_{y=0\Rightarrow x=0,z=0}=1. \end{cases} \tag{5.6.7}$$

这个方程是多变直差式, 可以用 5.2 节中的方法直接求出其解的一个递推正项有限和显式. 基于方程式 (5.6.6), 已经借助 Lagrange 反演, 通过巧妙地选择参数表示, 得到了 f 和 f^* 的正项和显式, 然而, g 的显式的系数只能是正负相间的有限和.

3. 在研究平面二部根单地图依边数 (y) 和根面次 $(x,\ z=x^2)$ 为参数的函数时, 发现关于 f 的方程

$$zyf^2-\Big(\frac{zy}{1-z}+f^*\Big)+\Big(\frac{zy}{1-z}+1\Big)f^*=0, \tag{5.6.8}$$

其中 $f^*=|_{z=1}$(例如, 参见 [57] 中的式 (7.4.21)).

通过等价变换, 考虑 f 的常数项, 即得

$$\begin{cases} f=1+zyf^2+y\partial_{1,x}(zf)-(f^*-1)(f-1), \\ f|_{y=0\Rightarrow z=0}=1. \end{cases} \tag{5.6.9}$$

这个方程是单变斜差式. 可用 5.3 节中的方法直接求出其解的一个递推正项有限和显式.

4. 考虑多变斜差式方程:

$$\begin{cases} f=6yz^2t+\dfrac{yzt\partial_{1,z}f}{1-\dfrac{\partial_{1,z}f|_{t=1}}{3}}-\dfrac{yzt\partial_{1,t}f}{1-\dfrac{\partial_{1,t}f|_{z=1}}{3}}, \\ f|_{y=0\Rightarrow z=t=0}=0. \end{cases} \tag{5.6.10}$$

自然可以用 5.4 节中的方法, 确定其解的系数的递推正项有限和显式.

事实上, 式 (5.6.10) 中的方程就是式 (5.4.26) 当 $\lambda=3$ 时的一种特殊情形. 因此, 方程 (5.6.10) 也是有物理意义的.

5. 在不可分离 Euler 平面根地图的计数中, 发现这类地图依根节点次 $(x, t=x^2)$、非根节点数 (y) 和非根面数 (z) 的计数函数满足方程

$$f=tz+\frac{ty(f-f^*)}{t(1+f^*)^2-(1+f)^2}, \tag{5.6.11}$$

其中 $f^*=f|_{t=1}$.

可以验证, 下面的斜直混合式方程在 $\mathcal{R}\{t,y,z\}$ 中有且仅有一个解, 而且这个解就是满足方程式 (5.6.11) 的那个计数函数:

$$\begin{cases} f=tz+\dfrac{ty\delta_{1,t}f}{(1-\partial_{1,t}f)^2-t\delta_{1,t}^2f}, \\ f|_{z=0,y=0\Rightarrow t=0}=0. \end{cases} \tag{5.6.12}$$

在如 5.5 节所示的求解的过程中, 只要注意 $F_{m,n}=\partial_{(y,z)}^{(m,n)}$ 是 t 的一个多项式就行了.

第 6 章　常微分方程

6.1　参数方程

本节打算在通过特征曲线或曲面的方法将一个函数或泛函方程转化为一个等价的方程或方程组的基础上, 建立一个微分方程以确定原方程的那个 (一个, 如果适定性未被证明) 全局或局部 (即限制) 解.

在 [17](即式 (3.8), 但注意 x 与 y 互换) 中, 有关于 f 的方程

$$(x-1)x^2yf^2+(x^2y-x+1)f+x-1-xyh=0, \tag{6.1.1}$$

其中 $h=f|_{x=1}$; 并且由此出发, 求出了 h 和 y 以 θ 为参数的表达式, 以确定 h 作为 y 的函数本身, 即

$$\begin{cases} h=\dfrac{4\theta-3}{(3\theta-2)^2}, \\ y=(1-\theta)(3\theta-2). \end{cases} \tag{6.1.2}$$

为了确定 h, 先看一看 h 满足怎样的方程. 由

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{2(5-6\theta)}{(3\theta-2)^3}, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}=5-6\theta, \end{cases} \tag{6.1.3}$$

有

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}=\frac{2}{(3\theta-2)^3}. \tag{6.1.4}$$

由式 (6.1.2) 和式 (6.1.4), 得

$$\begin{cases} y\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}=2\tau\Big(y\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}+h\Big), \\ \tau=\dfrac{y}{1-3\tau}, \end{cases} \tag{6.1.5}$$

其中 $\tau=1-\theta$.

引理 6.1.1 在方程式 (6.1.5) 中, 有 $\tau\in\mathcal{R}_+\{y\}$.

证明 记 $T_n=\partial_y^n\tau$ (整数 $n\geqslant 0$). 由方程 (6.1.5) 的第二式, 得 $\tau=y+3\tau^2$, 因此

$$\begin{aligned} &y^0:\ T_0=3T_0^2 \quad\Rightarrow\quad T_0(1-3T_0)=0 \quad\Rightarrow\quad T_0=0, \\ &y^1:\ T_1=1+6T_0T_1 \quad\Rightarrow\quad T_1=1, \\ &y^n:\ T_n=3\sum_{i=1}^{n-1}T_iT_{n-i} \quad (n\geqslant 2). \end{aligned}$$

从而, 有

$$T_n=\begin{cases} 0, & n=0, \\ 1, & n=1, \\ 3\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}T_iT_{n-i}, & n\geqslant 2. \end{cases} \tag{6.1.6}$$

由于 $T_0,\ T_1\in\mathcal{R}_+$ 以及式 (6.1.6), 从 $T_i\in\mathcal{R}_+$ $(i\leqslant n-1)$, 即得对任何整数 $n\geqslant 2$, $T_n\in\mathcal{R}_+$. 基于数学归纳法原理, 可见 $\tau\in\mathcal{R}_+\{y\}$. □

从式 (6.1.6) 出发, 可以求出

$$\tau=y+3y^2+18y^3+135y^4+\cdots. \tag{6.1.7}$$

另一方面, 利用定理 1.5.1, 对于整数 $n\geqslant 1$, 又可得

$$T_n=\frac{1}{n}\partial_\tau^{n-1}\Big(\frac{1}{1-3\tau}\Big)^n=\frac{3^{n-1}}{n}\binom{2n-2}{n-1}. \tag{6.1.8}$$

比较式 (6.1.6) 与式 (6.1.8), 即可得组合恒等式: 对于整数 $n\geqslant 2$,

$$\binom{2n-2}{n-1}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{3n}{i(n-i)}\binom{2i-2}{i-1}\binom{2(n-i)-1}{n-i-1}. \tag{6.1.9}$$

定理 6.1.1　方程

$$\begin{cases} y\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}=2\tau\Big(2y\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}+h\Big), \\ h|_{y=0}=1 \end{cases} \tag{6.1.10}$$

在 $\mathcal{R}_+\{y\}$ 中有且仅有一个解.

证明　令 $H_n=\partial_y^n h\ (n\geqslant 0)$. 记 $d=2y\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}+h$, $D_n=\partial_Y^n d\ (n\geqslant 0)$. 由

$$\Big[y\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}\Big]_n=\partial_y^n\Big(y\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}\Big)=nH_n\quad (n\geqslant 1), \tag{6.1.11}$$

$$\Big[2y\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}+h\Big]_n=\partial_y^n d=D_n\quad (n\geqslant 0),$$

其中

$$D_n=\begin{cases} H_0, & n=0, \\ (2n+1)H_n, & n\geqslant 1, \end{cases} \tag{6.1.12}$$

即可得

$$[\tau d]_n=\begin{cases} 0, & n=0, \\ H_1, & n=1, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}T_iD_{n-i}, & n\geqslant 2. \end{cases} \tag{6.1.13}$$

在方程式 (6.1.10) 的基础上, 由式 (6.1.6)、式 (6.1.11) 和式 (6.1.13), 有

$$\begin{aligned} y^1:\ \Big[y\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}\Big]_1=2[\tau d]_1\ &\Rightarrow\quad H_1=2T_1H_0=0 \\ &\Rightarrow\quad H_1=2T_1=2, \\ y^2:\ \Big[y\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}\Big]_2=2[\tau d]_2\ &\Rightarrow\quad 2H_2=2(3H_1+3) \\ &\Rightarrow\quad H_2=3H_1+3=9, \\ y^n:\ \Big[y\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}\Big]_n=2[\tau d]_n\ &\Rightarrow\ nH_n=2\sum_{i=1}^{n}T_iD_{n-i}\quad (n\geqslant 2), \end{aligned} \tag{6.1.14}$$

从而

$$H_n=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}T_iD_{n-i}. \tag{6.1.15}$$

综上所述, 得

$$H_n=\begin{cases}1, & n=0,\\ 2, & n=1,\\ \dfrac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}T_iD_{n-i}, & n\geqslant 2.\end{cases} \tag{6.1.16}$$

在式 (6.1.16) 的基础上, 从式 (6.1.8) 和式 (6.1.12) 可以看出, H_n 由 H_i $(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 确定, 而且, $H_n\in\mathcal{R}_+$. 这就导致如此得到的 $h\in\mathcal{R}_+\{y\}$ 是方程式 (6.1.10) 的一个解. 进而, 由这个过程在给定始条件下的唯一性, 在 $\mathcal{R}_+\{y\}$ 中, h 是方程式 (6.1.10) 仅有的一个解. □

事实上, 由式 (6.1.8) 和式 (6.1.12), 式 (6.1.16) 变为

$$\partial_y^n h=\begin{cases}1, & n=0,\\ 2, & n=1,\\ \dfrac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{3^{i-1}(2n-2i+1)(2i-2)!}{i!(i-1)!}H_{n-i}, & n\geqslant 2.\end{cases} \tag{6.1.17}$$

另一方面, 对于整数 $n\geqslant 1$, 记 $h'=\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}$, $H_n'=\partial_y^n h'$. 由

$$\begin{cases}h'=\dfrac{2}{(1-3\tau)^3},\\ \tau=\left(\dfrac{1}{1-3\tau}\right)y,\end{cases} \tag{6.1.18}$$

利用定理 1.5.1, 有

$$\begin{aligned}H_n'&=\frac{1}{n}\partial_\tau^{n-1}\frac{18}{(1-3\tau)^{n+4}}\\ &=\frac{2\cdot 3^{n+1}}{n}\binom{2n+2}{n+3}=\frac{2\cdot 3^{n+1}(2n+2)!}{n!(n+3)!}.\end{aligned} \tag{6.1.19}$$

因为 $nH_n=H_n'$ $(n\geqslant 1)$, 由式 (6.1.19), 即得

$$\partial_y^n h=\begin{cases}1, & n=0(\text{方程式 (6.1.10) 的始条件}),\\ \dfrac{2\cdot 3^n(2n)!}{n!(n+2)!}, & n\geqslant 1.\end{cases} \tag{6.1.20}$$

通过式 (6.1.17) 和式 (6.1.20), 即可得组合恒等式: 对于整数 $n\geqslant 1$,

$$\frac{3(2n)!}{2(n+2)!n!}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(2n-2i+1)!(2i-2)!}{(n-i+2)!(n-i)!}. \tag{6.1.21}$$

细心的读者会注意到, 这里通过参数 τ 确定 h' 然后确定 h, 要比在 [17] 中的直接用参数 θ 求 h 简单多了. 这就启示我们留心选择参数, 或者适当地作参数的代换, 以减少推导中带来的不必要麻烦.

如何选择一个函数所满足的微分方程是首先要特别留意的, 一旦不当将会使后继工作事倍功半, 费力而不讨好. 例如, 在 [16] 中就给出了一个满足二阶常微分方程的函数 (参见[95] 用一个一阶常微分方程所代替的情形, 从而将前者的运算过程大为简化.

另外, 在论证方程的适定性时, 通常需要对方程本身作等价变换, 以使从方程的始条件出发导出逐项确定的公式.

下面, 提供几个例子以显示本节所描述的方法的普遍性. 它们都是本书作者在以往的工作中遇到的. 尽管得当与否尚未可知, 但无疑为之进一步发展开拓了更广阔的想象空间.

例 6.1.1 一般平面根地图按边数分的同构类. 由公式 (6.1.20) 所给出的是一般平面根地图按边数分的同构类数. 例如, 当 $n=0$ 时, 1 表明无边的一般平面根地图只有 1 个同构类. 这就是节点地图自己. 当 $n=1$ 时, 2 表明一条边的一般平面根地图有 2 个同构类. 它们是杆地图和自环地图, 如图 4.2.1 所示. 边数为 2 的一般平面根地图有 9 个同构类. 它们由图 6.1.1 中的 $2a+b+2c+4d$ 给出.

边数为 3 的一般平面根地图有 54 个同构类. 它们由图 6.1.2 中的 $3a+2b+c+6d+e$(即 $3+2+1+6+1=13$)、图 6.1.3 中的 $6f+6g+3h+6i+6j(6+6+3+6+6=27)$ 和图 6.1.4 中的 $3k+6l+3m+2n(3+6+3+2=14)$ (计 $13+27+14=54$) 给出.

例 6.1.2 对于[33,35] 中出现的关于 f 的方程

$$f^2-\big(xh+xy(1-x)h+1\big)+xh=0, \tag{6.1.22}$$

其中 $h=f|_{x=1}$, 已经得到 h 和 y 用参数 t 表达的公式

$$\begin{cases} h=t^2(2-t), \\ y=\dfrac{(t-1)(2-t)}{t^2}. \end{cases} \tag{6.1.23}$$

因为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=t(4-3t), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{4-3t}{t^3}, \end{cases}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}=t^4. \tag{6.1.24}$$

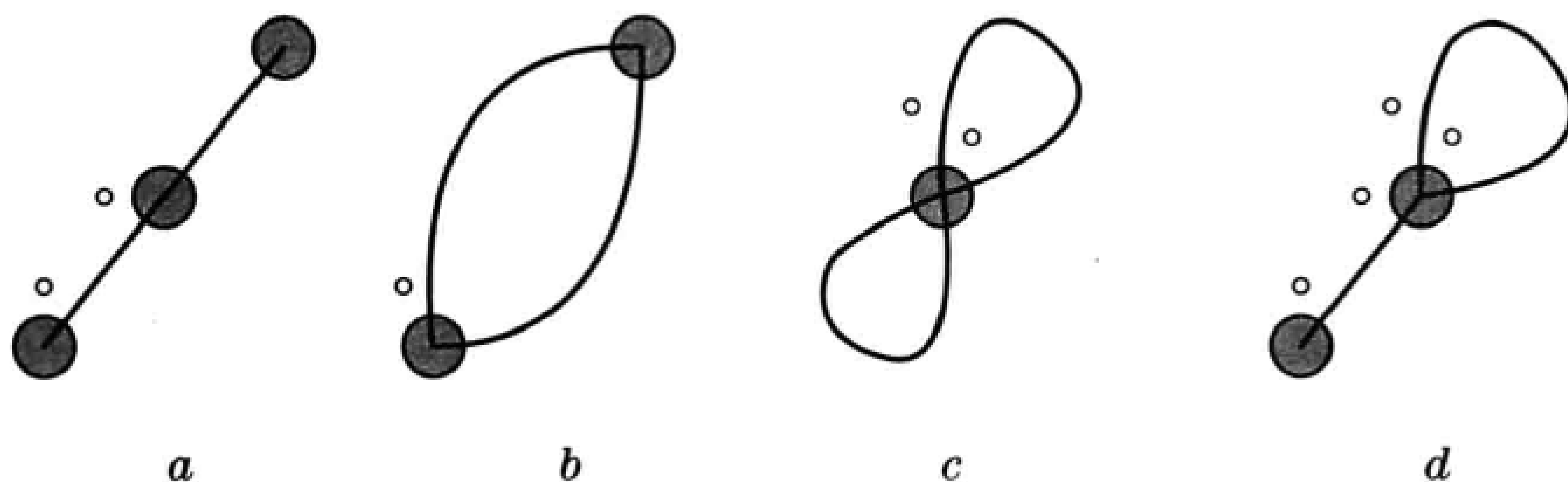


图 6.1.1 2 条边的一般平面根地图的同构类

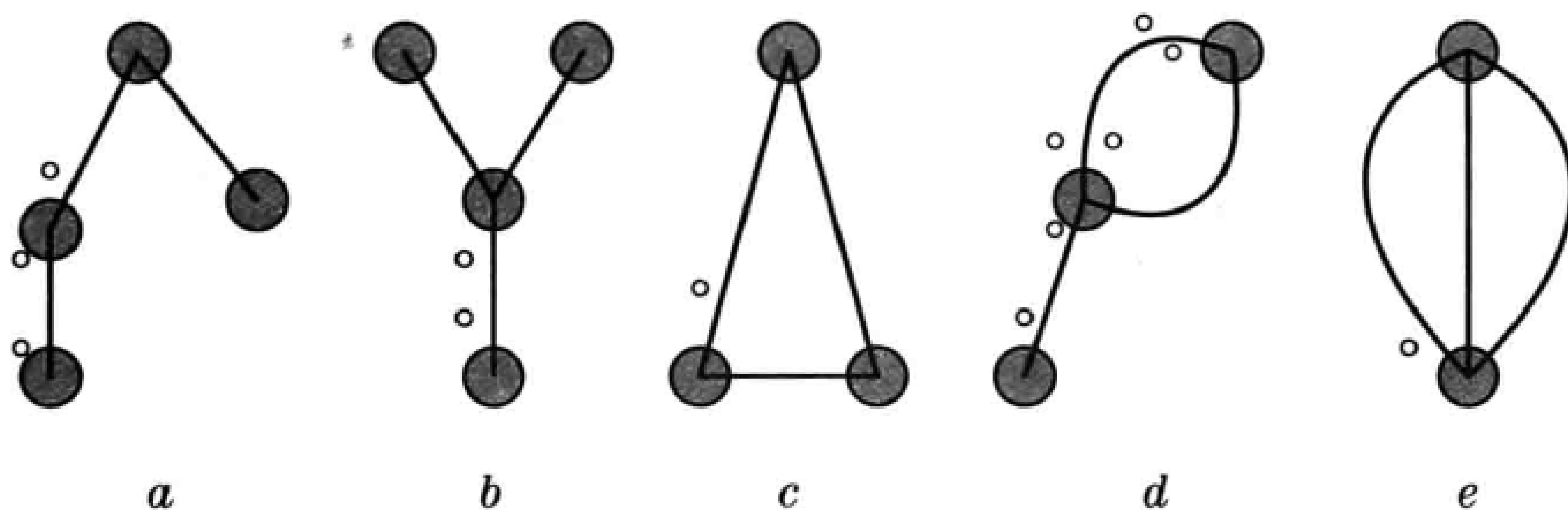


图 6.1.2 3 条边的一般平面根地图的同构类 (I)

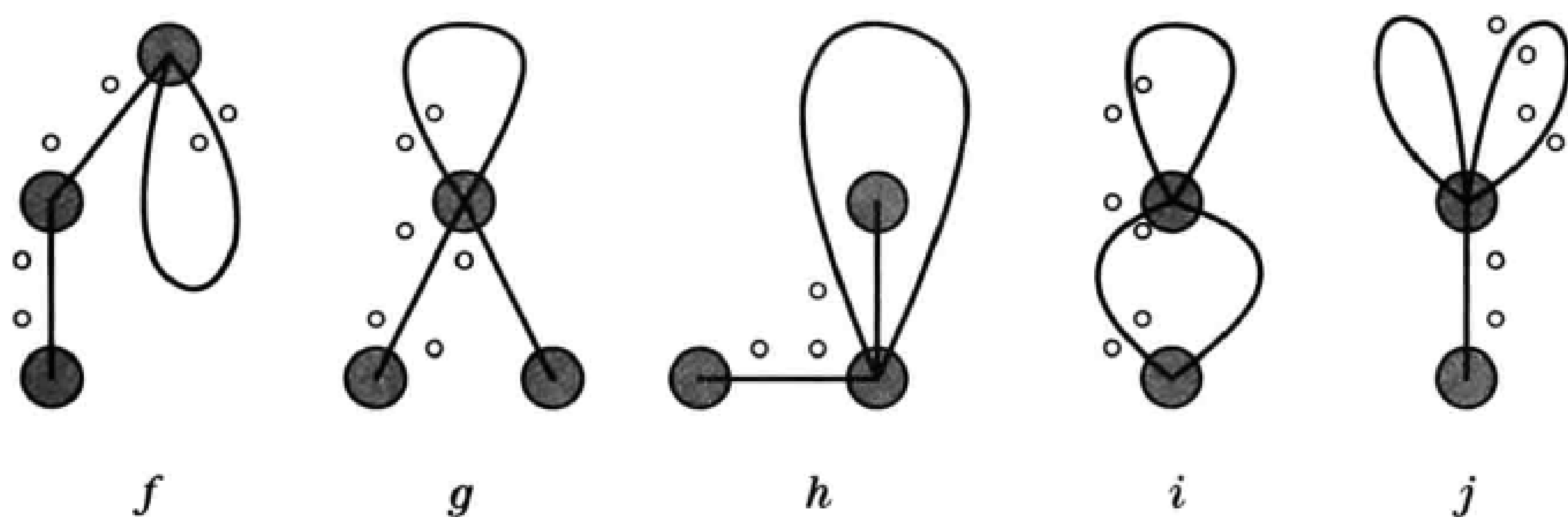


图 6.1.3 3 条边的一般平面根地图的同构类 (II)

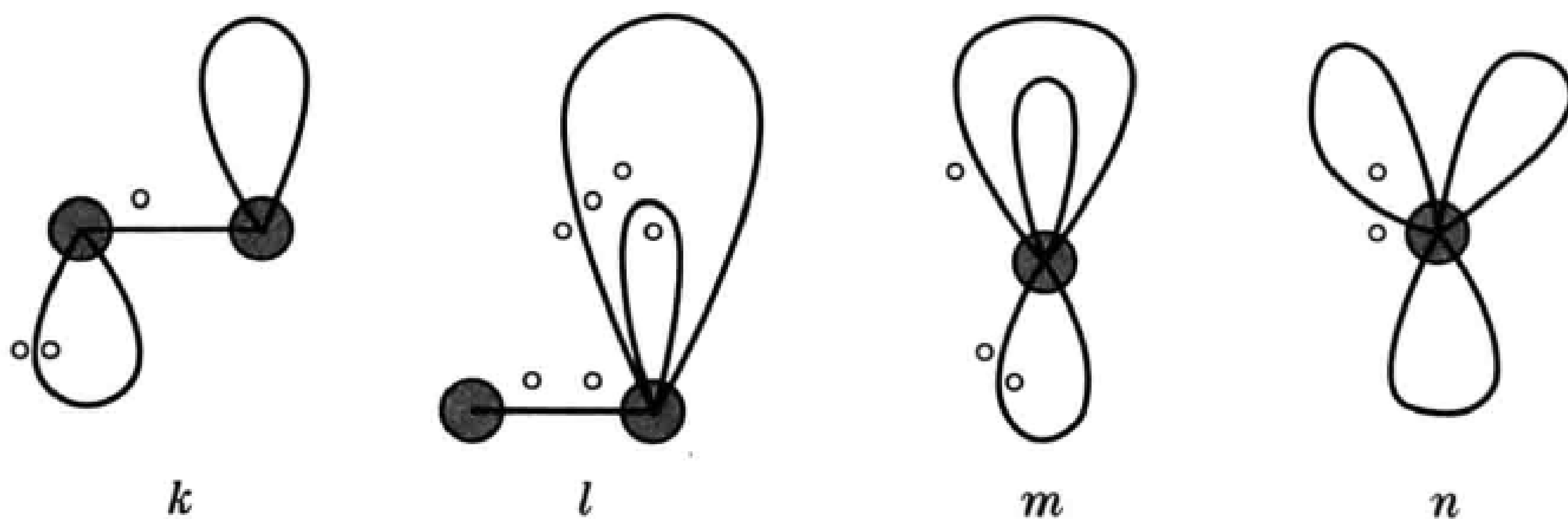


图 6.1.4 3 条边的一般平面根地图的同构类 (III)

进而, 得到常微分方程

$$\begin{cases} y\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}=(t-1)h, \\ t=1+\dfrac{t^2}{2-t}y. \end{cases} \tag{6.1.25}$$

例 6.1.3 在 [41] 中, 得到了关于 f 和 $h=f|_{x=1}$ 的一个方程

$$x^2yf^2+(1-x+xyh)f+x-1=0. \tag{6.1.26}$$

而且, 已经得到 h 和 y 用参数 t 表示的公式 (参见 [18,20])

$$\begin{cases} h=t^2(2-t), \\ y=\dfrac{t-1}{t^4}. \end{cases} \tag{6.1.27}$$

由

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=t(4-3t), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{4-3t}{t^5}, \end{cases}$$

有

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}=t^6. \tag{6.1.28}$$

根据式 (6.1.27) 和式 (6.1.28), 就可得到常微分方程

$$\begin{cases} y\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}=(t-1)\Big(y\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}+h\Big), \\ t=1+t^4y. \end{cases} \tag{6.1.29}$$

例 6.1.4 在[23] 中, 已经得到关于 f 和 $h=f|_{x=1}$ 的方程

$$f^2+\big((1+xy)(1-x)-xh\big)f+x^2(1-x)y(1+h)=0, \tag{6.1.30}$$

而且, 已经求出了 h, y 与参数 η 的关系

$$\begin{cases} h=\dfrac{1}{3}\eta(4-\eta), \\ y=\dfrac{1}{27}(\eta-1)(4-\eta)^2. \end{cases} \tag{6.1.31}$$

由

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}h}{\eta}=\dfrac{2}{3}(2-\eta), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\eta}=\dfrac{1}{9}(\eta-2)(\eta-4), \end{cases}$$

有

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}=\frac{6}{4-\eta}. \tag{6.1.32}$$

根据式 (6.1.31) 和式 (6.1.32), 就可得到常微分方程

$$\begin{cases} (4-\eta)\dfrac{h}{y}=6, \\ \eta=1+\dfrac{27}{(4-\eta)^2}y. \end{cases} \tag{6.1.33}$$

例 6.1.5 在[95] 中, 提供了单平面根三角化计数函数 $h=h(y)$ 和 y 用一个参数 s 表示的公式

$$\begin{cases} h=\dfrac{s(1+s)}{(1-s)^2}, \\ y=-s(1+s)^2. \end{cases} \tag{6.1.34}$$

因为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}=\dfrac{3s+1}{(1-s)^3}, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=-(1+3s)(1+s), \end{cases}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}=-\frac{1}{(1-s)^3(1+s)}. \tag{6.1.35}$$

根据式 (6.1.34) 和式 (6.1.35), 就可得到常微分方程

$$\begin{cases} (1-s)y\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}=h, \\ s=-\dfrac{1}{(1+s)^2}y. \end{cases} \tag{6.1.36}$$

例 6.1.6 在[95] 中, 还提供了限制平面根三角化计数函数 $h=h(y)$ 和 y 用一个参数 λ 表示的公式

$$\begin{cases} h=\lambda(3-2\lambda), \\ y=\lambda^3(1-\lambda). \end{cases} \tag{6.1.37}$$

因为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}=\lambda^2(3-4\lambda), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=\lambda^3(1-\lambda), \end{cases}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\lambda^2}. \tag{6.1.38}$$

根据式 (6.1.37) 和式 (6.1.38), 就可得到常微分方程

$$\begin{cases} y\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}=(1-\lambda)\Big(h-2y\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}\Big), \\ \lambda=1-\dfrac{y}{\lambda^3}. \end{cases} \tag{6.1.39}$$

6.2 瓣 丛 和

在研究如何确定给定边数的可定向曲面上不同构的根瓣丛数目的过程时, 归结为解如下的常微分方程 (参见 [63]):

$$\begin{cases} 2x^2\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}=-1+(1-x)h, \\ h_0=h|_{x=0}=1. \end{cases} \tag{6.2.1}$$

定理 6.2.1 方程式 (6.2.1) 在 $\mathcal{R}_+\{x\}$ 中有且仅有一个解.

证明 首先, 为了方便, 将方程 (6.2.1) 的第一式变成如下的等价形式:

$$h=1+xh+2x^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}. \tag{6.2.2}$$

令 $H_n=\partial_x^n h$ $(n\geqslant 0)$. 由始条件, 得

$$H_0=h_0=1\in\mathcal{R}_+. \tag{6.2.3}$$

然后, 因为

$$\begin{cases} \partial_x^n xh=\partial_x^{n-1}h=H_{n-1}, \\ \partial_x^n x^2\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}=\partial_x^{n-2}\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}=(n-1)H_{n-1}, \end{cases}$$

故对于 $n\geqslant 1$, 由式 (6.2.2), 有

$$H_n=H_{n-1}+2(n-1)H_{n-1}=(2n-1)H_{n-1}\in\mathcal{R}_+. \tag{6.2.4}$$

从而, 由式 (6.2.3) 和式 (6.2.4) 所导出的 $h\in\mathcal{R}_+\{x\}$ 满足式 (6.2.2) 为方程式 (6.2.1) 的一个解.

考虑到 H_n $(n\geqslant 1)$ 对于 H_0 的唯一性, 这个解是仅有的. □

实际上, 由式 (6.2.3) 和式 (6.2.4) 确定的递推关系, 直接可得

$$H_n=(2n-1)!!=\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}\quad (n\geqslant 1). \tag{6.2.5}$$

在 [63] 中, 研究给定边数的不可定向根瓣丛的过程中, 发现的是下面一个关于 g 的常微分方程:

$$\begin{cases} 4x^2\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}=(1-2x)g-x\left(h+2x\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right),\\ \left.\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=1, \end{cases} \tag{6.2.6}$$

其中 h 就是方程式 (6.2.1) 的由式 (6.2.5) 确定的那个解.

注意到 h 满足式 (6.2.1), 即可得此方程的如下等价形式

$$\begin{cases} 4x^2\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}=(1-2x)g-h+1,\\ g_0=g|_{x=0}=0. \end{cases} \tag{6.2.7}$$

定理 6.2.2 方程式 (6.2.7) 在 $\mathcal{R}_+\{x\}$ 中有且仅有一个解.

证明 为了推导时的方便, 将方程 (6.2.7) 的第一个式子等价地变成

$$g=4x^2\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}+2xg+h-1. \tag{6.2.8}$$

记 $G_n=\partial_x^n g$ $(n\geqslant 0)$. 因为

$$\begin{aligned} &\partial_x^n xg=\partial_x^{n-1}g=G_{n-1}\quad (n\geqslant 1),\\ &\partial_x^n\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}=G_{n+1}\partial_x^n\frac{\mathrm{d}x^{n+1}}{\mathrm{d}x}=(n+1)G_{n+1}\quad (n\geqslant 0),\\ &\partial_x^n x^2\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}=\partial_x^{n-2}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}=(n-1)G_{n-1}, \end{aligned}$$

由式 (6.2.5), 可知

$$y^0:\ G_0=H_0-1\quad\Rightarrow\quad G_0=0\ (\text{即始条件}) \tag{6.2.9}$$

$$\begin{aligned} y^n:\ G_n&=4(n-1)G_{n-1}+2G_{n-1}+H_n\\ &=(4n-2)G_{n-1}+H_n. \end{aligned} \tag{6.2.10}$$

由式 (6.2.9) 和式 (6.2.10), 分别有 $G_0\in\mathcal{R}_+$ 和 $G_n\in\mathcal{R}_+$. 从而, 它们所导出的 $g\in\mathcal{R}_+\{x\}$ 为方程式 (6.2.7) 的一个解.

考虑到 G_n $(n \geqslant 1)$ 对于 G_0 的唯一性, 这个解是仅有的. □

在式 (6.2.9) 和式 (6.2.10) 的基础上, 即可推得

$$G_n = H_n + \prod_{i=2}^{n}(4i-2) + \sum_{i=2}^{n-1} H_i \prod_{j=i+1}^{n}(4j-2) \quad (n \geqslant 2). \tag{6.2.11}$$

另一方面, 看一看 $f = g + h$ 所满足的方程, 其中 h 和 g 分别为方程式 (6.2.1) 和方程式 (6.2.7) 的解.

因为 h 和 g 分别为方程式 (6.2.1) 和方程式 (6.2.7) 的解, h 和 g 分别满足式 (6.2.2) 和式 (6.2.8), 所以

$$g + h = \left(-1 + h + 2xg + 4x^2\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right) + \left(1 + xh + 2x^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right).$$

由式 (6.2.2), 用 $xh + 2x^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}$ 代替上式右边第一个括号内的 $-1+h$, 即可得

$$f = 1 + 2xf + 4x^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}. \tag{6.2.12}$$

考虑到 $f_0 = f|_{x=0} = g_0 + h_0 = 1$, 由式 (6.2.12), f 满足方程

$$\begin{cases} 4x^2\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -1 + (1-2x)f, \\ f_0 = f|_{x=0} = 1. \end{cases} \tag{6.2.13}$$

定理 6.2.3 方程式 (6.2.13) 在 $\mathcal{R}_+\{x\}$ 中有且仅有一个解.

证明 若取 $f = g + h$, 使得 g 和 h 分别是方程式 (6.2.1) 和方程式 (6.2.7) 的解, 则由定理 6.2.1 和定理 6.2.2, 知 $g \in \mathcal{R}_+\{x\}$, $h \in \mathcal{R}_+\{x\}$. 从而, $f \in \mathcal{R}_+\{x\}$. 如上所述, f 是方程式 (6.2.13) 在 $\mathcal{R}_+\{x\}$ 中的一个解.

另一方面, 假若由 $F_n = \partial_x^n f$ $(n \geqslant 0)$ 确定的 f 是方程式 (6.2.13) 在 $\mathcal{R}_+\{x\}$ 中的另一个解, 因为

$$\begin{aligned} &\partial_x^n xf = \partial_x^{n-1} f = F_{n-1} \quad (n \geqslant 1), \\ &\partial_x^n \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = F_{n+1}\partial_x^n \frac{\mathrm{d}x^{n+1}}{\mathrm{d}x} = (n+1)F_{n+1} \quad (n \geqslant 0), \\ &\partial_x^n x^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \partial_x^{n-2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = (n-1)F_{n-1}, \end{aligned}$$

由式 (6.2.12), 可知

$$y^0: \ F_0 = 1 \text{ (即方程式 (6.2.13) 的始条件)}, \tag{6.2.14}$$

$$y^n: \ F_n = 2F_{n-1} + 4(n-1)F_{n-1} = (4n-2)F_{n-1} \quad (n \geqslant 1). \tag{6.2.15}$$

由于在始条件给定下, 式 (6.2.15) 唯一地决定 F_n $(n \geqslant 1)$, 且 $F_0 = 1 \in \mathcal{R}_+$, $F_n \in \mathcal{R}_+$, 所以欲证的结论成立. □

基于定理 6.2.3, 由 $F_0 = 1$ 和式 (6.2.15) 确定的只能是 $f = g + h$.

因为 $(4n-2)F_{n-1} = 2(2n-1)F_{n-1}$, 与式 (6.2.4) 比较, 且 $F_0 = H_0 = 1$, 所以有

$$F_n = 2^n H_n = \frac{2^n(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!} \quad (n \geqslant 1). \tag{6.2.16}$$

考虑到 $f = g + h$, 即 $g = f - h$, 由式 (6.2.5) 和式 (6.2.16), 有

$$G_n = (2^n - 1)H_n = \frac{(2^n-1)(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!} \quad (n \geqslant 1). \tag{6.2.17}$$

结合式 (6.2.11), 即可得

$$2(2^{n-1}-1)H_n = \prod_{i=2}^{n}(4i-2) + \sum_{i=2}^{n-1} H_i \prod_{j=i+1}^{n}(4j-2) \quad (n \geqslant 2), \tag{6.2.18}$$

其中 H_i $(2 \leqslant i \leqslant n)$ 由式 (6.2.5) 给出. 从而, 有组合恒等式

$$2(2^{n-1}-1)(2n-1)!! = \prod_{i=2}^{n}(4i-2) + \sum_{i=2}^{n-1}(2i-1)!! \prod_{j=i+1}^{n}(4j-2). \tag{6.2.19}$$

例 6.2.1 可定向根瓣丛依边数分的同构类. 亏格为 0 的曲面 (即 S_0) 情形已经由图 3.1.4 给出, 边数为 $0 \sim 4$ 的可定向根瓣丛, 在 S_0 上, 分别有 1, 1, 2, 5 和 14 个同构类.

在图 6.2.1 中, 可以看出亏格为 1 的曲面 (即 S_1) 情形和亏格为 2 的曲面 (即 S_2) 情形. 图中, i 和 $\bar{i}$ 表示边 i 上的同一个点, 但边 i 的两侧在 i 处的走向与在 $\bar{i}$ 处的走向相反 ($i = 1$, 2, 3 和 4). 在 S_1 上, 因为不可能有边数为 0 和 1 的地图, 只考虑边数为 2, 3 和 4 的三种情形. 有两条边时, 只有 1a 所示的 1 类. 有三条边时, 有 $4b + 3c + 3d$, 计 10 类. 有四条边时, 有 $8e + 8f + 8g + 8h + 16i + 8j + 4k + 4l + 4m + 2n$, 计 70 类. 在 S_2 上, 只可能有四条边的瓣丛. 这时, 有 $4o + 8p + 8q + 1r$, 计 21 类.

例 6.2.2 不可定向根瓣丛依边数分的同构类. 在图 6.2.3 和图 6.2.4 中, 可以看出: 一条边的不可定向瓣丛只能在不可定向亏格为 1 的曲面即 $S_{\bar{1}}$ 上, 两条边的只可能在 $S_{\bar{1}}$ 和 $S_{\bar{2}}$ 上, 三条边的只可能在 $S_{\bar{1}}$, $S_{\bar{2}}$ 和 $S_{\bar{3}}$ 上.

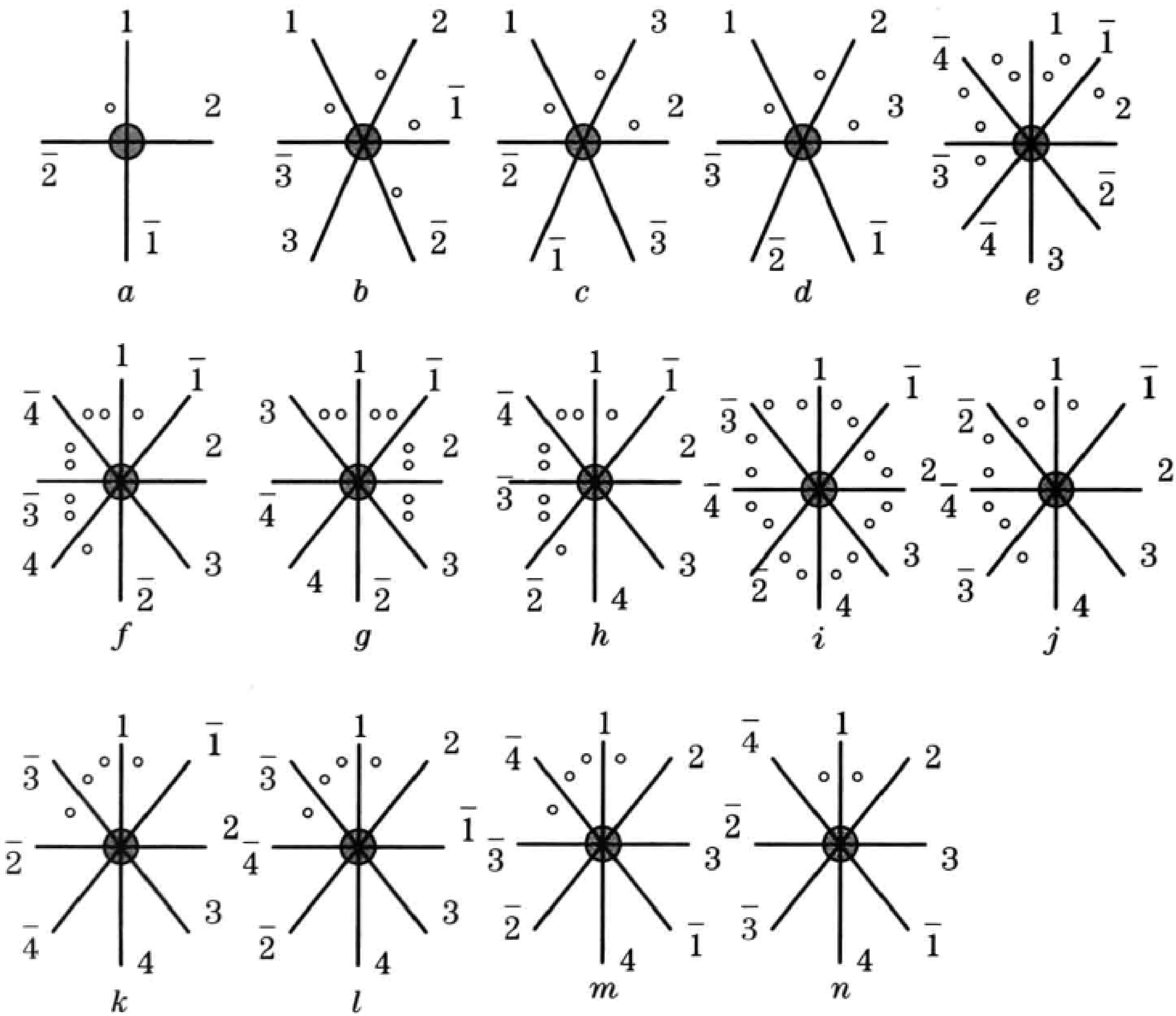


图 6.2.1 边数为 2～4 的地图在亏格为 1 的可定向曲面上根瓣丛的同构类

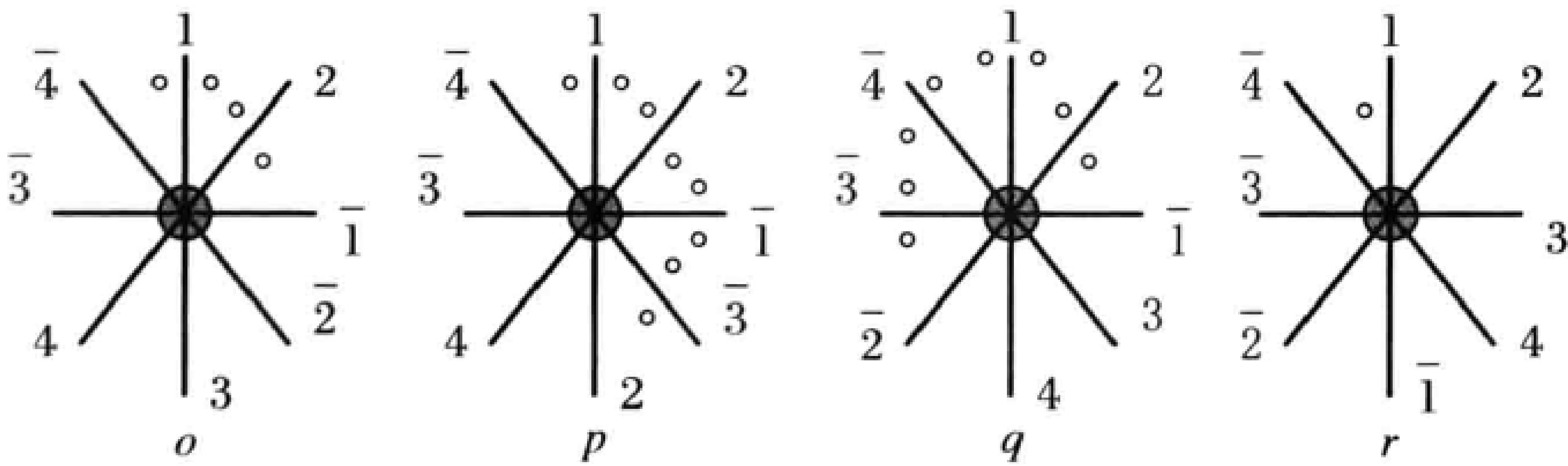


图 6.2.2 边数为 4 的地图在亏格为 2 的可定向曲面上根瓣丛的同构类

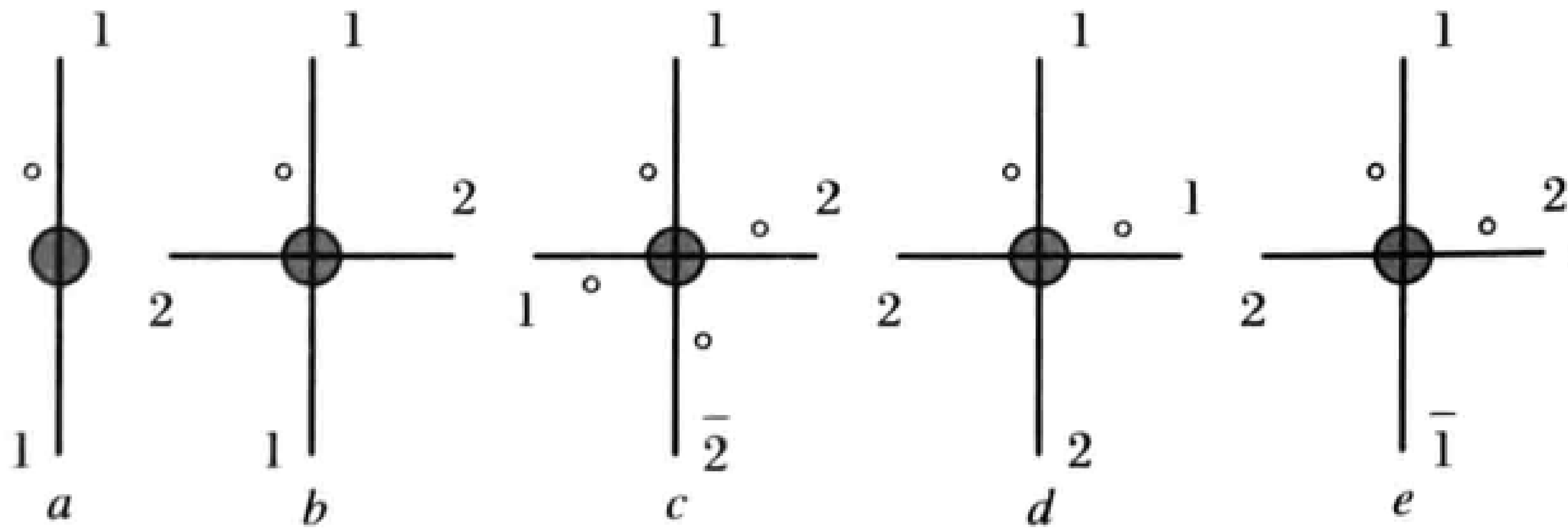


图 6.2.3 边数为 1～2 的根瓣丛在不可定向曲面上的同构类

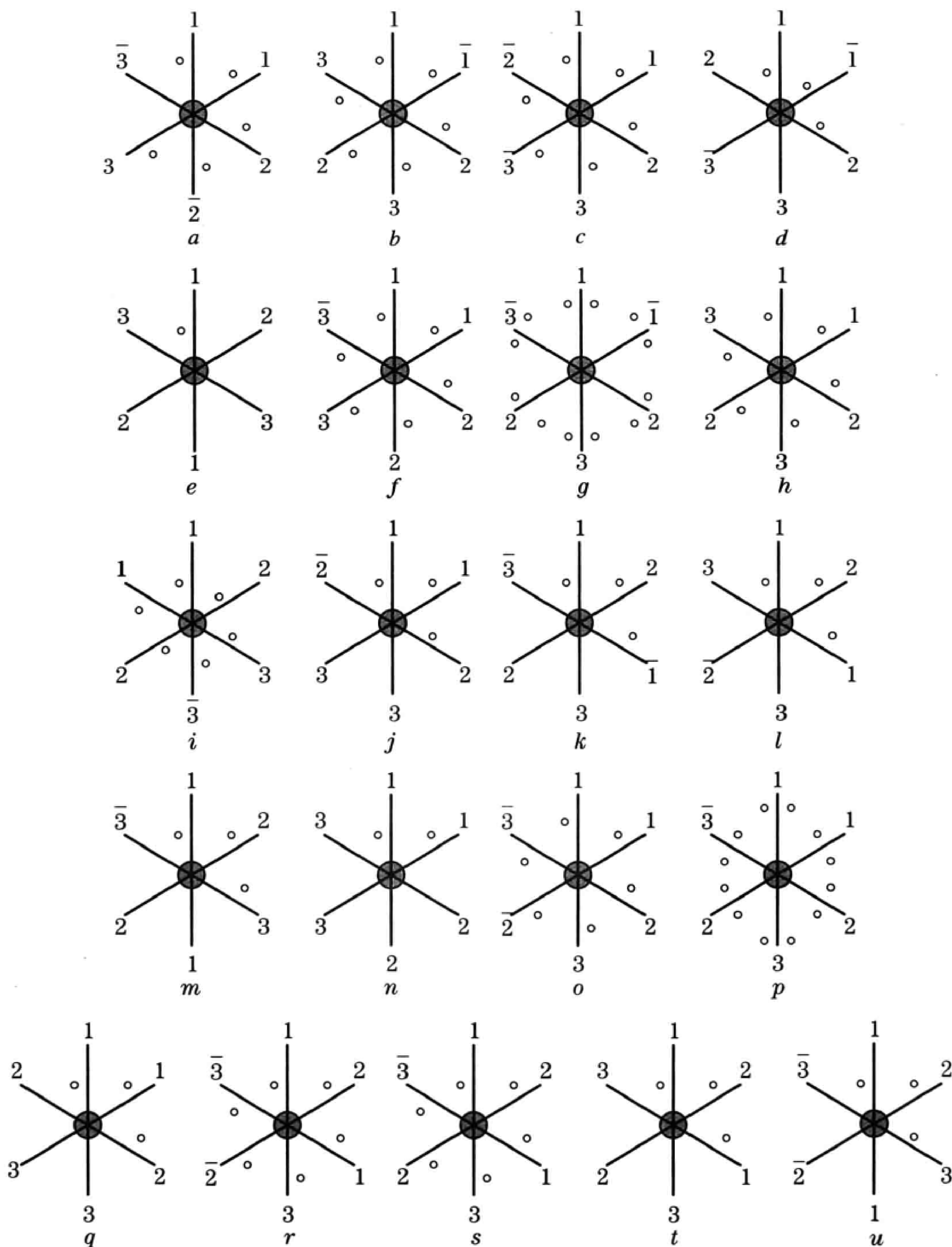


图 6.2.4 边数为 3 的根瓣丛在不可定向曲面上的同构类

从图 6.2.3 知, 边数为 1 的根瓣丛在 $S_{\bar{1}}$ 上, 只有 $1a$, 即 1 个同构类; 边数为 2 的根瓣丛在 $S_{\bar{1}}$ 和 $S_{\bar{2}}$ 上, 分别有 $1b+4c$ 和 $2d+2e$, 即 4 和 4 个同构类.

图 6.2.4 显示了边数为 3 的根瓣丛在不可定向曲面上的同构类.

在图 6.2.4 中, e 与 a, b, c, d 一样, 都在曲面 $S_{\tilde{1}}$ 上. 从而, 三条边的根瓣丛在亏格为 $\tilde{1}$ 的不可定向曲面上的同构类, 有 $6a+6b+6c+3d+1e$, 计 $6+6+6+3+1=22$ 个. 其中, $f\sim m$ 都在曲面 $S_{\tilde{2}}$ 上, $n\sim u$ 都在曲面 $S_{\tilde{3}}$ 上. 从而, 三条边的根瓣丛在亏格为 $\tilde{2}$ 的不可定向曲面上的同构类, 有 $6f+12g+6h+6i+3j+3k+3l+3m$, 计 $6+12+6+6+3+3+3+3=42$ 个. 三条边的根瓣丛在亏格为 $\tilde{3}$ 的不可定向曲面上的同构类, 有 $2n+6o+12p+3q+6r+6s+3t+3u$, 计 $2+6+12+3+6+6+3+3=41$ 个.

6.3　可定向和

在文献[57](定理 8.5.1, 268 页) 中, 发现了方程

$$\begin{cases} 2x^2\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=-1+(1-x)f-xf^2, \\ f_0=f|_{x=0}=1. \end{cases} \tag{6.3.1}$$

目标是要求得这个方程在 $\mathcal{R}_+\{x\}$ 中的一个解, 如果存在的话.

为推导方便, 将方程 (6.3.1) 的第一式变成其等价形式

$$f=1+xf+2x^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}+xf^2. \tag{6.3.2}$$

因为 $f\in\mathcal{R}_+\{x\}$, f 由 $[f]_n=\partial_x^n f$ $(n\geqslant 0)$ 确定. 令 $F_n=[f]_n$ $(n\geqslant 0)$, 则有

$$[xf]_n=[f]_{n-1}=\begin{cases} 0, & n=0, \\ F_{n-1}, & n\geqslant 1, \end{cases} \tag{6.3.3}$$

$$[xf^2]_n=[f^2]_{n-1}=\sum_{i=0}^{n}F_nF_{n-i}\quad (n\geqslant 0). \tag{6.3.4}$$

由

$$\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]_n=\begin{cases} 0, & n=0, \\ (n+1)F_{n+1}, & n\geqslant 1, \end{cases}$$

有

$$\left[x^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]_n=\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]_{n-2}=\begin{cases} 0, & 0\leqslant n\leqslant 2, \\ (n-1)F_{n-1}, & n\geqslant 3. \end{cases} \tag{6.3.5}$$

在式 (6.3.3) ~ 式 (6.3.5) 的基础上, 利用方程式 (6.3.2), 有

$$x^0: \ F_0 = 1 + [xf]_0 + 2\left[x^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]_0 + [xf^2]_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_0 = 1, \tag{6.3.6}$$

$$x^1: \ F_1 = [xf]_1 + 2\left[x^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]_1 + [xf^2]_1 = F_0 + F_0^2 \quad \Rightarrow \quad F_1 = 1 + 1 = 2, \tag{6.3.7}$$

$$\begin{aligned} x^2: \ F_2 &= [xf]_2 + 2\left[x^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]_2 + [xf^2]_2 = F_1 + 2F_1 + 2F_0F_1 = 2 + 4 + 4 \\ &\Rightarrow \quad F_2 = 10, \end{aligned} \tag{6.3.8}$$

对于 $n \geqslant 3$,

$$\begin{aligned} x^n: F_n &= [xf]_n + 2\left[x^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]_n + [xf^2]_n \\ &= F_{n-1} + 2(n-1)F_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} F_iF_{n-1-i} \\ \Rightarrow \quad F_n &= (2n-1)F_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} F_iF_{n-1-i}. \end{aligned} \tag{6.3.9}$$

引理 6.3.1 对于任何整数 $n \geqslant 0$, 有

$$\left.\begin{array}{ll} 1 & (\ n=0\ ) \\ 2 & (\ n=1\ ) \\ (2n-1)F_{n-1} + \sum\limits_{i=0}^{n-1} F_iF_{n-1-i} & (\ n \geqslant 2\ ) \end{array}\right\} = F_n \in \mathcal{R}_+. \tag{6.3.10}$$

证明 易知 $F_0 = 1$, $F_1 = 2 \in \mathcal{R}_+$. 对于整数 $n \geqslant 2$, 由归纳假设 $F_i \in \mathcal{R}_+$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, 则由式 (6.3.10) 得 $F_n \in \mathcal{R}_+$. □

这个引理告诉我们, 由式 (6.3.10) 确定的函数 $f \in \mathcal{R}_+\{x\}$.

定理 6.3.1 方程式 (6.3.1) 在 $\mathcal{R}\{x\}$ 中有且仅有一个解.

证明 在式 (6.3.10) 中, 因为 $F_0 = 1$ 就是方程式 (6.3.1) 的始条件, 由式 (6.3.10) 确定的函数 $f \in \mathcal{R}_+\{x\} \subseteq \mathcal{R}\{x\}$ 可知, 这个函数是方程式 (6.3.1) 的一个解.

进而, 由式 (6.3.10) 确定的函数 f 对于初值 F_0 的唯一性可知, f 是方程式 (6.3.1) 仅有的解. □

因为 F_n $(n \geqslant 2)$ 是一个正项有限和, 故由式 (6.3.10) 确定的函数 $f = f_{\text{orien}}$ 本身就是一个正项和形式.

例 6.3.1 在所有可定向曲面上, 给定边数的一般根地图的同构类. 因为已经知道, 例如在[57] (定理 8.5.1, 268 页), 或更详细地在 [65](定理 9.5.1, 314 页) 中, 以边数为参数的一般根地图在可定向曲面上总和的计数函数满足方程式 (6.3.1), 由定理 6.3.1, 即得式 (6.3.10) 确定的函数 f 就是这个计数函数. 这里仅看一看三条边及三条边以下的情形.

由式 (6.3.10), 可知 $F_0=1$, $F_1=2$, $F_2=10$, $F_3=74$. 在 $F_0+F_1+F_2=1+2+10=13$ 个根瓣丛中, 只有 1 个根地图不在 S_0(球面, 或平面) 上. 它有 2 条边和 1 个顶点, 如图 6.3.1 中的 a 所示, 在 S_1(亏格为 1 的可定向曲面或环面) 上.

因为 3 条边的图只能嵌入到亏格至多为 1 的可定向曲面, 在 $F_3=74$ 个根瓣丛中, 只有 20 个非平面根地图. 它们都在 S_1 上. 如图 6.3.1 的 $b\sim g$ 所示, 即 $4b+3c+3d+3e+6f+1g$, 计 $4+3+3+3+6+1=20$ 个.

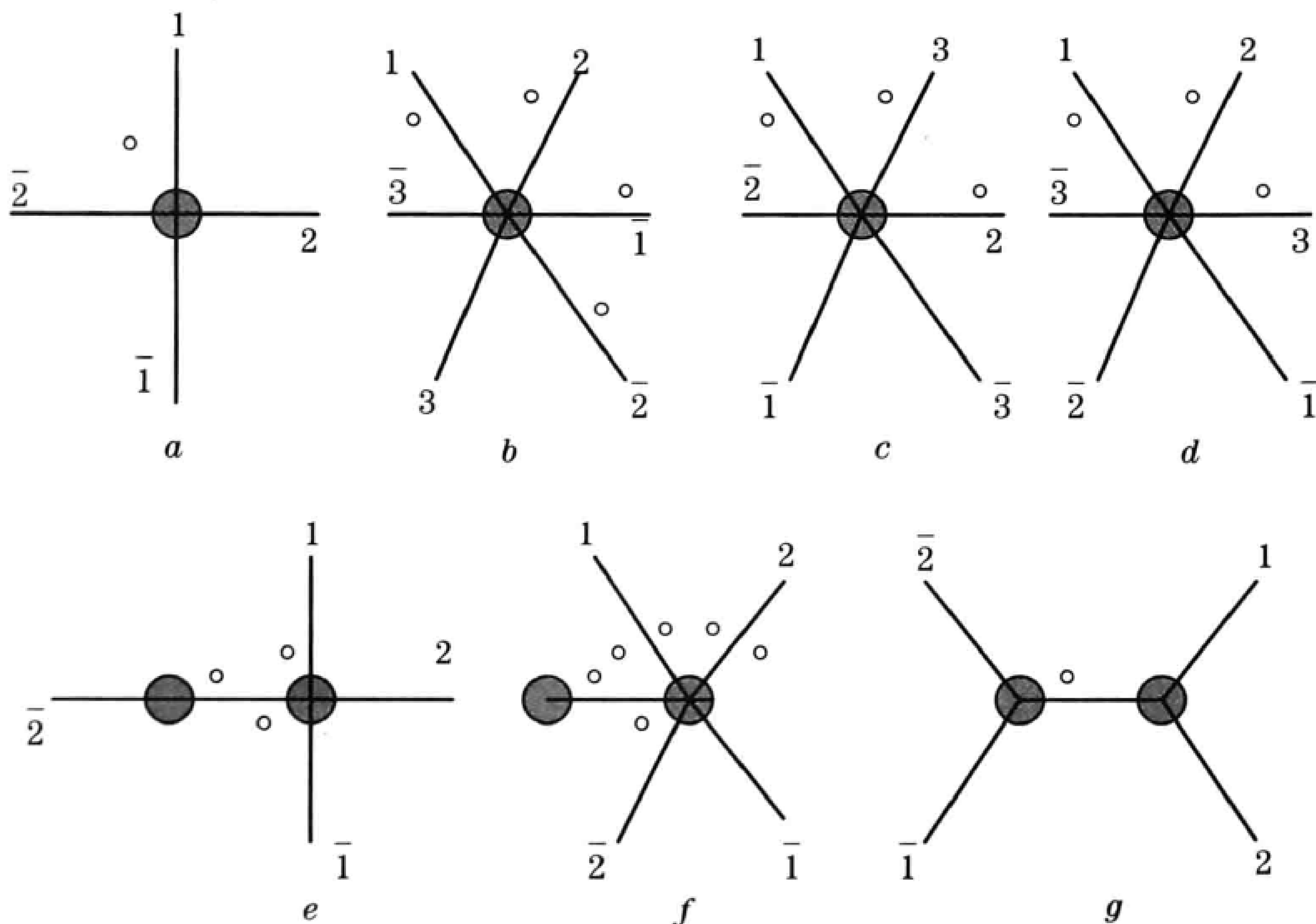


图 6.3.1 边数为 3 的根瓣丛在亏格非零的可定向曲面上的同构类

例 6.3.2 考察方程

$$\begin{cases} ax^2\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=-b+b(1-x)f-cxf^2, \\ f|_{x=0}=1, \end{cases} \tag{6.3.11}$$

其中 a, b, $c\in\mathcal{R}_+$, $b|a$, $b|c$.

为便于推演, 采用方程 (6.3.11) 的第一式的等价形式

$$bf=b+bxf+ax^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}+cxf^2.$$

由于 $b|a$, 故 $\alpha=a/b\in\mathcal{R}_+$. 同样由 $b|c$, 知 $\beta=c/b\in\mathcal{R}_+$, 因此有

$$f=1+xf+\alpha x^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}+\beta xf^2. \tag{6.3.12}$$

基于式 (6.3.3) ~ 式 (6.3.5), 由式 (6.3.12), 即可得

$$x^0:\ F_0=1+[xf]_0+a\left[x^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]_0+\beta[xf^2]_0=0 \quad\Rightarrow\quad F_0=1, \tag{6.3.13}$$

$$x^1:\ F_1=[xf]_1+\alpha\left[x^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]_1+\beta[xf^2]_1=F_0+\beta F_0^2 \quad\Rightarrow\quad F_1=1+\beta, \tag{6.3.14}$$

对于 $n\geqslant 2$,

$$\begin{aligned}x^n:\ F_n&=[xf]_n+\alpha\left[x^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]_n+\beta[xf^2]_n\\&=F_{n-1}+\alpha(n-1)F_{n-1}+\beta\sum_{i=0}^{n-1}F_iF_{n-1-i}\\&\Rightarrow\quad F_n=(\alpha n-\alpha+1)F_{n-1}+\beta\sum_{i=0}^{n-1}F_iF_{n-1-i}.\end{aligned} \tag{6.3.15}$$

引理 6.3.2 对于任何整数 $n\geqslant 0$,

$$\left.\begin{array}{ll}1 & (n=0)\\ 1+\beta & (n=1)\\ (\alpha n-\alpha+1)F_{n-1}+\beta\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}F_iF_{n-1-i} & (n\geqslant 2)\end{array}\right\}=F_n\in\mathcal{R}_+. \tag{6.3.16}$$

证明 易知 $F_0=1$, $F_1=1+\beta\in\mathcal{R}_+$. 对于整数 $n\geqslant 2$, 由归纳假设 $F_i\in\mathcal{R}_+$ $(0\leqslant i\leqslant n-1)$, 则由式 (6.3.16) 得 $F_n\in\mathcal{R}_+$. □

这个引理启示我们, 由式 (6.3.16) 确定的函数 $f\in\mathcal{R}_+\{x\}$.

定理 6.3.2 方程式 (6.3.11) 在 $\mathcal{R}\{x\}$ 中有且仅有一个解.

证明 在式 (6.3.16) 中, 因为 $F_0=1$ 就是方程式 (6.3.11) 的始条件, 故由式 (6.3.16) 确定的函数 $f\in\mathcal{R}_+\{x\}\subseteq\mathcal{R}\{x\}$ 可知, 这个函数是方程式 (6.3.11) 的一个解.

进而, 由式 (6.3.16) 确定的函数 f 对于初值 F_0 的唯一性可知, f 是方程式 (6.3.11) 仅有的解. □

因为 F_n $(n\geqslant 2)$ 是一个正项有限和, 由式 (6.3.16) 所确定的函数 f 本身就是一个有限正项和表示.

6.4 不可定向和

在文献[62](定理 9.6, 209 页. 但要注意其中 $b(x)$ 的表达式中的“−”应为“+”. 这里得以纠正) 中, 发现了方程

$$\begin{cases} 4x^2\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=a(x)f-xf^2-2xb(x), \\ \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=1, \end{cases} \tag{6.4.1}$$

其中

$$\begin{cases} a(x)=1-2x-2xf_{\mathrm{orien}}, \\ b(x)=f_{\mathrm{orien}}+2x\dfrac{\mathrm{d}f_{\mathrm{orien}}}{\mathrm{d}x}. \end{cases} \tag{6.4.2}$$

这里的 f_{orien} 由式 (6.3.10) 确定, 就是方程式 (6.3.1) 的解.

为了方便, 采用方程 (6.3.1) 的第一式的一个等价形式

$$\begin{aligned} f&=xb(x)+2x(1+f_{\mathrm{orien}})f+4x^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}+xf^2 \\ &=A(x)+2B(x)f+2xf_{\mathrm{orien}}f+xf^2, \end{aligned} \tag{6.4.3}$$

其中

$$\begin{cases} A(x)=x\Big(f_{\mathrm{orien}}+2x\dfrac{\mathrm{d}f_{\mathrm{orien}}}{\mathrm{d}x}\Big), \\ B(x)=x\Big(f+2x\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Big). \end{cases} \tag{6.4.4}$$

对于整数 $n\geqslant 0$, 令 $O_n=[f_{\mathrm{orien}}]_n$, 即 $\partial_x^n f_{\mathrm{orien}}$. 由式 (6.3.10), 有

$$O_n=\begin{cases} 1, & n=0, \\ 2, & n=1, \\ (2n-1)O_{n-1}+\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}O_iO_{n-1-i}, & n\geqslant 2. \end{cases} \tag{6.4.5}$$

对于整数 $n\geqslant 1$, 有

$$[A(x)]_n=\Big[f_{\mathrm{orien}}+2x\frac{\mathrm{d}f_{\mathrm{orien}}}{\mathrm{d}x}\Big]_{n-1}=O_{n-1}+2\Big[\frac{\mathrm{d}f_{\mathrm{orien}}}{\mathrm{d}x}\Big]_{n-2}$$

$$= O_{n-1} + 2(n-1)O_{n-1} = (2n-1)O_{n-1}, \tag{6.4.6}$$

$$[B(x)]_n = \left[f + 2x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]_{n-1} = F_{n-1} + 2\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]_{n-2}$$

$$= F_{n-1} + 2(n-1)F_{n-1} = (2n-1)F_{n-1}, \tag{6.4.7}$$

其中 $F_n = [f]_n$ $(n \geqslant 0)$.

由方程式 (6.4.4), 对于整数 $n \geqslant 0$, 有

$$[f]_n = [A(x)]_n + 2[B(x)f]_n + 2[f_{\text{orien}}f]_{n-1} + [f^2]_{n-1}. \tag{6.4.8}$$

利用式 (6.4.6) 和式 (6.4.7), 即可得

$$x^0: \ F_0 = 0+0+0+0 = 0.$$

注意到 $O_0 = 1$, $F_0 = 0$, 所以

$$x^1: \ F_1 = 1+0+0+0 = 1.$$

对于 $n \geqslant 2$, 同样注意到 $O_0 = 1$, $F_0 = 0$, 所以

$$F_n = (2n-1)O_{n-1} + 2(2n-1)F_{n-1} + 2\sum_{i=1}^{n-1} F_i O_{n-1-i} + \sum_{i=1}^{n-2} F_i F_{n-1-i}$$

$$= (2n-1)O_{n-1} + 4nF_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} F_i(2O_{n-1-i} + F_{n-1-i}).$$

总之, 有

$$F_n = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ 1, & n = 1, \\ (2n-1)O_{n-1} + 4nF_{n-1} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-2} F_i(2O_{n-1-i} + F_{n-1-i}), & n \geqslant 2. \end{cases} \tag{6.4.9}$$

引理 6.4.1 对于整数 $n \geqslant 0$, 由式 (6.4.9) 确定的 $F_n \in \mathcal{R}_+$.

证明 首先, $F_0 = 0 \in \mathcal{R}_+$, $F_1 = 1 \in \mathcal{R}_+$. 然后, 对于 $n \geqslant 2$, 归纳地, 假设 $F_i \in \mathcal{R}_+$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$. 由引理 6.3.1, 知 $O_n \in \mathcal{R}_+$ $(n \geqslant 0)$; 由归纳假设, 知 $F_{n-1} \in \mathcal{R}_+$ F_i, $F_{n-1-i} \in \mathcal{R}_+$ $(1 \leqslant i \leqslant n-2)$. 因此从式 (6.4.9), 即可导出 $F_n \in \mathcal{R}_+$. 由数学归纳法原理, 引理得证. □

这个引理告诉我们, 由式 (6.4.9) 确定的函数 $f \in \mathcal{R}_+\{x\} \subseteq \mathcal{R}\{x\}$.

定理 6.4.1 方程式 (6.4.1) 在 $\mathcal{R}\{x\}$ 中有且仅有一个解.

证明 由式 (6.4.9) 确定的函数 f 满足式 (6.4.3), 从而满足方程 (6.4.1) 的第一式, 以及 $F_1 = 1 = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$. 由引理 6.4.1 知这个函数是方程式 (6.4.1) 的一个解. 进而, 在式 (6.4.9) 中, $\{F_n|\ n \geqslant 0\}$ 对于始条件 $F_1 = 1$ 具有唯一性, 由此即知这个解在 $\mathcal{R}\{x\}$ 中是仅有的. □

上述证明过程已经表明, 由式 (6.4.9) 确定的函数 $f = f_{\rm non}$ 就是方程式 (6.4.1) 的解.

例 6.4.1 不可定向根地图依边数分的同构类. 因为只有基准图有圈 (自环本身是一个圈) 的地图才有可能是不可定向的, 所有树均不在讨论之列. 记 G_{x-y-z} 为所有带 x 条边和 y 个节点的图中的第 z 个. 方程 (6.4.1) 的解 $f_{\rm non}$ 就是所有不可定向地图以边数为参数的计数函数. 由式 (6.4.9), $F_n = \partial_x^n f_{\rm non} \triangleq N_n\ (n \geqslant 0)$, 则有

$$N_0 = 0, \quad N_1 = 1, \quad N_2 = 14, \quad N_3 = 223.$$

在图 6.4.1~图 6.4.3 中, 列出了边数不超过 3 的不可定向根地图的同构类.

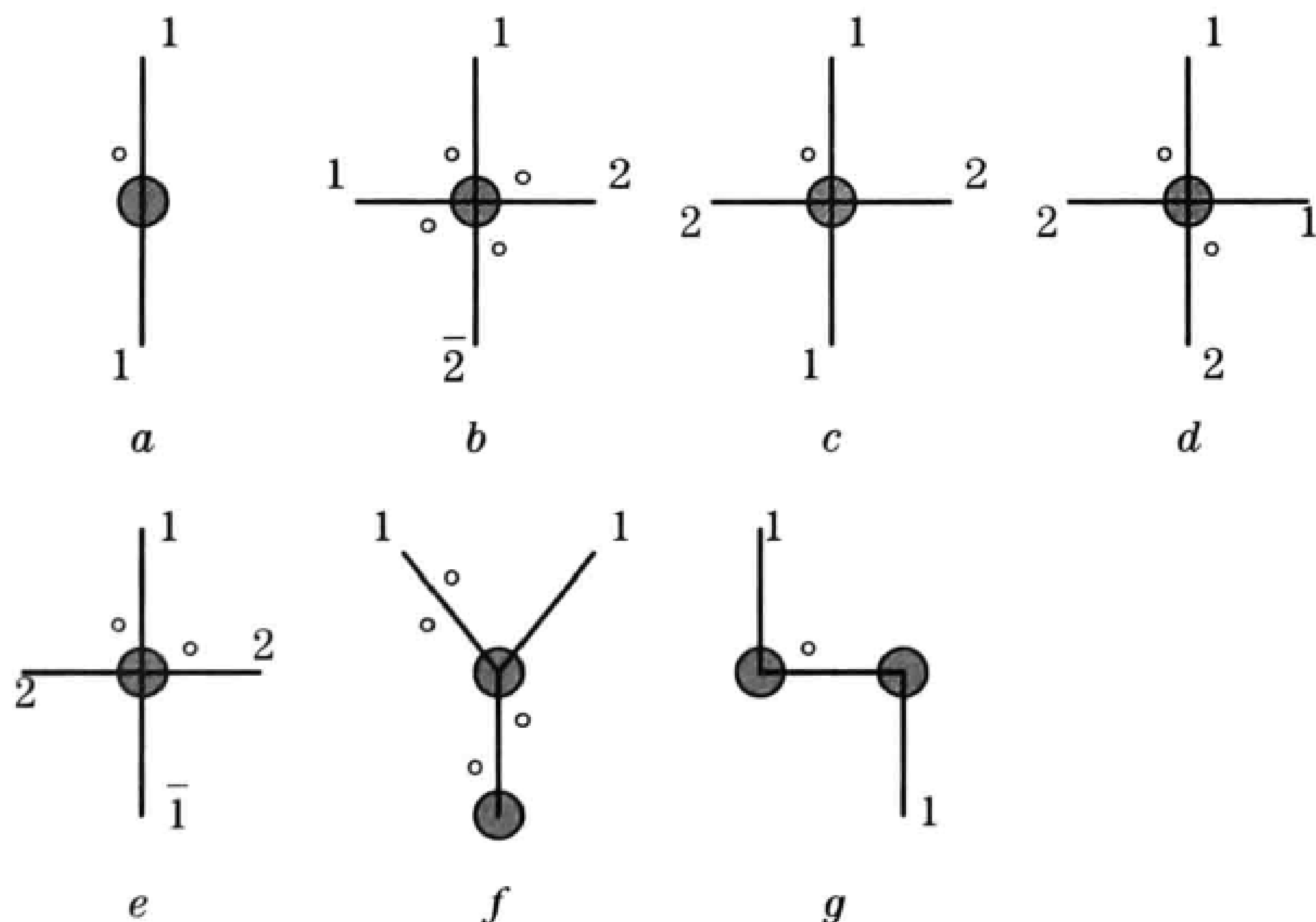


图 6.4.1 边数为 1 ~ 2 的不可定向根地图的同构类

在图 6.4.1 中, a 表明边数为 1 的根地图只有 1 类. 在边数为 2 的根地图中, 基准图为 G_{2-1-1} 的有 $4b+1c$, 计 $4+1=5$ 个在 $S_{\bar{1}}$ 上; $2d+2e$, 计 $2+2=4$ 个在 $S_{\bar{2}}$ 上, 共 9 个. 基准图为 G_{2-2-1} 的有 $4f$, 计 4 个; G_{2-2-1} 的有 $1f$, 计 1 个, 共 5 个在 $S_{\bar{1}}$ 上. 从而, 边数为 2 的根地图共有 $5+5=10$ 个同构类在 $S_{\bar{1}}$ 上, 4 个在 $S_{\bar{2}}$ 上, 总共 $10+4=14$ 个同构类.

在图 6.4.2 和图 6.4.3 中, 给出的是边数为 3 的根地图的同构类. 其中, 图 6.4.2 只显示以 G_{3-1-1} 为基准图的边数为 3 的根地图的同构类, 图 6.4.3 显示边数为 3 的根地图的所有其他同构类. 注意, 边旁没有小空心圆的地图表示带 12(即边数的 4 倍) 个根地图的同构类.

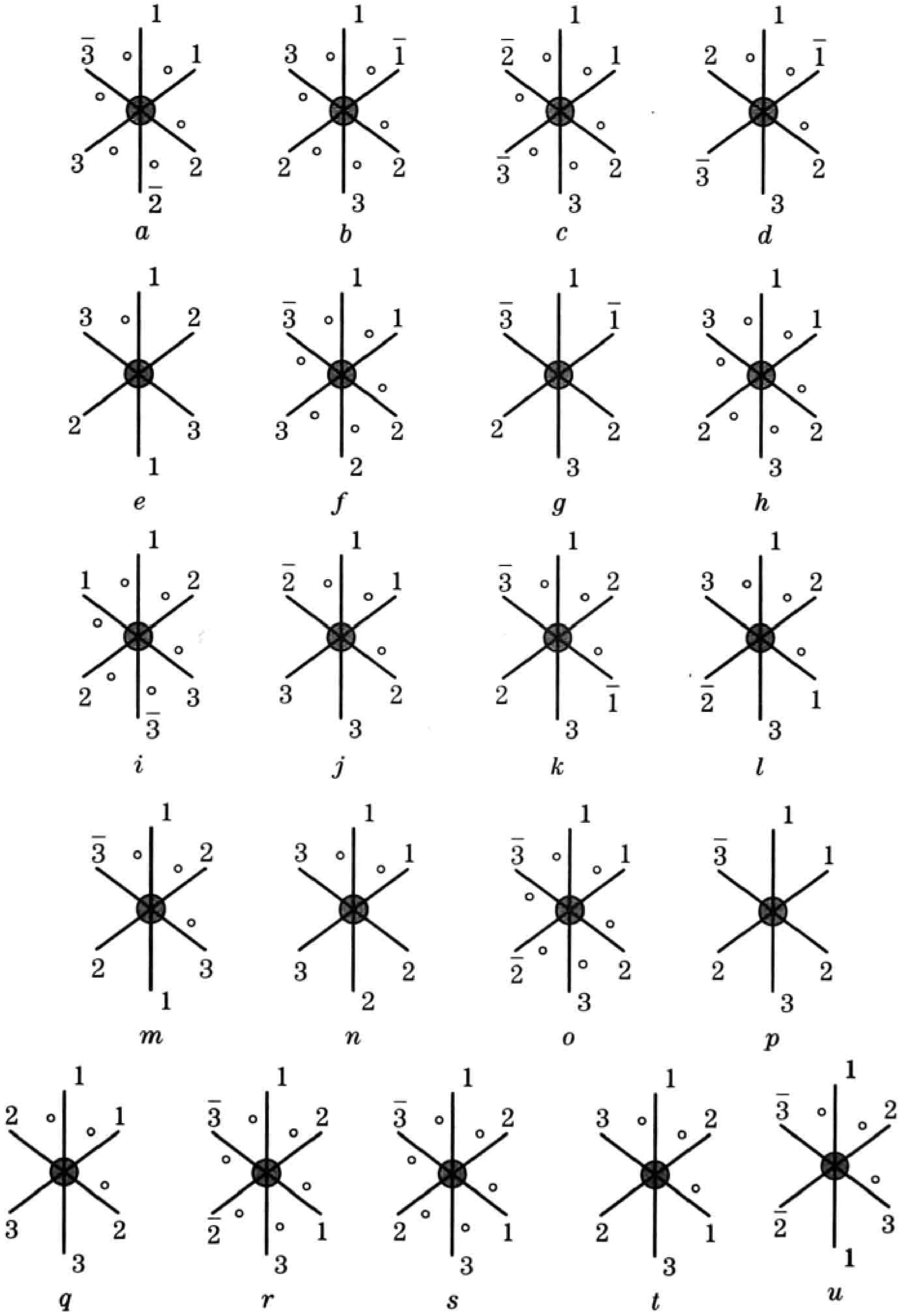


图 6.4.2 基准图 G_{3-1-1} 的不可定向根地图的同构类

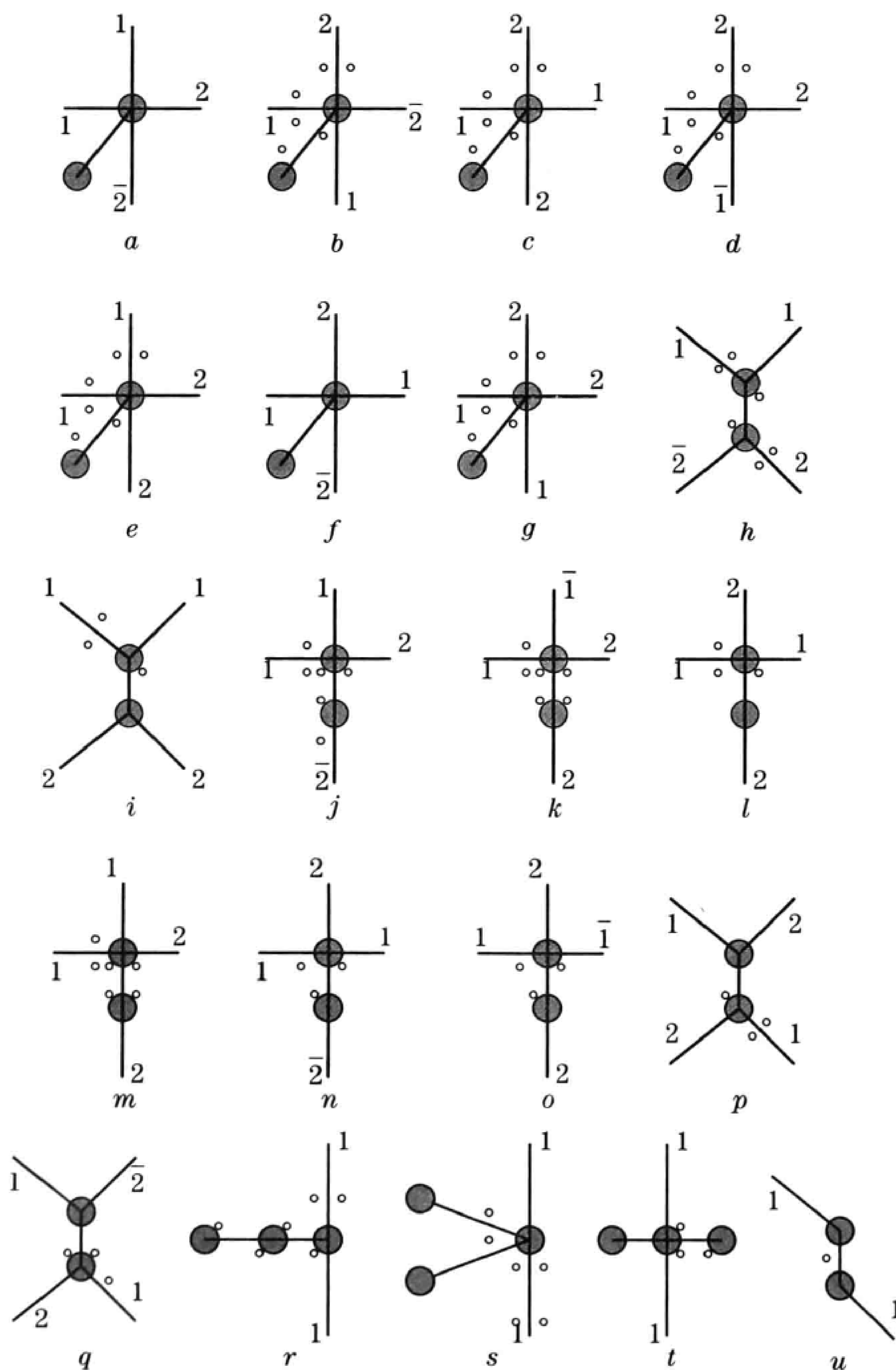


图 6.4.3　其他边数为 3 的基准图的不可定向根地图的同构类

在图 6.4.2 中可以看出, 有 $6a+6b+6c+3d+1e$, 计 $6+6+6+3+1=22$ 个在 $S_{\bar{1}}$ 上； $6f+12g+6h+6i+3j+3k+3l+3m$, 计 $6+12+6+6+3+3+3+3=42$ 个在 $S_{\bar{2}}$ 上; $2n+6o+12p+3q+6r+6s+3t+3u$, 计 $2+6+12+3+6+6+3+3=41$ 个在 $S_{\bar{3}}$ 上. 在图 6.4.3 中, 以 G_{3-2-1} 为基准图的有 $12a+6b+6c+6d$, 计 30 个在 $S_{\bar{1}}$ 上; $6e+12f+6g$, 计 24 个在 $S_{\bar{2}}$ 上. 以 G_{3-2-2} 为基准图的有 $6h$, 计 6 个

在 $S_{\tilde{1}}$ 上; $3i$, 计 3 个在 $S_{\tilde{2}}$ 上. 以 G_{3-2-3} 为基准图的有 $6j+6k+3l$, 计 15 个在 $S_{\tilde{1}}$ 上; $6m+3n+3o$, 计 12 个在 $S_{\tilde{2}}$ 上. 以 G_{3-2-4} 为基准图的有 $3p$, 计 3 个在 $S_{\tilde{1}}$ 上; $3q$, 计 3 个在 $S_{\tilde{2}}$ 上. 以 G_{3-3-1} 为基准图的有 $6r$, 计 6 个在 $S_{\tilde{1}}$ 上. 以 G_{3-3-2} 为基准图的有 $6s+3t$, 计 9 个在 $S_{\tilde{1}}$ 上. 以 G_{3-3-3} 为基准图的有 $6u$, 计 6 个在 $S_{\tilde{1}}$ 上. 以 G_{3-3-4} 为基准图的有 $1v$, 计 1 个在 $S_{\tilde{1}}$ 上.

总之, 边数为 3 的根地图在 $S_{\tilde{1}}$ 上, 有 $22+30+6+15+3+6+6+6+1=96$ 个在 $S_{\tilde{2}}$ 上, 有 $42+24+3+12+3=86$ 个在 $S_{\tilde{3}}$ 上, 共有 41 个同构类. 在所有不可定向曲面上, 边数为 3 的根地图共有 $96+86+41=223$ 个同构类.

6.5 普通总和

考察方程

$$\begin{cases} ax^2\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=-1+(1-bx)f-cxf^2, \\ f|_{x=0}=1, \end{cases} \tag{6.5.1}$$

其中 $a,b,c\in\mathcal{R}_+$.

为便于推演, 采用方程 (6.5.1) 的第一式的等价形式

$$f=1+bxf+ax^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}+cxf^2. \tag{6.5.2}$$

由方程式 (6.5.2), 对于整数 $n\geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned}[f]_n&=[1]_n+b[xf]_n+a\left[x^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]_n+c[xf^2]_n\\ &=\begin{cases}1, & n=0,\\ b[f]_{n-1}+a\left[\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]_{n-2}+c[f^2]_{n-1}, & n=0.\end{cases}\end{aligned} \tag{6.5.3}$$

因为 $F_n=[f]_n=\partial_x^n f$,

$$\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]_{n-2}=(n-1)F_{n-1},\quad [f^2]_{n-1}\ =\sum_{i=0}^{n-1}F_iF_{n-1-i},$$

由式 (6.5.3), 可得

$$x^0:\ F_0=1, \tag{6.5.4}$$

$$x^1:\ F_1=bF_0+0+cF_0^2 \quad \Rightarrow \quad F_1=b+c, \tag{6.5.5}$$

对于 $n\geqslant 2$,

$$\begin{aligned} x^n:\ F_n &= b[f]_{n-1}+a\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right]_{n-2}+c[f^2]_{n-1} \\ &= bF_{n-1}+a(n-1)F_{n-1}+c\sum_{i=0}^{n-1}F_iF_{n-1-i} \\ \Rightarrow \quad F_n &= (an-a+b)F_{n-1}+c\sum_{i=0}^{n-1}F_iF_{n-1-i}. \end{aligned} \tag{6.5.6}$$

引理 6.5.1　对于任何整数 $n\geqslant 0$,

$$\left.\begin{array}{ll} 1 & (\ n=0\ ) \\ b+c & (\ n=1\ ) \\ (an-a+b)F_{n-1}+c\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}F_iF_{n-1-i} & (\ n\geqslant 2\ ) \end{array}\right\} = F_n\in\mathcal{R}_+. \tag{6.5.7}$$

证明　易知 $F_0=1$, $F_1=b+c\in\mathcal{R}_+$. 对于整数 $n\geqslant 2$, 由归纳假设 $F_i\in\mathcal{R}_+$ $(0\leqslant i\leqslant n-1)$, 则由式 (6.5.7) 得 $F_n\in\mathcal{R}_+$. □

这个引理启示我们, 由式 (6.5.7) 确定的函数 $f\in\mathcal{R}_+\{x\}$.

定理 6.5.1　方程式 (6.5.1) 在 $\mathcal{R}\{x\}$ 中有且仅有一个解.

证明　在式 (6.5.4) 中, 因为 $F_0=1$ 就是方程式 (6.5.1) 的始条件, 由式 (6.5.7) 确定的函数 $f\in\mathcal{R}_+\{x\}\subseteq\mathcal{R}\{x\}$ 可知, 这个函数是方程式 (6.5.2) 的解, 从而是方程式 (6.5.1) 的一个解.

进而, 由式 (6.5.7) 确定的函数 f 对于初值 F_0 的唯一性可知, f 是方程式 (6.5.1) 仅有的解. □

因为 F_n $(n\geqslant 2)$ 是一个正项有限和, 式 (6.5.7) 所确定的函数 f 本身就是一个有限正项和表示. □

例 6.5.1　在方程式 (6.5.1) 中, 当 $a=4$, $b=2$, $c=1$ 时, 就得到文献 [62](定理 9.7, 213 页) 中的方程

$$\left\{\begin{array}{l} 4x^2\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=-1+(1-2x)f-xf^2, \\ f_0=f|_{x=0}=1. \end{array}\right. \tag{6.5.8}$$

例 6.5.2　从方程式 (6.3.1) 与方程式 (6.4.1) 的和, 可直接导出方程式 (6.5.8). 实际上, 从式 (6.3.10) 与式 (6.4.9) 的和也可导出方程式 (6.5.8) 的解.

6.6 球面三角化四色和

讨论下面二阶常微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} \left(2z+5f-3z\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2}=48z, \\ f|_{z=0}=0, \quad \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\Big|_{z=0}=0. \end{cases} \tag{6.6.1}$$

为了便于在整域扩张 $\mathcal{R}\{y\}$ 上讨论, 等价地将方程式 (6.6.1) 变换为确定 $\{F_n=\partial_y^n\,|\,\text{整数 } n\geqslant 0\}$ 的方程组. 记

$$\begin{aligned} &s=2z+5f-3z\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}, \quad S_n=\partial_y^n s, \\ &f''=\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2}, \quad F_n''=\partial_y^n f'' \end{aligned} \tag{6.6.2}$$

其中整数 $n\geqslant 0$. 从而, 有

$$\begin{aligned} &S_n=\begin{cases} 5F_0, & n=0, \\ 2(1+F_1), & n=1, \\ (5-3n)F_n, & n\geqslant 2, \end{cases} \\ &F_n''=(n+2)(n+1)F_{n+2}. \end{aligned} \tag{6.6.3}$$

进一步, 对于整数 $n\geqslant 0$, 令

$$\varDelta_n=\sum_{i=0}^{n} S_i F_{n-i}''. \tag{6.6.4}$$

在式 (6.6.2)~式 (6.6.4) 的基础上, 从方程式 (6.6.1), 即可得

$$\begin{aligned} z^0: \varDelta_0=S_0F_0''=0 \quad &(\text{用 } S_0=5F_0, F_0''=2F_2) \\ \Rightarrow \quad \varDelta_0=(5F_0)(2F_2''). \end{aligned} \tag{6.6.5}$$

由方程式 (6.6.1) 的始条件 $F_0=0$, 可知等式 $\varDelta_0=0$ 成立.

对于 $n=1$,

$$z^1: \varDelta_1=S_0F_1''+S_1F_0'' \ (\text{用 } S_0=0,\ F_1''=6F_3)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_1 = S_1 F_0'' \text{ (用 } S_1 = 2(1+F_1),\ F_0'' = 2F_2),$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_1 = 2(1+F_1)2F_2. \tag{6.6.6}$$

由方程式 (6.6.1) 的始条件 $F_1 = 0$ 得, 当 $F_2 = 12$ 时, 等式 $\Delta_1 = 48$ 成立.

对于 $n = 2$,

$$z^2 : \Delta_2 = S_0 F_2'' + S_1 F_1'' + S_2 F_0'' \quad \text{(用 } S_0 = 0,\ F_1 = 0)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_2 = 2(6F_3) + S_2 F_0'' \quad \text{(用 } S_2 = (5-6)F_2,\ F_0'' = 2F_2)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_2 = 12F_3 - F_2(2F_2). \tag{6.6.7}$$

因为 $\Delta_1 = 48$ 成立的条件是 $F_2 = 12$, 所以只能当 $F_3 = 2F_2 = 24$ 时, 等式 $\Delta_2 = 0$ 成立.

对于 $n = 3$,

$$z^3 : \Delta_3 = S_0 F_3'' + S_1 F_2'' + S_2 F_1'' + s_3 F_0'' \quad \text{(用 } S_0 = 0,\ S_1 = 2)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_3 = 2(12F_4) + S_2(6F_3) + S_3(2F_2) \quad \text{(用 } S_2 = -F_2,\ S_3 = -4F_3)$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_3 = 2(12F_4) - F_2(6F_3) - 4F_3(2F_2). \tag{6.6.8}$$

因为 $\Delta_2 = 0$ 成立的条件是 $F_3 = 24$, 所以只能当 $F_4 = 6F_2 + 8F_2 = 168$ 时, 等式 $\Delta_3 = 0$ 成立.

一般地, 对于 $n \geqslant 4$, 因为 $S_0 = 0$, $S_1 = 2$, 以及 $F_{n-1}'' = (n+1)nF_{n+1}$,

$$\begin{aligned} z^n : \Delta_n &= 2(n+1)nF_{n+1} + \sum_{i=2}^{n} S_i F_{n-i}'' \\ &= 2(n+1)nF_{n+1} - \sum_{i=2}^{n} (3i-5) F_i F_{n-i}'' \\ &= 2(n+1)nF_{n+1} - \sum_{i=2}^{n} (3i-5)(n-i+2)(n-i+1) F_i F_{n-i+2}, \end{aligned} \tag{6.6.9}$$

所以只有当

$$F_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)n} \sum_{i=2}^{n} (3i-5)(n-i+2)(n-i+1) F_i F_{n-i+2} \tag{6.6.10}$$

时, 才能使得 $\Delta_n = 0$ 成立.

定理 6.6.1 方程式 (6.6.1) 有解, 当且仅当关于 $\{F_n \,|\, n \geqslant 0\}$ 的方程组

$$\Delta_n = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ 48, & n = 1, \\ 0, & n \geqslant 2 \end{cases} \tag{6.6.11}$$

在 $F_0=0$ 和 $F_1=0$ 的条件下有解, 其中 Δ_n 由式 (6.6.9) 给出.

证明 从式 (6.6.5)~式 (6.6.10) 的过程可以看出, 只要方程式 (6.6.1) 有解, 就可导出方程组式 (6.6.11) 的一组解. 反之, 由方程组式 (6.6.11) 的一组解, 从式 (6.6.7)~式 (6.6.10), 即可导出方程式 (6.6.1) 的一个解. □

引理 6.6.1 在方程组式 (6.6.11) 的解中, 对任何整数 $n\geqslant 0$, 都有 $F_n\geqslant 0$.

证明 在式 (6.6.5)~式 (6.6.8) 的讨论中, 因为 $F_0=F_1=0$, $F_2=12$, $F_3=24$, $F_4=168$, 故对于 $n\leqslant 4$ 引理成立. 对于 $n\geqslant 5$, 由式 (6.6.10), 因为 $(3i-5)(n-i+2)(n-i+1)\geqslant 0$ $(2\leqslant i\leqslant n)$, 所以 $F_n\geqslant 0$. 从而, 引理得证. □

定理 6.6.2 方程式 (6.6.1) 在 $\mathcal{R}_+\{z\}$ 中有且仅有一个解.

证明 由定理 6.6.1 和引理 6.6.1, 考虑到从式 (6.6.5)~ 式 (6.6.10) 过程的唯一性, 即可得欲证的结论. □

进而, 还可以将方程式 (6.6.1) 的解表示为正项和的形式.

定理 6.6.3 方程式 (6.6.1) 的解有如下正项和的形式:

$$F_n=\begin{cases}0, & n=0,1,\\ 12, & n=2,\\ 24, & n=3,\\ 168, & n=4,\\ \displaystyle\sum_{i=2}^{n-1}\frac{(3i-5)(n-i+1)(n-i)}{2(n-1)n}F_iF_{n-i+1}, & n\geqslant 5.\end{cases} \tag{6.6.12}$$

证明 由方程式 (6.6.1) 的始条件, 再用式 (6.6.6)~ 式 (6.6.10), 即可得式 (6.6.12). □

下面给出应用方程式 (6.6.1) 的一个实例.

例 6.6.1 球面三角化根同构类上 4–色和. 在[103] 中, 已经证明方程式 (6.6.1) 的解 F_n $(n\geqslant 0)$ 使得

$$h=\sum_{n\geqslant 1}F_{n+2}z^n$$

为平面不可分离根三角化的 4–色和函数, 即 $H_n=\partial_z^n h=F_{n+2}$ $(n\geqslant 1)$, 即球面上 $2n$ 个面不可分离三角化所有根同构类用 4 种颜色着染方式的总和数.

引理 6.6.2 在方程组式 (6.6.11) 中, 对任何整数 $n \geqslant 4$,

$$2(n+1)n \,\Big|\, \sum_{i=2}^{n}(3i-5)(n-i+2)(n-i+1)F_iF_{n-i+2}. \tag{6.6.13}$$

证明 由式 (6.6.12), 可得

$$2(n+1)nF_{n+1} = \sum_{i=2}^{n}(3i-5)(n-i+2)(n-i+1)F_iF_{n-i+2}.$$

由于 F_{n+1} 是球面上 $2n+2$ 个面不可分离三角化所有根同构类用 4–染色方式的总和数 (一个整数), 即得欲证的结论. □

还应该用式 (6.6.12) 直接证明, 这要比上面的证明复杂得多.

定理 6.6.4 在式 (6.6.12) 所确定方程式 (6.6.1) 的解中, 对于任何整数 $n \geqslant 2$, 有 $F_n \in \mathbb{Z}_+$, 即 F_n 为非负整数.

证明 由引理 6.6.2 直接导出. □

在图 6.6.1 中, 给出了 $H_1 = F_3$ 和 $H_2 = F_4$ 的 4–色和的意义. 例如, a 显示 2 个面平面不可分离根三角化只有 1 个根同构类. 它的色多项式为 $P(a) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$. 当 $\lambda = 4$ 时, $P(a)|_{\lambda=4} = 4\times 3\times 2 = 24$. 这就是 $H_1 = F_3 = 24$. 由 b 和 c 可以看出 4 个面不可分离根三角化有 4 个根同构类. 从而

$$\begin{aligned} H_2 = F_4 &= 1P(b)|_{\lambda=4} + 3P(c)|_{\lambda=4} \\ &= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)|_{\lambda=4} + 3\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2|_{\lambda=4} \\ &= 24 + 3\times 12\times 2^2 = 7\times 24 = 168. \end{aligned}$$

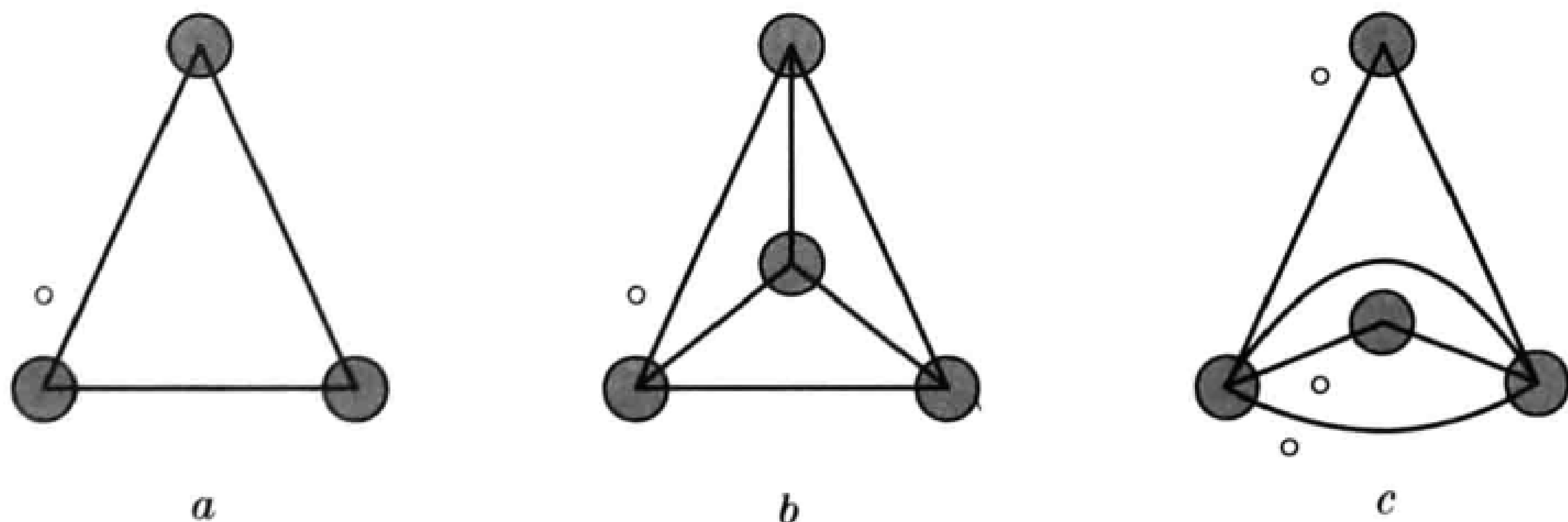


图 6.6.1 球面三角化根同构类上 4–色和

6.7 注　记

1. 在 6.1 节中所有提到的常微分函数方程, 都可以通过直接积分求解. 但多需要做十分繁杂的简化. 如何通过参数表示导出阶数最低的常微分函数方程, 尚需作进一步的研究. 例如, 在 [99] 中, 所得到的关于平面 3–连通根地图 (c–网) 的结果只能导致一个二阶常微分方程. 然而, 在 [16] 中, 却得到了一个一阶常微分方程.

2. 在文献 [57](定理 8.5.2, 271 页) 中, 通过依边数计数不可定向根瓣丛的同构类, 给出了一阶常微分方程

$$\begin{cases} 4x^2\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = (1-x)g - x(1+h), \\ g|_{x=0} = 0, \end{cases} \tag{6.7.1}$$

其中 h 是依边数不可定向根瓣丛的计数函数, 由方程式 (6.2.1) 确定. 不过要注意, h 为方程式 (6.2.1) 的解在常数项中减 1. 可以证明, 方程式 (6.6.1) 的解 g 就是由式 (6.2.17) 确定的.

3. 考虑由式 (6.3.10) 确定的有限正项和 F_n 的一个直接显式.

4. 在由式 (6.3.10) 确定的 F_n 的直接显式基础上, 求由式 (6.4.9) 确定的 F_n 的直接显式.

5. 在式 (6.3.10) 和式 (6.4.9) 的基础上, 求由式 (6.5.7) 确定的 F_n 的一个有限正项的直接显式.

6. 在式 (6.6.1) 中的方程, 首见于[103]. 不过, 时至今日仍没有见到其解的一个表达式, 特别是直接显式还没有问世.

第 7 章　偏微分方程

7.1　球面四角化

先讨论这样的一个函数方程 (后面会用到)

$$\begin{cases} x^4yf^2+(y-x^2)f-x^2yf^*+x^2-y=0, \\ f|_{x=y=0}=1, \end{cases} \tag{7.1.1}$$

其中 $f^*=\partial_x^2 f$.

此方程可从文献[49] 中提供的分解论的对偶导出. 或更简洁地, 参见[57](§5.4). 不过要注意与 y 有关的参数之间的差异.

令 $F_n=[f]_n=\partial_y^n f$ $(n\geqslant 0)$, 则对于整数 $n\geqslant 0$, 有

$$F_n^*=[f^*]_n=[\partial_x^2 f]_n=\partial_x^2[f]_n=\partial_x^2 F_n. \tag{7.1.2}$$

为了方便确定 F_n $(n\geqslant 0)$, 先将方程 (7.1.1) 的第一式变换成合适的等价形式, 如

$$\begin{aligned} x^2f&=x^4yf^2+yf-x^2yf^*+x^2-y \\ &=x^4yf^2+y(f-x^2f^*-1)+x^2. \end{aligned} \tag{7.1.3}$$

因为对于任何整数 $n\geqslant 0$,

$$[f^2]_n=\sum_{i=0}^{n}F_iF_{n-i}, \tag{7.1.4}$$

$$[f-x^2f^*-1]_n=\begin{cases} F_0-x^2F_0^*-1, & n=0, \\ F_n-x^4F_n^*, & n\geqslant 1, \end{cases} \tag{7.1.5}$$

故由式 (7.1.3), 有

$$\begin{aligned}
y^0 : x^2[f]_0 &= [x^2]_0 \\
&\Rightarrow \quad x^2F_0 = x^2 \quad \Rightarrow \quad F_0 = 1,\ F_0^* = 0, \qquad (7.1.6)\\
y^1 : x^2[f]_1 &= x^4[f^2]_0 + [f - x^2f^* - 1]_0 \\
&= x^4F_0F_0 + (F_0 - x^2F_0^* - 1) = x^4 \\
&\Rightarrow \quad x^2F_1 = x^4 \quad \Rightarrow \quad F_1 = x^2,\ F_1^* = 1, \qquad (7.1.7)\\
y^2 : x^2[f]_2 &= x^4[f^2]_1 + [f - x^2f^* - 1]_1 \\
&= x^4(2F_0F_1) + (F_1 - x^2F_1^*) = 2x^6 \\
&\Rightarrow \quad x^2F_2 = 2x^6 \quad \Rightarrow \quad F_2 = 2x^4,\ F_2^* = 0, \qquad (7.1.8)\\
y^3 : x^2[f]_3 &= x^4[f^2]_2 + [f - x^2f^* - 1]_2 \\
&= x^4(F_1^2 + 2F_0F_2) + (F_2 - x^2F_2^*) \\
&= x^4(x^4 + 4x^4) + 2x^4 \\
&\Rightarrow \quad x^2F_2 = 5x^8 + 3x^4 \\
&\Rightarrow \quad F_3 = 5x^6 + 2x^2,\ F_3^* = 2, \qquad (7.1.9)\\
y^4 : x^2[f]_4 &= x^4[f^2]_3 + [f - x^2f^* - 1]_3 \\
&= x^4(2F_1F_2 + 2F_0F_3) + (F_3 - x^2F_3^*) \\
&= x^4(14x^6 + 4x^2) + 5x^6 \\
&\Rightarrow \quad x^2F_2 = 14x^{10} + 9x^6 \\
&\Rightarrow \quad F_3 = 14x^8 + 9x^4,\ F_4^* = 0. \qquad (7.1.10)
\end{aligned}$$

事实上, 对任何整数 $n \geqslant 2$, 都有

$$\begin{aligned}
x^2F_n &= x^4[f^2]_{n-1} + [f - x^2f^*]_{n-1} \\
&= x^4\sum_{i=0}^{n-1} F_iF_{n-1-i} + F_{n-1} - x^2F_{n-1}^*. \qquad (7.1.11)
\end{aligned}$$

引理 7.1.1 对于任何整数 $n \geqslant 1$, F_n 都有因子 x^2.

证明 因为 f 是 x 的偶函数, 所有 F_n 不含 x 和 x^3 项. 首先, 由式 (7.1.7) 和式 (7.1.8) 知, F_1 和 F_2 都有因子 x^2. 然后, 假若对于任何 $2 \leqslant i \leqslant n-1$, F_i 都有因子 x^2, 则由式 (7.1.11) 知, F_n 也有因子 x^2(注意: $x^4\big|(F_{n-1} - x^2F_{n-1}^*)$). 由整数 $n \geqslant 2$ 的任意性, 按照数学归纳法原理, 即得欲证的结论. □

这个引理启示我们, 由式 (7.1.11), 对于任何整数 $n \geqslant 2$, 都有

$$x^2 \mid (x^4[f^2]_{n-1} + [f - x^2 f^*]_{n-1}), \tag{7.1.12}$$

并且对于任何 $n \geqslant 0$, $F_n \in \mathcal{R}_+\{x\}$.

引理 7.1.2 对任何整数 $n \geqslant 1$, F_n 是一个 x 的至多 $2n$ 次多项式.

证明 由式 (7.1.6) 和式 (7.1.7) 可知, F_0 和 F_1 满足引理. 假若对于 $1 \leqslant i \leqslant n-1$, F_i 都是 x 的至多 $2i$ 次多项式, 则由引理 7.1.1, 可知 $[f - x^2 f^*]_{n-1}$ 的次 $d([f - x^2 f^*]_{n-1}) \leqslant 2(n-1) - 2 = 2n-4$. 因为 $x^4[f^2]_{n-1}$ 的次 $d(x^4[f^2]_{n-1}) \leqslant 4 + 2(n-1) = 2n+2$, 故由式 (7.1.11), 有 $d(F_n) \leqslant d(x^4[f^2]_{n-1}) - 2 \leqslant (2n+2) - 2 = 2n$. 从而, 基于数学归纳法原理, 引理得证. □

引理 7.1.3 对任何整数 $n \geqslant 1$, F_n 没有 x 的奇次幂项.

证明 从引理 7.1.2 的证明过程中, 可以看出随着 n 从 1 起, 每增加 1, 多项式 F_n 的次都增加 2 且 F_1 没有奇次幂项. 从而, 归纳过程使得在 F_n 中不可能出现奇次幂项. □

由上面三个引理及其证明过程, 我们将 F_n 表示为如下形式:

$$F_n = \sum_{\substack{m=2 \\ 2 \mid m}}^{2n} F_{m,n} x^m = \sum_{m=1}^{n} F_{2m,n} x^{2m} \quad (n \geqslant 1). \tag{7.1.13}$$

其中 $F_{2m,n} \in \mathcal{R}_+$. 从而, 根据

$$[f - x^2 f^*]_n = \sum_{m=2}^{n} F_{2m,n} x^{2m}, \tag{7.1.14}$$

由式 (7.1.11), 就有 $F_n \in \mathcal{R}_+\{x\}$.

定理 7.1.1 方程式 (7.1.1) 在 $\mathcal{R}\{x,y\}$ 中有且仅有一个解.

证明 首先, 由式 (7.1.3) 与方程式 (7.1.1) 中第一式的等价性, 知 $F_0 = 1$ 就是方程式 (7.1.1) 的始条件. 基于上面的引理, 由式 (7.1.6)、式 (7.1.7) 和式 (7.1.11) 确定的 $f: F_n$ $(n \geqslant 0)$, 提供方程式 (7.1.1) 在 $\mathcal{R}\{x,y\}$ 中的一个解.

然后, 考虑到这个解在 $\mathcal{R}\{x,y\}$ 中, 对于方程式 (7.1.1) 始条件的唯一性, 得知它还是方程式 (7.1.1) 仅有的解. □

下面讨论 F_n $(n \geqslant 2)$ 的一个正项和表达式.

记 $F_n^{[2]} = [f^2]_n$ $(n \geqslant 0)$. 由式 (7.1.6) 和式 (7.1.7), 对于 $n \geqslant 2$, 有

$$F_n^{[2]} = \sum_{i=0}^{n} F_i F_{n-i} = 2F_n + 2x^2 F_{n-1} + \sum_{i=2}^{n-2} F_i F_{n-i}. \tag{7.1.15}$$

用 Σ_n 表示这个从 2 到 $n-2$ 的求和式, 则由式 (7.1.13), 对于 $n \geqslant 5$, 有

$$\Sigma_n = \sum_{i=2}^{n-2} \sum_{t=2}^{n-i+1} \left(\sum_{l=1}^{t} F_{2l,i} F_{2(t-l),n-i} \right) x^{2t} = \sum_{t=2}^{n-1} \Phi_{2t,n} x^{2t}, \tag{7.1.16}$$

其中

$$\Phi_{2t,n} = \sum_{l=1}^{t} \left(\sum_{i=2}^{\min\{n-2,n-t+1\}} F_{2l,i} F_{2(t-l),n-i} \right). \tag{7.1.17}$$

在此基础上, 由式 (7.1.11), 对于 $n \geqslant 5$, 有

$$F_n = x^2 \Big(2(F_{n-1} + x^2 F_{n-2}) + \Sigma_{n-1} \Big) + \frac{F_{n-1} - x^2 F_{n-1}^*}{x^2}. \tag{7.1.18}$$

同时, 由式 (7.1.14), 有

$$\frac{F_{n-1} - x^2 F_{n-1}^*}{x^2} = \frac{1}{x^2} \sum_{l=2}^{n-1} F_{2l,n-1} x^{2l} = \sum_{l=1}^{n-2} F_{2(l+1),n-1} x^{2l}; \tag{7.1.19}$$

由式 (7.1.13), 有

$$\begin{aligned} 2x^2(F_{n-1} + x^2 F_{n-2}) &= 2\left(F_{2,n-1} x^4 + \sum_{l=3}^{n} (F_{2(l-1),n-1} + F_{2(l-2),n-2}) x^{2l} \right) \\ &= 2F_{2,n-1} x^4 + \sum_{l=3}^{n} 2(F_{2(l-1),n-1} + F_{2(l-2),n-2}) x^{2l}; \end{aligned} \tag{7.1.20}$$

由式 (7.1.16), 有

$$x^2 \Sigma_{n-1} = x^2 \sum_{t=2}^{n-2} \Phi_{2t,n-1} x^{2t} = \sum_{t=3}^{n-1} \Phi_{2(t-1),n-1} x^{2t}. \tag{7.1.21}$$

定理 7.1.2 令方程式 (7.1.1) 的解为 $f = f_{\text{0-quad}}$, 由 $Q_n = \partial_y^n f_{\text{0-quad}} \in \mathcal{R}_+\{x\}$

$(n\geqslant 0)$ 确定, 则

$$Q_n=\begin{cases}1, & n=0,\\ x^2, & n=1,\\ 2x^4, & n=2,\\ 5x^6+2x^2, & n=3,\\ 14x^8+9x^4, & n=4,\\ \sum\limits_{m=1}^{n}Q_{2m,n}x^{2m}, & n\geqslant 5,\end{cases}\tag{7.1.22}$$

其中

$$Q_{2m,n}=\begin{cases}Q_{4,n-1}, & m=1,\\ Q_{6,n-1}+2F_{2,n-1}, & m=2,\\ 2(Q_{2(m-1),n-1}+Q_{2(m-2),n-2})+Q_{2(m+1),n-1} & \\ +\Phi_{2(m-1),n-1}, & 3\leqslant m\leqslant n-2,\\ 2(Q_{2(n-2),n-1}+Q_{2(n-3),n-2})+\Phi_{2(n-1),n-1}, & m=n-1,\\ 2(Q_{2(n-1),n-1}+Q_{2(n-2),n-2}), & m=n,\end{cases}\tag{7.1.23}$$

$\Phi_{2t,n}$ 由式 (7.1.17) 确定.

证明 将式 (7.1.19) ~ 式 (7.1.21) 代入到式 (7.1.18) 中, 即可得定理. □

引理 7.1.4 对于任何整数 $n\geqslant 0$, 都有

$$\begin{cases}Q_{2,n}=0, & n\equiv 0(\text{mod } 2),\\ Q_{4,n}=0, & n\equiv 1(\text{mod } 2).\end{cases}$$

证明 对 $n\leqslant 4$, 从式 (7.1.22) 可以看出引理的结论成立. 对 $n\geqslant 5$, 假设对任何整数 $i\leqslant n-1$, 引理的结论成立. 当 n 是偶数时, 因为 $n-1$ 是奇数, 由假设条件, 知 $Q_{4,n-1}=0$. 由式 (7.1.22), 知 $Q_{2,n}=Q_{4,n-1}=0$. 当 n 是奇数时, 因为 $n-1$ 是偶数, 由假设条件, 知 $Q_{4,n-1}=0$. 从而, 根据归纳法原理, 引理得证. □

引理 7.1.5 对于任何整数 $n\geqslant 1$, 都有 $Q_{2(n-1),n}=0$.

证明 当 $1 \leqslant n \leqslant 5$ 时, 从式 (7.1.19) 可以看出引理的结论成立. 当 $n \geqslant 6$ 时, 假设对于 $i \leqslant n-1$, 都有 $F_{2(i-1),i}=0$. 由式 (7.1.23), 知

$$Q_{2(n-1),n}=2(Q_{2(n-2),n-1}+Q_{2(n-3),n-2})+\Phi_{2(n-1),n-1}.$$

由假设条件, 知 $Q_{2(n-2),n-1}=0$, $Q_{2(n-3),n-2}=0$. 由式 (7.1.17), 当 $t=n-1$ 时,

$$\begin{aligned}\Phi_{2(n-1),n-1}&=\sum_{l=1}^{n-1}\left(\sum_{i=2}^{\min\{n-3,2\}}Q_{2l,i}Q_{2(n-2),n-i-1}\right)\\&=\sum_{l=1}^{n-1}\left(Q_{2l,2}Q_{2(n-2),n-3}\right)\quad(\text{由 } Q_{2(n-2),n-3}=0),\\&=0.\end{aligned}$$

从而, 由归纳法原理, 引理得证. □

推论 7.1.1 对于整数 $n \geqslant 5$, 由式 (7.1.22) 和式 (7.1.23) 所确定的序列 $\{Q_n|\ n \geqslant 1\}$ 满足组合恒等式：

$$Q_{2(n-2),n-1}+Q_{2(n-3),n-2}+\sum_{l=1}^{n-1}\left(\sum_{i=2}^{\min\{n-3,2\}}Q_{2l,i}Q_{2(n-2),n-i-1}\right)=0. \quad (7.1.24)$$

证明 由定理 7.1.2 和引理 7.1.5 即得欲证的结论. □

例 7.1.1 平面根近四角化的同构分类. 在图 7.1.1 中, 给出了球面上近四角化的以边数和根面次为参数的根同构类. 边数为 0, 1 和 2 的情形与树无异, 分别如图 3.1.3 中的 $L_{0,1}$, $L_{1,1}$ 和 $L_{2,1}$ 所示. 由 $L_{3,1}$ 和 $L_{3,2}$ 也可以看出边数为 3、根面次为 6 的平面根近四角化有 $3L_{3,1}+2L_{3,2}$, 计 5 个同构类. 由 $4L_{4,1}+8L_{4,3}+2L_{4,3}$ 可以看出边数为 4、根面次为 8 的平面根近四角化有 14 个同构类. 它们对 Q_3 和 Q_4 的贡献分别为 $5x^6$ 和 $14x^8$.

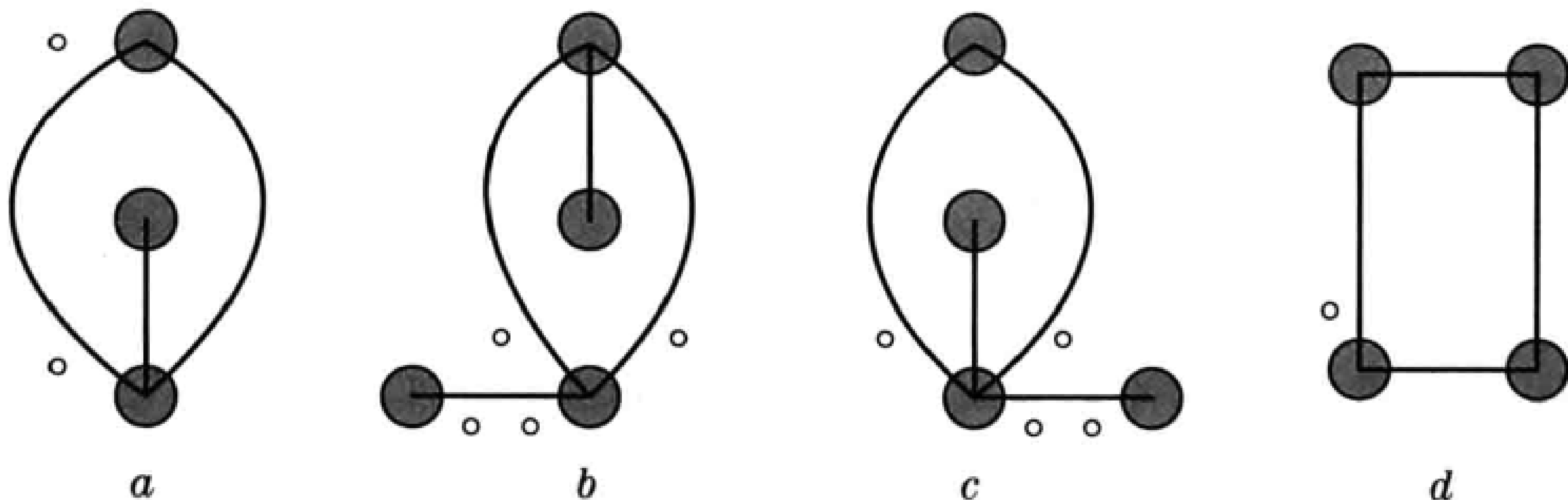


图 7.1.1 边数为 3～4 球面根近四角化的同构类

从图 7.1.1 中的 a 知, 边数为 3、根面次为 2 的平面根近四角化有 $2a$, 计 2 个同构类, 对 Q_3 的贡献为 $2x^2$. 从 b, c 和 d 知, 边数为 4、根面次为 4 的平面根近四角化有 $4b+4c+2d$, 计 9 个同构类, 对 Q_4 的贡献为 $9x^4$.

综合上面的两个部分, 就有 $Q_3=5x^6+2x^2$, $Q_4=14x^8+9x^4$. 从中还可以看出引理 7.1.4 和引理 7.1.5 的效力.

例 7.1.2 在 [57](§5.4) 中, 给出的方程是

$$\begin{cases} x^4yf^2+(1-x^2)f+x^2-x^2f^*-1=0, \\ f|_{x=y=0}=1, \end{cases} \tag{7.1.25}$$

其中 $f^*=\partial_x^2 f$.

对这个方程要注意, 在论证适定性时, $[f]_n=\partial_y^n f$ $(n\geqslant 0)$ 不是 x 的多项式, 而是一个无穷级数, 给确定 f 带来了一些麻烦. 不过可以通过限制 y 的幂由小到大一步一步地进行.

例 7.1.3 在[7] 中, 还给出了三变元函数的方程

$$\begin{cases} x^4zf^2+(y-x^2)f+x^2-x^2yf^*-y=0, \\ f|_{x=y=z=0}=1, \end{cases} \tag{7.1.26}$$

其中 $f^*=\partial_x^2 f$.

对这个方程要注意, 在论证适定性时, 用 $[f]_{s,t}=\partial_{y,z}^{s,t} f$ $(s,t\geqslant 0)$ 确定 f 就可以了.

例 7.1.4 在球面上的欠 –1 面近四角化. 考虑方程

$$\begin{cases} (x^2-2x^4yq-y)f=\dfrac{x^3zy}{z-x}(zq|_{x=z}-xq)+yf_{i_x\geqslant 3}, \\ f|_{x=z=y=0}=0, \end{cases} \tag{7.1.27}$$

其中 $q=q(x,y)$ 是方程式 (7.1.1) 的解, $f_{i_x\geqslant 3}$ 是将函数 f 删去 x 的低于 3 次幂的项后所剩余的部分.

因为下面要利用式 (7.1.27), 还是仔细地论证这个方程的适定性, 以及其求解的过程. 先将方程式 (7.1.27) 变换成一种利于演算的等价形式:

$$f=2x^2yf_{\text{0-nq}}f+\frac{xzy}{z-x}(zf_{\text{0-nq}}|_{x=z}-xf_{\text{0-nq}})+x^{-2}yf_{i_x\geqslant 3}, \tag{7.1.28}$$

其中 $f_{\text{0-nq}}$ $([f_{\text{0-nq}}]_n=\partial_y^n f_{\text{0-nq}}=Q_n,\ n\geqslant 0)$ 为方程式 (7.1.1) 的解, 已经由式 (7.1.22) 和式 (7.1.23) 给出.

由式 (7.1.28), 对于 $F_n=[f]_n$ ($n\geqslant 0$), 可得

$$y^0:[f]_0=0 \quad (\text{因为右端有因子 } y)$$

$$\Rightarrow \quad F_0=0,\ [f_{\text{0-nq}}f]_0=0,\ [f_{i_x\geqslant 3}]_0=0, \tag{7.1.29}$$

$$y^1:[f]_1=\frac{xz}{z-x}[zf_{\text{0-nq}}|_{x=z}-xf_{\text{0-nq}}]_0$$
$$=\frac{xz}{z-x}(z[f_{\text{0-nq}}]_0|_{x=z}-x[f_{\text{0-nq}}]_0)$$
$$=\frac{xz}{z-x}(zQ_0|_{x=z}-xQ_0)$$

$$\Rightarrow \quad F_1=xz,\ [f_{\text{0-nq}}f]_1=xz,\ [f_{i_x\geqslant 3}]_1=0, \tag{7.1.30}$$

$$y^2:[f]_2=2x^2[f_{\text{0-nq}}f]_1+\frac{xz}{z-x}[zf_{\text{0-nq}}|_{x=z}-xf_{\text{0-nq}}]_1$$
$$=2x^2(xz)+\frac{xz}{z-x}(zQ_1|_{x=z}-xQ_1),$$
$$=2x^3z+xz(z^2+xz+x^2)$$
$$\Rightarrow \quad F_2=3x^3z+x^2z^2+xz^3,$$

$$[f_{\text{0-nq}}f]_2=4x^3z+x^2z^2+xz^3,\ [f_{i_x\geqslant 3}]_2=0, \tag{7.1.31}$$

$$y^3:[f]_3=2x^2[f_{\text{0-nq}}f]_2+\frac{xz}{z-x}[zf_{\text{0-nq}}|_{x=z}-xf_{\text{0-nq}}]_2$$
$$=2x^2(4x^3z+x^2z^2+xz^3)+\frac{xz}{z-x}(zQ_2|_{x=z}-xQ_2)$$

$$\Rightarrow \quad F_3=9x^5z+4x^4z^2+4x^3z^3+2x^2z^4+2xz^5, \tag{7.1.32}$$

以及对于任何 $n\geqslant 4$,

$$y^n:[f]_n=2x^2[f_{\text{0-nq}}f]_{n-1}+\frac{xz}{z-x}[zf_{\text{0-nq}}|_{x=z}-xf_{\text{0-nq}}]_{n-1}+x^{-2}[f_{i_x\geqslant 3}]_{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad F_n=x^2\sum_{i=0}^{n-1}Q_iF_{n-1-i}+\sum_{j=1}^{2(n-1)}x^j\Big(\sum_{m\langle 1,j-1\rangle}^{2n-3}Q_{m,n-1}z^{m-j+1}\Big)$$
$$+\sum_{m=2}^{2n-5}x^m\partial_x^{m+2}F_{n-1}. \tag{7.1.33}$$

引理 7.1.6 对于任何 $n\geqslant 1$, F_n 在 $\mathcal{R}_+\{x,z\}$ 中, 无论关于 x 或 y 都是一个最小次不低于 1 的至多 $2n-1$ 次多项式.

证明 参见引理 7.1.1~引理 7.1.3. □

基于这个引理, 对于任何 $n\geqslant 1$, 存在 $F_{s,t}^{(n)}\in\mathcal{R}_+$, 使得

$$F_n=\sum_{1\leqslant s,t\leqslant 2n-1}F_{s,t}^{(n)}x^sz^t=\sum_{t=1}^{2n-1}F_{s,n}x^s=\sum_{t=1}^{2n-1}F_{n,t}z^t. \tag{7.1.34}$$

定理 7.1.3 令 $f_{\text{mis-1}}$ 为方程式 (7.1.27) 的解, 则对于任何 $n \geqslant 0$, $[f_{\text{mis-1}}]_n = F_n$, 使得

$$F_n = x^2 \sum_{i=0}^{n-1} Q_i F_{n-1-i} + \sum_{j=1}^{2(n-1)} A_{j,n-1} x^j + \sum_{m=2}^{2n-5} x^m F_{m+2,n-1}, \tag{7.1.35}$$

其中

$$A_{j,n-1} = \sum_{m=\langle 1,j-1 \rangle}^{2n-3} Q_{m,n-1} z^{m-j+1} \quad (1 \leqslant j \leqslant 2(n-1)). \tag{7.1.36}$$

证明 在式 (7.1.34) 的基础上, 参见定理 7.1.1 和定理 7.1.2. □

在图 7.1.2 中, a 给出球面上一条边欠 –1 面近四角化的根同构类 xz, 即由式 (7.1.30) 得到 $F_1 = xz$; b 与 c 给出球面上两条边欠 –1 面近四角化的根同构类 $3x^3z + xz^3(b) + x^2z^2(c) = 3x^3z + x^2z^2 + xz^3 = F_2$, 如式 (7.1.31) 所示.

同样, 在图 7.1.3 中, 给出球面上三条边欠 –1 面近四角化的根同构类

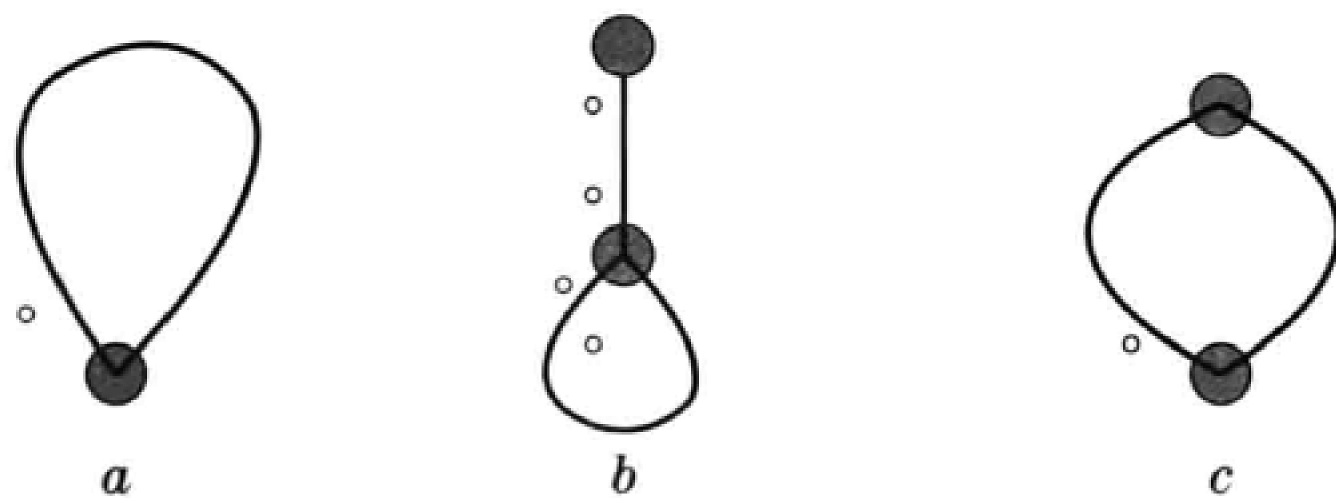


图 7.1.2 边数为 1 ~ 2、球面欠 –1 面近四角化的根同构类

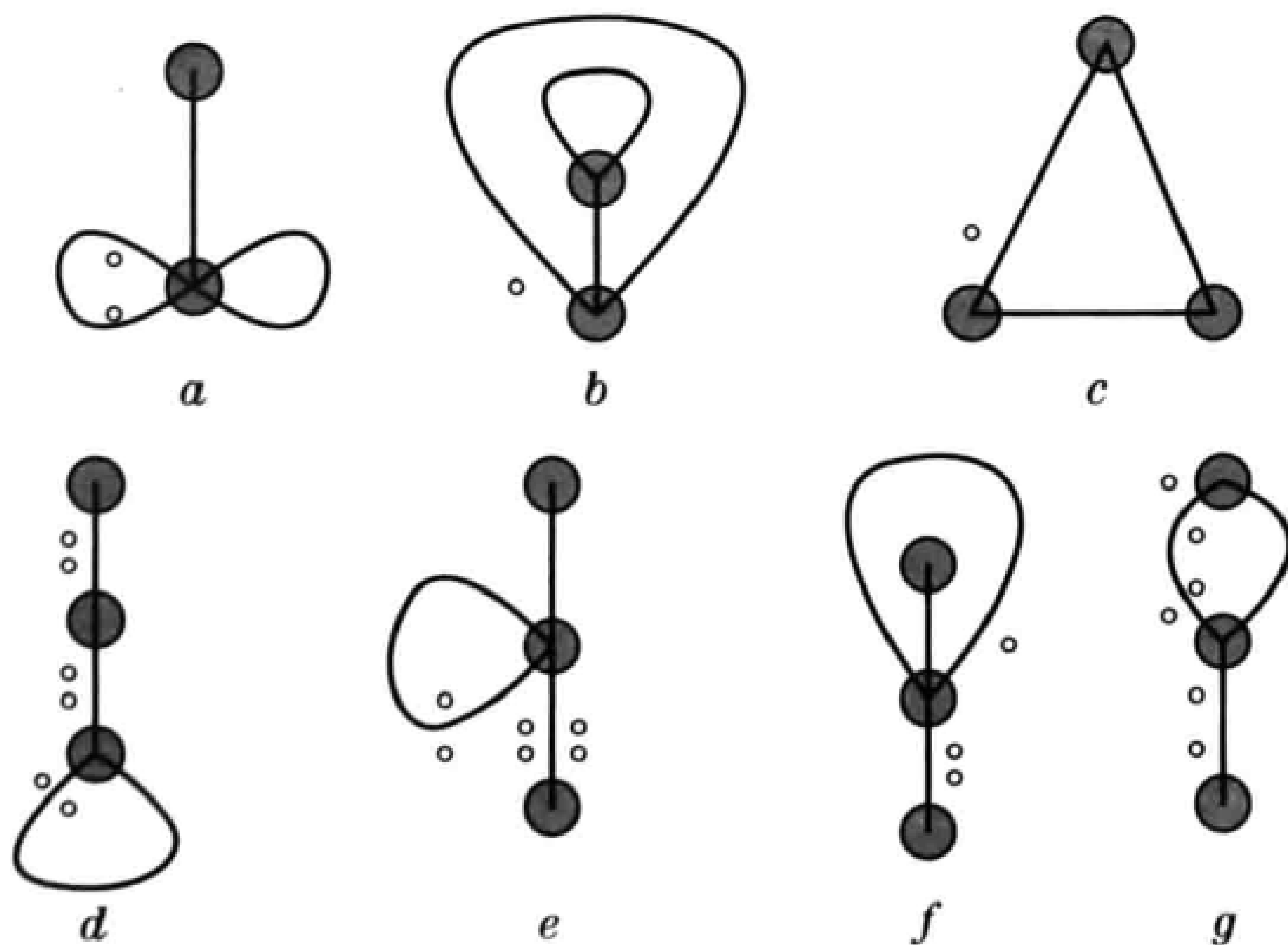


图 7.1.3 边数为 3、球面欠 –1 面近四角化的根同构类

$$
\begin{aligned}
&2xz(a)+xz(b)+x^3z^3(c)+5x^5z+xz^5(d)+5x^5z+xz^5(e)\\
&+3x^3z^3(f)+4x^4z^2+2x^2z^4(g)\\
&\quad=10x^5z+4x^4z^2+4x^3z^3+2x^2z^4+2xz^5+3xz=F_3
\end{aligned}
$$

如式 (7.1.32) 所示.

7.2 射影面四角化

在[7](§4.5) 中, 给出了方程组

$$
\begin{cases}
g=\dfrac{x^4y\left(f+x\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)-yx^2g^*}{x^2-y-2x^4yf},\\
f=\dfrac{x^4yf^2-x^2yf^*+x^2-y}{x^2-y},\\
f|_{x=y=0}=1,\quad g|_{x=y=0}=0,
\end{cases}
\tag{7.2.1}
$$

其中 $f^*=\partial_x^2 f$, $g^*=\partial_x^2 g$.

在这个方程中, 虽然有关于 f 的微分函数, 但因为它的第二个方程可以独立地求解, 并且这个解已经在 7.1节中给出, 故这个微分函数可以视为已知.

事实上, $f=f_{0\text{-quad}}$ 由式 (7.1.22) 中的 $Q_n=\partial_y^n f_{0\text{-quad}}$ $(n\geqslant 0)$ 确定.

由此, 对于整数 $n\geqslant 0$, 有

$$
\left[x\frac{\partial f}{\partial x}\right]_n=x\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_n=x\frac{\partial Q_n}{\partial x}=\sum_{m=1}^{2n}2mQ_{2m,n}x^{2m}.
\tag{7.2.2}
$$

这样, 方程组式 (7.2.2) 就可等价地转变为

$$
\begin{cases}
g=\dfrac{x^4y\left(f+x\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)-yx^2g^*}{x^2-y-2x^4yf},\\
g|_{x=y=0}=0,
\end{cases}
\tag{7.2.3}
$$

其中 $f=f_{0\text{-quad}}$ 已经在 7.1 节中给出, $g^*=\partial_x^2 g$.

为方便利用, 将方程组 (7.2.3) 的第一式转换为如下形式:

$$
x^2g=x^4y\left(f+x\frac{\partial f}{\partial x}\right)-x^2yg^*+yg+2x^4yfg
$$

$$=x^4y\left(f-1+x\frac{\partial f}{\partial x}\right)+y(g-x^2g^*)+2x^4yfg, \tag{7.2.4}$$

因为 $[f]_0=Q_0=1$, $\dfrac{\mathrm{d}Q_0}{\mathrm{d}x}=0$, 故对于 $n\geqslant 0$, 有

$$\left[f+x\frac{\partial f}{\partial x}\right]_0=[f]_0+x\frac{\mathrm{d}[f]_0}{\mathrm{d}x}=Q_0+x\frac{\mathrm{d}Q_0}{\mathrm{d}x}=1.$$

从而

$$\left[f+x\frac{\partial f}{\partial x}\right]_n=\begin{cases}1, & n=0,\\ Q_n+x\dfrac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}x}, & n\geqslant 1.\end{cases} \tag{7.2.5}$$

令 $G_n=[g]_n=\partial_y^n g$, 则由 $[g]_0=0$, 得 $[g^*]_0=0$. 从而, 有

$$[g-x^2g^*]_n=\begin{cases}0, & n=0,\\ [g]_n-x^2[g^*]_n, & n\geqslant 1,\end{cases} \tag{7.2.6}$$

$$[fg]_n=\sum_{i=0}^{n}Q_iG_{n-i}\quad (n\geqslant 0). \tag{7.2.7}$$

在式 (7.2.4) ~ 式 (7.2.7) 的基础上, 可得

$$y^0:\ x^2[g]_0=x^4\left[y\left(f+x\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]_0+[y(g-x^2g^*)]_0+2x^4[yfg]_0=0$$

$$\Rightarrow\quad G_0=0,\ G_0^*=0, \tag{7.2.8}$$

$$\begin{aligned}y^1:\ x^2[g]_1&=x^4\left[f+x\frac{\partial f}{\partial x}\right]_0+[g-x^2g^*]_0+2x^4[fg]_0\\&=x^4\left(Q_0+x\frac{\mathrm{d}Q_0}{\mathrm{d}x}\right)+(G_0-x^2G_0^*)+2x^4Q_0G_0\\&=x^4\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad G_1=x^2,\ G_1^*=1, \tag{7.2.9}$$

$$\begin{aligned}y^2:\ x^2[g]_2&=x^4\left[f+x\frac{\partial f}{\partial x}\right]_1+[g-x^2g^*]_0+2x^4[fg]_1\\&=x^4\left(Q_1+x\frac{\mathrm{d}Q_1}{\mathrm{d}x}\right)+(G_1-x^2G_1^*)+2x^4(Q_0G_1+Q_1G_0)\\&=x^4(x^2+2x^2)+2x^6\\&=5x^6\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad G_2=5x^4,\ G_2^*=0, \tag{7.2.10}$$

$$y^3:\ x^2[g]_3=x^4\left[f+x\frac{\partial f}{\partial x}\right]_2+[g-x^2g^*]_2+2x^4[fg]_2$$

$$
\begin{aligned}
&= x^4\left(Q_2 + x\frac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}x}\right) + (G_2 - x^2G_2^*) + 2x^4(Q_0G_2 + Q_1G_1 + Q_2G_0)\\
&= x^4(2x^4 + 8x^4) + 5x^4 + 2x^4(5x^4 + x^4)\\
&= 5x^4 + 22x^8
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad G_3 = 5x^2 + 22x^6,\ G_3^* = 5. \tag{7.2.11}$$

事实上, 对于任何整数 $n \geqslant 1$, 都有

$$x^2G_n = x^4\left(Q_{n-1} + x\frac{\mathrm{d}Q_{n-1}}{\mathrm{d}x}\right) + (G_{n-1} - x^2G_{n-1}^*) + 2x^4\sum_{i-0}^{n-1} Q_iG_{n-1-i}. \tag{7.2.12}$$

引理 7.2.1 对任何整数 $n \geqslant 1$, G_n 没有 x 的奇次幂项.

证明 由式 (7.2.9) ~ 式 (7.2.11), 可见 G_1, G_2 和 G_3 都没有奇次幂项. 进而, 对于整数 $n \geqslant 3$, 假设 G_i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ 都没有奇次幂项. 因为两个无奇次幂项函数的乘积不会有奇次幂项且 $x\dfrac{\mathrm{d}Q_{n-1}}{\mathrm{d}x}$ 也没有奇次幂项, 由归纳假设和式 (7.2.12), 可知 G_n 没有 x 的奇次幂项. □

引理 7.2.2 对任何整数 $n \geqslant 1$, x 在 G_n 中的最小次不低于 2.

证明 由式 (7.2.9) ~ 式 (7.2.11), 可见在 G_1, G_2 和 G_3 中, x 的最小次都不低于 2. 进而, 对于整数 $n \geqslant 3$ 假设在 G_i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ 中都没有 x 的低于 2 的项. 因为 $G_{n-1}^* = \partial_x^2 G_{n-1}$, 由引理 7.2.1, 知 $x^4 \big| (G_{n-1} - x^2G_{n-1}^*)$. 由归纳假设和式 (7.2.12), x 在 G_n 中的最小次不低于 2. □

引理 7.2.3 对于任何整数 $n \geqslant 1$, G_n 都有因子 x^2.

证明 由式 (7.2.9) ~ 式 (7.2.11), 可见 G_1, G_2 和 G_3 都有因子 x^2. 进而, 对于整数 $n \geqslant 3$, 假设 G_i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ 都有因子 x^2, 则因为 $G_{n-1}^* = \partial_x^2 G_{n-1}$, 故由引理 7.2.1, 知 $x^4 \big| (G_{n-1} - x^2G_{n-1}^*)$. 由归纳假设和式 (7.2.12), 即得 $x^2 \big| G_n$. □

引理 7.2.4 对任何整数 $n \geqslant 1$, G_n 是一个 x 的至多 $2n$ 次多项式.

证明 由式 (7.2.9) ~ 式 (7.2.11), 可见 G_1, G_2 和 G_3 都满足引理的结论. 下面, 假设对于整数 $n \geqslant 3$, G_i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ 都满足引理的结论, 往证 G_n 也满足引理的结论.

对于 x 的任意一个多项式 p, 记 $d(p)$ 为 p 的次. 由式 (7.2.12), 有

$d(G_n)$

$$
\begin{aligned}
&= \max\left\{d\Big(Q_{n-1}+x\frac{\mathrm{d}Q_{n-1}}{\mathrm{d}x}\Big)+2, d(G_{n-1}-x^2G_{n-1}^*)-2, d\Big(\sum_{i-0}^{n-1}Q_iG_{n-1-i}\Big)+2\right\} \\
&= \max\left\{d\Big(Q_{n-1}+x\frac{\mathrm{d}Q_{n-1}}{\mathrm{d}x}\Big)+2, d\Big(\sum_{i-0}^{n-1}Q_iG_{n-1-i}\Big)+2\right\} \\
&= d\Big(\sum_{i-0}^{n-1}Q_iG_{n-1-i}\Big)+2 = d(G_{n-1})+2 = 2(n-1)+2 = 2n.
\end{aligned}
$$

从而, 引理得证. □

定理 7.2.1　方程式 (7.2.3) 在 $\mathcal{R}\{x,y\}$ 中有且仅有一个解, 从而在 $\mathcal{R}\{x,y\}$ 中也有且仅有一个解.

证明　首先, 由式 (7.2.4) 与方程 (7.2.3) 的第一式 (从而方程 (7.2.1) 的第一式、第二式) 的等价性, 且 $G_0=0$(即式 (7.2.8)) 就是方程式 (7.2.3) 的始条件, 再基于上面的引理, 由式 (7.2.8) ~ 式 (7.2.11) 和式 (7.2.12) 所确定的 $g: G_n\ (n\geqslant 0)$, 提供方程式 (7.2.3) 在 $\mathcal{R}\{x,y\}$ 中的一个解. 然后, 考虑到这个解在 $\mathcal{R}\{x,y\}$ 中, 对于方程式 (7.2.3) 始条件的唯一性, 得知它还是方程式 (7.2.3) 仅有的解. □

引理 7.2.5　对于任何整数 $n\geqslant 1$, $G_n\in\mathcal{R}_+\{x\}$.

证明　由式 (7.2.9) ~ 式 (7.2.11), 可见 G_1, G_2 和 G_3 都属于 $\mathcal{R}_+\{x\}$. 下面假设对于整数 $n\geqslant 3$, $G_i\in\mathcal{R}_+\{x\}$ $(1\leqslant i\leqslant n-1)$, 往证 $G_n\in\mathcal{R}_+\{x\}$.

从定理 7.1.2 可以导出, 对于任何整数 $n\geqslant 0$, $Q_n\in\mathcal{R}_+\{x\}$, 从而 $x\dfrac{\mathrm{d}Q_n}{\mathrm{d}x}\in\mathcal{R}_+\{x\}$, 以及

$$
Q_{n-1}+x\frac{\mathrm{d}Q_{n-1}}{\mathrm{d}x}\in\mathcal{R}_+\{x\}.
$$

由归纳假设, $G_{n-1}-x^2G_{n-1}^*\in\mathcal{R}_+\{x\}$,

$$
\sum_{i-0}^{n-1}Q_iG_{n-1-i}\in\mathcal{R}_+\{x\}.
$$

由式 (7.2.12), 即得 $G_n\in\mathcal{R}_+\{x\}$. □

根据引理 7.2.2、引理 7.2.4 和引理 7.2.5, 对于任何整数 $n\geqslant 1$, 可记

$$
G_n=\sum_{i=1}^{n}G_{2i,n}, \tag{7.2.13}
$$

其中 $G_{2i,n}\in\mathcal{R}$.

由式 (7.1.22), 知

$$x^2\left(Q_{n-1}+\frac{\mathrm{d}Q_{n-1}}{\mathrm{d}x}\right)=x^2\left(\sum_{m=1}(2m+1)Q_{2m,n-1}x^{2m}\right)$$
$$=\sum_{m=2}^{n}(2m-1)Q_{2m-2,n-1}x^{2m}. \tag{7.2.14}$$

因为 $G_n^*=\partial_x^2 G_n=G_{2,n}$ $(n\geqslant 1)$, 所以

$$G_{n-1}-x^2G_{n-1}^*=\sum_{m=2}^{n-1}G_{2m,n-1}x^{2m}=x^2\sum_{m=1}^{n-2}G_{2m,n-1}x^{2m}. \tag{7.2.15}$$

由式 (7.1.22) 和式 (7.1.23), 得

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}Q_iG_{n-1-i}&=\sum_{\substack{l\leqslant t\leqslant(n-1-i)+l\\0\leqslant l\leqslant i\\0\leqslant i\leqslant n-1}}Q_{2l,i}G_{2(t-l),n-1-i}x^{2t}\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\Bigg(\sum_{\substack{0\leqslant l\leqslant t\\0\leqslant t\leqslant n-i-2}}+\sum_{\substack{t-(n-i-1)\leqslant l\leqslant i\\n-i-1\leqslant t\leqslant n-1}}\Bigg)Q_{2l,i}G_{2(t-l),n-1-i}x^{2t}\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{t=0}^{i}\psi_{2t,i}x^{2t}\quad(\psi_{2t,i}\text{将由式 (7.2.17) 给出})\\&=\sum_{t=0}^{n-1}\Psi_{2t,n-1}x^{2t},\end{aligned}$$

其中

$$\Psi_{2t,n-1}=\sum_{i=t}^{n-1}\psi_{2t,i}, \tag{7.2.16}$$

$$\psi_{2t,i}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=0}^{t}Q_{2l,i}G_{2(t-l),n-1-i}, & 0\leqslant t\leqslant n-i-2,\\ \displaystyle\sum_{l=t-(n-i-1)}^{i}Q_{2l,i}G_{2(t-l),n-1-i}, & n-i-1\leqslant t\leqslant n-1.\end{cases} \tag{7.2.17}$$

从而, 有

$$x^2[f_{0\text{-quad}}g]_{n-1}=\sum_{m=1}^{n}\Psi_{2(m-1),n-1}x^{2m}. \tag{7.2.18}$$

定理 7.2.2　令方程式 (7.2.1) 的解为 $g=f_{\tilde{1}\text{-quad}}$，由 $P_n=\partial_y^n f_{\tilde{1}\text{-quad}}\in\mathcal{R}_+\{x\}$ $(n\geqslant 0)$ 确定, 则

$$P_n=\begin{cases}0, & n=0,\\ x^2, & n=1,\\ 5x^4, & n=2,\\ 5x^2+22x^6, & n=3,\\ \displaystyle\sum_{m=1}^{n}P_{2m,n}x^2m, & n\geqslant 4,\end{cases}\tag{7.2.19}$$

其中

$$P_{2m,n}=\begin{cases}P_{2,n-1}+2\Psi_{0,n-1}, & m=1,\\ (2m-1)Q_{2(m-1),n-1}+P_{2m,n-1}+2\Psi_{2(m-1),n-1}, & 2\leqslant m\leqslant n-2,\\ (2n-3)Q_{2(n-2),n-1}+2\Psi_{2(n-2),n-1}, & m=n-1,\\ (2n-1)Q_{2(n-1),n-1}+2\Psi_{2(n-1),n-1}, & m=n.\end{cases}\tag{7.2.20}$$

证明　当 $n=0$, 1, 2 和 3 时, 结果分别由方程式 (7.2.1) 的始条件、式 (7.2.9)、式 (7.2.10) 和式 (7.2.11) 给出. 对于 $n\geqslant 4$, 由式 (7.2.12), 有

$$\begin{aligned}P_n&=x^2\left(Q_{n-1}+\frac{\mathrm{d}Q_{n-1}}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{P_{n-1}-x^2P_{n-1}^*}{x^2}+2x^2\sum_{i=0}^{n-1}Q_iG_{n-1-i}\\&=\sum_{m=2}^{n}(2m-1)Q_{2(m-1),n-1}x^{2m}+\sum_{m=1}^{n-2}P_{2m,n-1}x^{2m}+\sum_{m=1}^{n}2\Psi_{2(m-1),n-1}x^{2m}.\end{aligned}$$

合并同类项后, 即得定理.　□

这个定理提供了方程式 (7.2.1) 解的一个正项和表达式.

例 7.2.1　从[81] 的结果, 可以引出方程

$$\begin{cases}x^4yzf^2+(z-x^2)f+(x^2-z-x^2zf^*)=0,\\ g=2x^2yzfg+x^2z\dfrac{\partial(xf)}{\partial x}+x^{-2}z(g-x^2g^*),\\ f\big|_{x=y=z=0}=1,\quad g\big|_{x=y=z=0}=0,\end{cases}\tag{7.2.21}$$

其中 $f^*=\partial_x^2 f$, $g^*=\partial_x^2 g$.

因为 $\partial_z^n g$ $(n\geqslant 1)$ 是 x 和 y 的一个多项式, 所以这个带一个偏微分的方程组的适定性, 以及解的正项和表达式, 都可用本节的方法得到. 然而, 文章 [81] 用反

演法导出解的显式比基于本节的要简单得多. 由此可见, 本节的结果有待进一步简化.

例 7.2.2 考虑如下的方程:

$$\begin{cases} g = \dfrac{x^4y\left(f + x\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) - x^4y^2(1+g^\diamond)}{x^2 - y - 2x^4yf}, \\ f = \dfrac{x^4yf^2 - x^*yf^* + x^2 - y}{x^2 - y}, \\ f|_{x=y=0} = 1, \quad g|_{x=y=0} = 0, \end{cases} \tag{7.2.22}$$

其中 $f^* = \partial_x^2 f$, $g^\diamond = \partial_x^4 g$.

这个方程的适定性也可采用本节的结果导出.

引理 7.2.6 对于任何整数 $n \geqslant 0$, 都有

$$\begin{cases} P_{2,n} = 0, \quad n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2), \\ P_{4,n} = 0, \quad n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2). \end{cases}$$

证明 与引理 7.1.4 的证明相仿, 利用式 (7.2.12) 归纳地进行. □

引理 7.2.7 对于任何整数 $n \geqslant 1$, 都有 $P_{2(n-1),n} = 0$.

证明 与引理 7.1.5 的证明相仿, 利用式 (7.2.12) 归纳地进行. □

引理 7.2.8 对于任何整数 $n \geqslant 1$, 在式 (7.2.20) 中, 总有 $P_{4,n} = P_{2,n+1}$.

证明 在引理 7.2.6 和引理 7.2.7 的基础上, 利用式 (7.2.12) 归纳地进行, 或用式 (7.2.20) 直接计算. □

通过引理 7.2.8, 可以直接导出方程式 (7.2.22) 与方程式 (7.2.1) 等价.

例 7.2.3 射影面上近四角化的根同构分类. 方程式 (7.2.1) 的解 $g = f_{\bar{1}\text{-quad}}$ 提供了射影面上根近四角化以边数和根面次为参数的同构分类. 在图 7.2.1 中, 给出了边数从 1 到 3 的射影面上近四角化的根同构分类. 例如, $1a$ 表示射影面上边数为 1 的近四角化只有一个根同构类, 它的根面次为 2. 这就是 $P_1 = x^2$. 边数为 2 的近四角化在射影面上有 $4b + 1c$, 即 $4 + 1 = 5$ 个根同构类. 因为它们的根面次都是 4, 故有 $P_2 = (4+1)x^6 = 5x^4$. 边数为 3 的根近四角化在射影面上有 $2d + 2e + 1f$, 即 $2 + 2 + 1 = 5$ 个同构类, 它们的根面次都是 2; 有 $6g + 3h + 6i + 6j + 1k$, 即 $3 \times 6 + 3 + 1 = 22$ 个同构类. 它们的根面次都是 6. 从而, $P_3 = 5x^2 + 22x^6$.

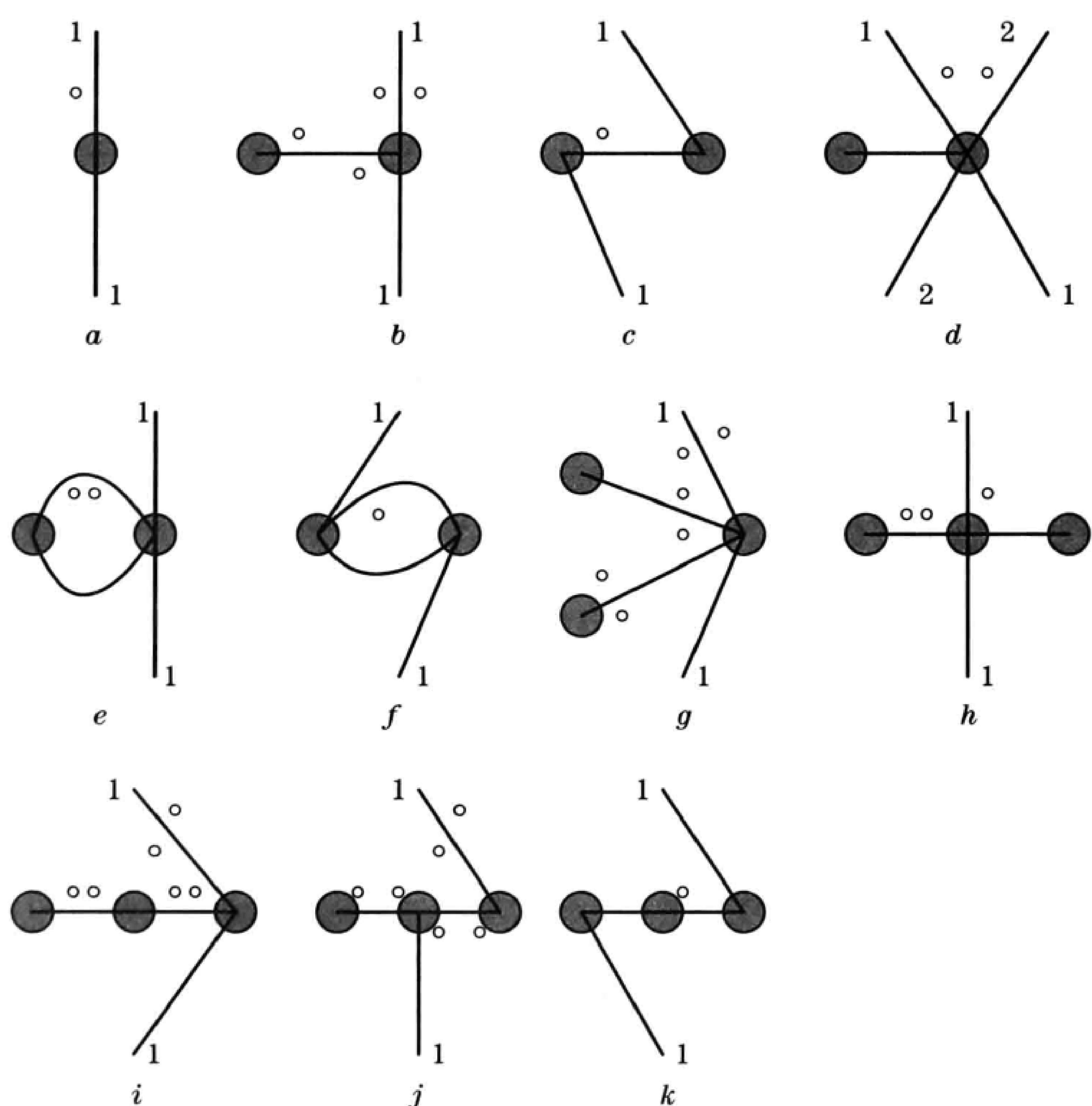


图 7.2.1 边数为 1 ~ 3 的射影面根近四角化的同构类

7.3 环面四角化

考虑关于 f, g 和 h 的带有一个偏微分的方程组:

$$\begin{cases} x^4 y\left(z\dfrac{\partial g}{\partial z}\right)\Big|_{z=x} = x^2(1-2x^2yh)f - yf_{i_x\geqslant 4}, \\ x^3zy\delta_{z,x}(uh|_{x=u}) = (x^2-2x^4yh)g - yg_{i_x\geqslant 3}, \\ x^4yh^2 + (y-x^2)h - x^2yh_{2_x} + x^2 - y = 0, \\ f|_{x=y=0} = 0, \quad g|_{x=z=y=0} = 1, \quad h|_{x=y=0} = 1, \end{cases} \tag{7.3.1}$$

其中 $f_{i_x\geqslant 4}$ 和 $g_{i_x\geqslant 3}$ 分别为从函数 f 和 g 中删去 x 的幂不超过 4 和 3 的项的剩余部分.

因为方程组 (7.3.1) 中的第二式和第三式与方程组 (7.1.27) 等价, 它们的解为 $g=f_{\text{mis-1}}$ 和 $h=f_{\text{0-quad}}$, 分别由式 (7.1.2)~ 式 (7.1.4) 和式 (7.1.35)~ 式 (7.1.36) 给出, 只需考虑方程组 (7.3.1) 中的第一式. 为方便, 还是将它转变为合适的等价形式:

$$\begin{aligned} f &= x^2y\left(z\frac{\partial g}{\partial z}\right)\Big|_{z=x}+2x^2yhf+x^{-2}yf_{i_x\geqslant 4} \\ &= x^2y\left(z\frac{\partial f_{\text{mis-1}}}{\partial z}\right)\Big|_{z=x}+2x^2yf_{\text{0-quad}}f+x^{-2}yf_{i_x\geqslant 4}. \end{aligned} \tag{7.3.2}$$

令 f 由 $[f]_n\partial_y^n f=F_n$ $(n\geqslant 0)$ 确定. 在式 (7.3.2) 的基础上, 因为 y 是右端的一个因子, 所以有

$$y^0:\ [f]_0=0 \quad\Rightarrow\quad F_0=0,\ F_0|_{i_x\geqslant 4}=0. \tag{7.3.3}$$

这就是方程组 (7.3.1) 的始条件: $f|_{x=y=0}=0$.

对于任何整数 $n\geqslant 1$, 有

$$\begin{aligned} y^n:[f]_n &= x^2\left[z\frac{\partial f_{\text{mis-1}}}{\partial z}\right]_{n-1}\Big|_{z=x}+2x^2[f_{\text{0-quad}}f]_{n-1}+x^{-2}[f_{i_x\geqslant 4}]_{n-1} \\ \Rightarrow\quad F_n &= x^2\left(z\frac{\partial O_{n-1}}{\partial z}\right)\Big|_{z=x}+2x^2\sum_{i=0}^{n-1}F_iQ_{n-1-i}+x^{-2}F_{n-1}|_{i_x\geqslant 4}. \end{aligned} \tag{7.3.4}$$

在此基础上, 运用定理 7.1.1 和定理 7.1.3, 即可得

$$\begin{aligned} F_1 &= x^2\left(z\frac{\partial O_0}{\partial z}\right)\Big|_{z=x}+2x^2Q_0F_0+x^{-2}F_0|_{i_x\geqslant 4} \\ &= x^2(0)+2x^2(0)+x^{-2}(0)=0 \quad\Rightarrow\quad F_1|_{i_x\geqslant 4}=0, \end{aligned} \tag{7.3.5}$$

$$\begin{aligned} F_2 &= x^2\left(z\frac{\partial O_1}{\partial z}\right)\Big|_{z=x}+2x^2(Q_0F_1+Q_1F_0)+x^{-2}F_1|_{i_x\geqslant 4} \\ &= x^2(x^4)+2x^2(0)+x^{-2}(0)=x^4 \quad\Rightarrow\quad F_2|_{i_x\geqslant 4}=x^4, \end{aligned} \tag{7.3.6}$$

$$\begin{aligned} F_3 &= x^2\left(z\frac{\partial O_2}{\partial z}\right)\Big|_{z=x}+2x^2(Q_0F_2+Q_1F_1+Q_2F_0)+x^{-2}F_2|_{i_x\geqslant 4} \\ &= x^2(8x^4)+2x^2(x^4)+x^{-2}(x^4)=x^2+10x^6 \quad\Rightarrow\quad F_3|_{i_x\geqslant 4}=10x^6, \end{aligned} \tag{7.3.7}$$

$$\begin{aligned} F_4 &= x^2\left(z\frac{\partial O_3}{\partial z}\right)\Big|_{z=x}+2x^2(Q_0F_3+Q_1F_2+Q_2F_1+Q_3F_0)+x^{-2}F_3|_{i_x\geqslant 4} \\ &= x^2(10x^6+8x^6+12x^6+8x^6+10x^6+3x^2)+2x^2(x^2+10x^6)+x^{-2}(10x^6) \\ &= (48x^8+3x^4)+(20x^8+2x^4)+10x^4 \quad\Rightarrow\quad F_4=15x^4+68x^8 \end{aligned} \tag{7.3.8}$$

通过对于至多 4 条棱的球面近四角化按根同构分类验算, 得知这与式 (7.3.5)~ 式 (7.3.8) 的结果一致.

引理 7.3.1 对于任何整数 $n \geqslant 1$, F_n 是 $\mathcal{R}_+[x]$ 上的一个常数项为 0 无 x 奇次项的 $2n$ 次多项式.

证明 从式 (7.3.5) ~ 式 (7.3.8) 可以看出, 结论对于 $1 \leqslant n \leqslant 4$ 成立. 对于 $n \geqslant 5$, 假设对于任何 $i \leqslant n-1$, F_i 都是一个常数项为 0、无 x 奇次项的 $2i$ 次多项式, 往证 $i=n$ 时的情形. 因为式 (7.3.5) 中的 O_n 和 Q_n 都是 $\mathcal{R}_+[x]$ 上的一个常数项为 0、无 x 奇次项的 $2n$ 次多项式, 由归纳假设, 以及在 $F_{n-1}|_{i_x \geqslant 4}$ 中 x 至少为 4 次, 即可导出 F_n 是 $\mathcal{R}_+[x]$ 上的一个常数项为 0、无 x 奇次项的 $2n$ 次多项式. □

根据这个引理, 可以将 F_n $(n \geqslant 1)$ 表示成如下形式:

$$F_n = \sum_{m=1}^{n} B_{2m,n} x^{2m} \quad (B_{m,n} \in \mathcal{R}_+). \tag{7.3.9}$$

从而, 有

$$x^{-2} F_n|_{i_x \geqslant 4} = \sum_{m=2}^{n} B_{2m,n} x^{2m-2} = \sum_{m=1}^{n-1} B_{m+1,n} x^{2m}. \tag{7.3.10}$$

由式 (7.3.4), 知

$$F_n = x^2 \left(z \frac{\partial O_{n-1}}{\partial z} \right)\bigg|_{z=x} + 2x^2 \sum_{i=0}^{n-1} F_i Q_{n-1-i} + \sum_{m=1}^{n-2} B_{m+1,n-1} x^{2m}. \tag{7.3.11}$$

定理 7.3.1 偏微分方程组 (7.3.1) 在 $\mathcal{R}_+\{x,y\}$ 中有且仅有一组解.

证明 因为由式 (7.3.11) 确定的函数满足方程式 (7.3.2), 从等价性可知这个函数就是方程式 (7.3.1) 的一个解.

进而, 从式 (7.3.11) 在 $\mathcal{R}_+[x]$ 中求 F_n 过程的唯一性, 知这个解是仅有的. □

基于这个定理, 令方程组式 (7.3.1) 的解为 $f = f_{1-\mathrm{nq}}$, $g = f_{\mathrm{crq}}$ 和 $h = f_{0\text{-}\mathrm{nq}}$, 则对于任何整数 $n \geqslant 0$, 有

$$\partial_x^n f_{1\text{-}\mathrm{nq}} = F_n, \quad \partial_x^n f_{\mathrm{crq}} = O_n, \quad \partial_x^n f_{0\text{-}\mathrm{nq}} = Q_n, \tag{7.3.12}$$

分别由式 (7.3.11)、定理 7.1.3 和定理 7.1.1 确定.

定理 7.3.2 在偏微分方程组式 (7.3.1) 的解中, 记 $\partial_x^n f_{1\text{-}\mathrm{nq}} = T_n$, 则对于任何整数 $n \geqslant 1$, T_n 有如下正项有限和表达式:

$$T_n = x^2 \left(z \frac{\partial O_{n-1}}{\partial z} \right)\bigg|_{z=x} + 2x^2 \sum_{i=0}^{n-1} T_i Q_{n-1-i} + \sum_{m=1}^{n-2} T_{m+1,n-1} x^{2m}, \tag{7.3.13}$$

其中

$$T_{m+1,n-1} = \partial_x^{2m} T_{n-1} \quad (1 \leqslant m \leqslant n-1).$$

证明 从定理 7.3.1 知, 对于任何整数 $n \geqslant 1$, $T_n = F_n$. 由式 (7.3.11), 即可得欲证的结论. □

例 7.3.1 在环面上近四角化的根同构类. 图 7.3.1 显示了 3 条棱近四角化的根同构类: $1a = x^2$ 和 $6b + 3c + 1d = 10x^6$, 即 $T_3 = x^2 + 10x^6(F_3)$, 与式 (7.3.7) 一致. 这些均统计在表 7.3.1 中. 在这个表中, 从面集列可以看出相应行代表的地图根面的次. 例如, 行 a 所代表的近四角化, 从面集列第一行相应的位置内的第一对小括号, 可以看出根面次为 2(即 x^2) 和同构类数就是花括号对的数目 1. 因此, $\partial_x^2 T_3 = 1$. 每一对花括号内的第一个元素为这一类的代表, 反映在相应图中的小空心圆, 即根的位置.

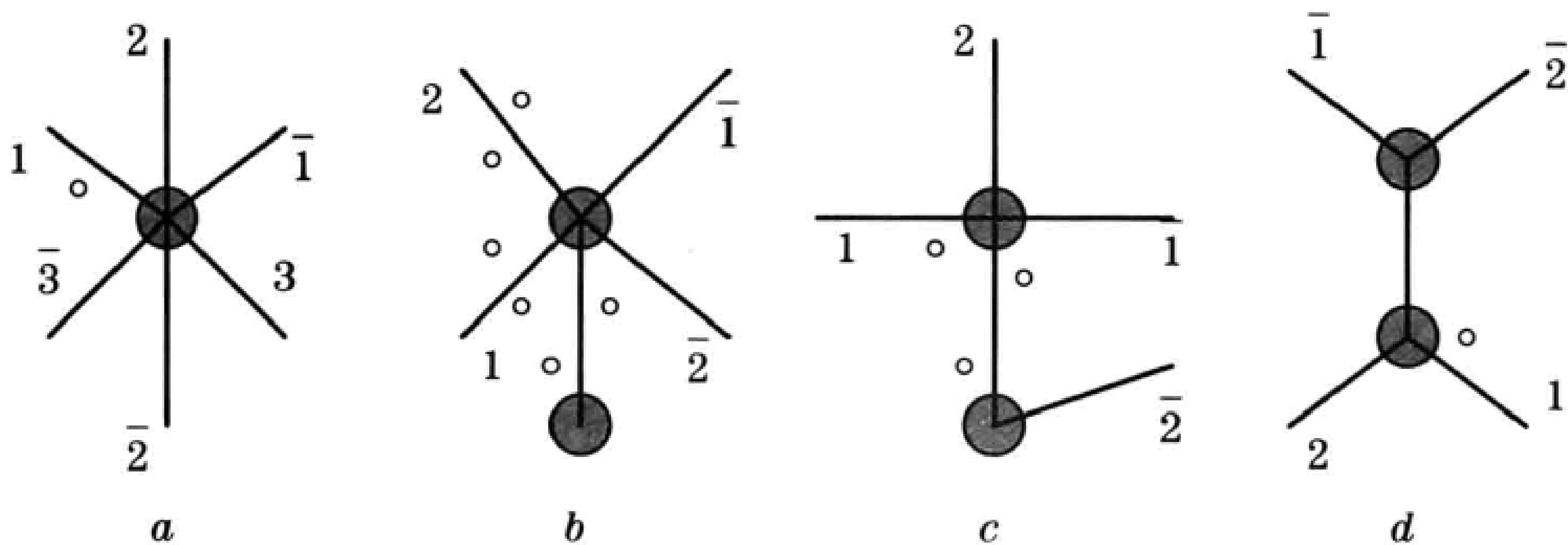


图 7.3.1 在环面上边数为 3 的根近四角化的同构类

表 7.3.1 表 7.3.1 所对应的节点集、面集和同构类

序号	节点集	面集	同构类
a	$(1,2,\gamma1,3,\gamma2,\gamma3)$	$(1,3)(\gamma1,2,\gamma3,\gamma2)$	$\{1,\beta1,3,\beta3\}$
b	$(3,1,2,\gamma1,\gamma2)(\gamma3)$	$(1,\gamma2,\gamma1,2,3,\gamma3)$	$\{3,\alpha3\},\{1,\beta1\},\{\alpha1,\gamma2\},$ $\{2,\beta1\},\{\alpha2,\gamma1\},\{\gamma2,\beta3\}$
c	$(3,1,2,\gamma1)(\gamma2,\gamma3)$	$(1,3,\gamma2,\gamma1,2,\gamma3)$	$\{3,\alpha3,2,\alpha2\},\{1,\alpha1,$ $\gamma1,\beta1\},\{\gamma3,\beta3,\gamma2,\beta2\}$
d	$(3,1,2)(\gamma3,\gamma1,\gamma2)$	$(3,\gamma1,2,\gamma3,1,\gamma2)$	$\{K1+K2+K3\}$

图 7.3.2 显示了 4 条棱近四角化的根同构类: $1a + 4b + 8c + 2d = 15x^4$, 即 $T_{4,4} = 15x^4(F_{4,4})$, 与式 (7.3.8) 中 F_4 的 x^4 项吻合. 这些均反映在表 7.3.2 中 (见图 7.3.1 的说明).

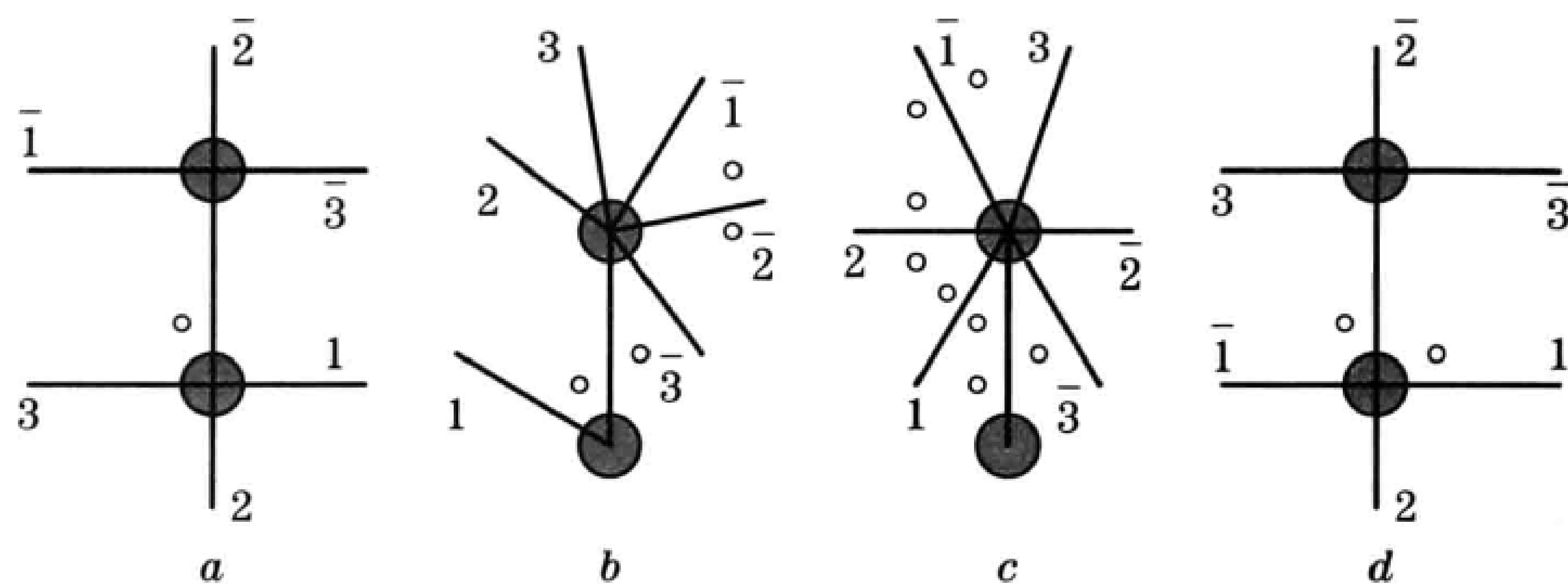


图 7.3.2　在环面上边数为 4 的根四角化的同构类

表 7.3.2　图 7.3.2 所对应的节点集、面集和同构类

序号	节点集	面集	同构类
a	$(4,1,2,3)$, $(\gamma4,\gamma1,\gamma2,\gamma3)$	$(1,\gamma2,3,\gamma4)$, $(\gamma1,2,\gamma3,4)$	$\{K1+K2+K3+K4\}$
b	$(4,1,)$, $(r4,2,3,\gamma1,\gamma2,\gamma3)$	$(1,\gamma2,3,r4)$, $(\gamma1,4,2,\gamma3)$	$\{4,\alpha4,1,\alpha1\},\{\gamma4,\beta4,\gamma1,\beta1\}$, $\{2,\alpha3,\gamma2,\beta3\},\{\alpha2,3,\beta2,\gamma3\}$
c	$(4,1,2,\gamma1,3,\gamma2,\gamma3)$, $(r4)$	$(1,3,4,r4)$, $(\gamma1,2,\gamma3,\gamma2)$	$\{4,\alpha4\},\{1,\beta3\},\{\alpha1,\gamma3\},\{2,\beta2\}$, $\{\alpha2,\gamma2\},\{\gamma1,\alpha3\},\{\beta1,3\},\{\gamma4,\beta4\}$
d	$(4,1,2,\gamma1)$, $(r4,3,\gamma2,\gamma3)$	$(1,4,3,r4)$, $(\gamma1,2,\gamma3,\gamma2)$	$\{4,\alpha4,2,\alpha2,\gamma4,\beta4,\gamma2,\beta2\}$, $\{1,\alpha1,\gamma1,\beta1,3,\alpha3,\gamma3,\beta3\}$

7.4　Klein 瓶四角化

考虑关于 f,g,h 和 p 的偏微分方程组:

$$\begin{cases} x^4y\Big(x\dfrac{\partial g}{\partial x}+\Big[z\dfrac{\partial h}{\partial z}\Big]_{z=x}\Big)=x^2f-x^4y(g+g^2+2pf)-y(f-x^2\partial_x^2 f),\\ x^4y\Big(p+x\dfrac{\partial p}{\partial x}\Big)=x^2(x^2-y-2x^4yp)g+x^2y\partial_x^2 g,\\ \dfrac{x^3zy}{z-x}\delta_{z,x}(up|_{x=u})=x^2(1-2x^2yp)h-y(h-x^2\partial_x^2 h),\\ x^4yp^2+(y-x^2)p-x^2y\partial_x^2 p+x^2-y=0,\\ f|_{x=z=y=0}=g|_{x=z=y=0}=h|_{x=z=y=0}=0,\quad p|_{x=z=y=0}=1. \end{cases} \tag{7.4.1}$$

从方程组式 (7.1.2)、式 (7.1.27) 和式 (7.2.1), 可知

$$p=f_{0\text{-nq}},\quad h=f_{\text{crq}},\quad g=f_{\tilde{1}\text{-nq}}. \tag{7.4.2}$$

它们的正项有限和表达式分别由式 (7.1.2) ~ 式 (7.1.4)、式 (7.1.35) ~ 式 (7.1.36) 和式 (7.2.19) ~ 式 (7.2.20) 给出. 因此, 这里只需通过 $F_n=\partial_y^n f=[f]_n$ $(n\geqslant 1)$ 确定 f.

为运算方便, 将方程组式 (7.1.2) 的第一式变换成如下合适的等价形式:

$$f=x^2y\left(x\frac{\partial g}{\partial x}+\left[z\frac{\partial h}{\partial z}\right]_{z=x}\right)+x^2y(g+g^2+2pf)+x^{-2}y(f-x^2\partial_x^2 f). \tag{7.4.3}$$

因为 y 是等号右端的一个因子, 所以有

$$[f]_n=F_0=0. \tag{7.4.4}$$

这就是方程组式 (7.4.1) 的始条件. 对于任何整数 $n\geqslant 1$, 有

$$\begin{aligned}
[f]_n&=x^2\left[x\frac{\partial g}{\partial x}+\left(z\frac{\partial h}{\partial z}\right)_{z=x}\right]_{n-1}+x^2\left[g+g^2+2pf\right]_{n-1}+x^{-2}[f-x^2\partial_x^2 f]_{n-1}\\
&=x^2\left(x\frac{\partial P_{n-1}}{\partial x}+\left(z\frac{\partial O_{n-1}}{\partial z}\right)_{z=x}\right)\\
&\quad+x^2\left(P_{n-1}+\sum_{i=0}^{n-1}P_iP_{n-1-i}+2\sum_{i=0}^{n-1}Q_iF_{n-1-i}\right)\\
&\quad+x^{-2}(F_{n-1}-x^2\partial_x^2F_{n-1}).
\end{aligned} \tag{7.4.5}$$

基于此, 利用式 (7.2.19)、式 (7.1.35) 和式 (7.1.2), 有

$$\begin{aligned}
F_1&=x^2\left(x\frac{\partial P_0}{\partial x}+\left(z\frac{\partial O_0}{\partial z}\right)_{z=x}\right)+x^2(P_0+P_0P_0+2Q_0F_0)+x^{-2}(F_0-x^2\partial_x^2F_0)\\
&=0\quad\Rightarrow\quad F_1-x^2\partial_x^2F_1=0,
\end{aligned} \tag{7.4.6}$$

$$\begin{aligned}
F_2&=x^2\left(x\frac{\partial P_1}{\partial x}+\left(z\frac{\partial O_1}{\partial z}\right)_{z=x}\right)+x^2\big(P_1+2P_0P_1+2(Q_0F_1+Q_1F_0)\big)\\
&\quad+x^{-2}(F_1-x^2\partial_x^2F_1)\\
&=x^2(2x^2+x^2)+x^2(x^2)=4x^4\quad\Rightarrow\quad F_2-x^2\partial_x^2F_2=0=4x^4,
\end{aligned} \tag{7.4.7}$$

$$\begin{aligned}
F_3&=x^2\left(x\frac{\partial P_2}{\partial x}+\left(z\frac{\partial O_2}{\partial z}\right)_{z=x}\right)+x^2\left(P_2+\sum_{i=0}^{2}P_iP_{2-i}+2\sum_{i=0}^{2}Q_iF_{2-i}\right)\\
&\quad+x^{-2}(F_2-x^2\partial_x^2F_2)\\
&=x^2(20x^4+3x^4+2x^4+3x^4)+x^2(5x^4+x^4+8x^4)+x^{-2}(4x^4)\\
&=4x^2+42x^6\quad\Rightarrow\quad F_3-x^2\partial_x^2F_3=42x^6,
\end{aligned} \tag{7.4.8}$$

$$F_4 = x^2\Big(x\frac{\partial P_3}{\partial x}+\Big(z\frac{\partial O_3}{\partial z}\Big)_{z=x}\Big)+x^2\Big(P_3+\sum_{i=0}^{3}P_iP_{2-i}+2\sum_{i=0}^{3}Q_iF_{2-i}\Big)$$
$$+x^{-2}(F_3-x^2\partial_x^2F_3)$$
$$=x^2(13x^2+180x^6)+x^2(13x^2+124x^6)+x^{-2}(42x^6)$$
$$=68x^4+304x^8 \quad\Rightarrow\quad F_4-x^2\partial_x^2F_4=68x^4+304x^8. \tag{7.4.9}$$

通过对于至多 4 条棱的球面近四角化按根同构分类验算, 得知这与式 (7.4.5) ~ 式 (7.4.8) 的结果一致.

引理 7.4.1 对于任何整数 $n\geqslant 1$, F_n 是 $\mathcal{R}_+[x]$ 上的一个常数项为 0、无 x 奇次项的 $2n$ 次多项式.

证明 从式 (7.4.6) ~ 式 (7.4.9) 可以看出, 结论对于 $1\leqslant n\leqslant 4$ 成立. 对于 $n\geqslant 5$, 假设对于任何 $i\leqslant n-1$, F_i 都是一个常数项为 0、无 x 奇次项的 $2i$ 次多项式, 往证 $i=n$ 时的情形. 因为式 (7.4.5) 中的 P_{n-1}, O_{n-1} 和 Q_{n-1} 都是 $\mathcal{R}_+[x]$ 上的一个常数项为 0、无 x 奇次项的 $2(n-1)$ 次多项式, 由归纳假设, 以及在 $F_{n-1}|_{i_x\geqslant 4}$ 中, x 至少为 4 次, 即可导出 F_n 是 $\mathcal{R}_+[x]$ 上的一个常数项为 0、无 x 奇次项的 $2(n-1)+2=2n$ 次多项式. □

根据这个引理, 可以将 F_n $(n\geqslant 1)$ 表示成如下形式:

$$F_n=\sum_{m=1}^{n}K_{m,n}x^{2m}\quad (K_{m,n}\in\mathcal{R}_+). \tag{7.4.10}$$

从而, 有

$$x^{-2}(F_n-x^2\partial_x^2F_n)=\sum_{m=2}^{n}K_{m,n}x^{2m-2}=\sum_{m=1}^{n-1}K_{m+1,n}x^{2m}. \tag{7.4.11}$$

由式 (7.4.5), 知

$$F_n=x^2\Big(x\frac{\partial P_{n-1}}{\partial x}+\Big(z\frac{\partial O_{n-1}}{\partial z}\Big)_{z=x}\Big)$$
$$+x^2\Big(P_{n-1}+\sum_{i=0}^{n-1}P_iP_{n-1-i}+2\sum_{i=0}^{n-1}Q_iF_{n-1-i}\Big)$$
$$+\sum_{m=1}^{n-1}K_{m+1,n}x^{2m}. \tag{7.4.12}$$

定理 7.4.1 偏微分方程组式 (7.4.1) 在 $\mathcal{R}_+[x,z]$ 中有且仅有一组解.

证明 因为由式 (7.4.12) 确定的函数满足方程式 (7.4.3), 从等价性可知这个函数就是方程式 (7.4.1) 的一个解.

进而, 从式 (7.4.12) 在 $\mathcal{R}_+[x]$ 中求 F_n 过程的唯一性, 这个解是仅有的. □

基于这个定理, 令方程组式 (7.4.1) 的解为 $f = f_{\tilde{2}\text{-nq}}$, $g = f_{\tilde{1}\text{-nq}}$, $h = f_{\text{crq}}$ 和 $p = f_{0\text{-nq}}$, 则对于任何整数 $n \geqslant 0$, 有

$$\partial_x^n f_{\tilde{1}\text{-nq}} = P_n, \quad \partial_x^n f_{\text{crq}} = O_n, \quad \partial_x^n f_{0\text{-nq}} = Q_n, \tag{7.4.13}$$

分别由式 (7.4.12)、定理 7.1.3 和定理 7.1.1 确定.

定理 7.4.2 在偏微分方程组式 (7.4.1) 的解中, 记 $\partial_x^n f_{\tilde{2}\text{-nq}} = K_n$, 则对于任何整数 $n \geqslant 0$, K_n 有如下正项有限和表达式:

$$\begin{aligned} K_n = {} & x^2\left(x\frac{\partial P_{n-1}}{\partial x} + \left(z\frac{\partial O_{n-1}}{\partial z}\right)_{z=x}\right) \\ & + x^2\left(P_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} P_i P_{n-1-i} + 2\sum_{i=0}^{n-1} Q_i K_{n-1-i}\right) \\ & + \sum_{m=1}^{n-1} K_{m+1,n} x^{2m}, \end{aligned} \tag{7.4.14}$$

其中 $n \geqslant 1$, $K_0 = 0$.

证明 从定理 7.4.1 知, 对于任何整数 $n \geqslant 1$, $K_n = F_n$. 由式 (7.4.12), 即可得欲证的结论. □

例 7.4.1 在 Klein 瓶上的根近四角化的同构类. 仅讨论边数不超过 3 的情形. 因为不超过 1 条边的地图只能在球面上, Klein 瓶上的四角化至少有两条边. 图 7.4.1 显示了边数为 2 的根近四角化. 图 7.4.2 和图 7.4.3 显示了边数为 3 的分别有一个和两个节点的根近四角化.

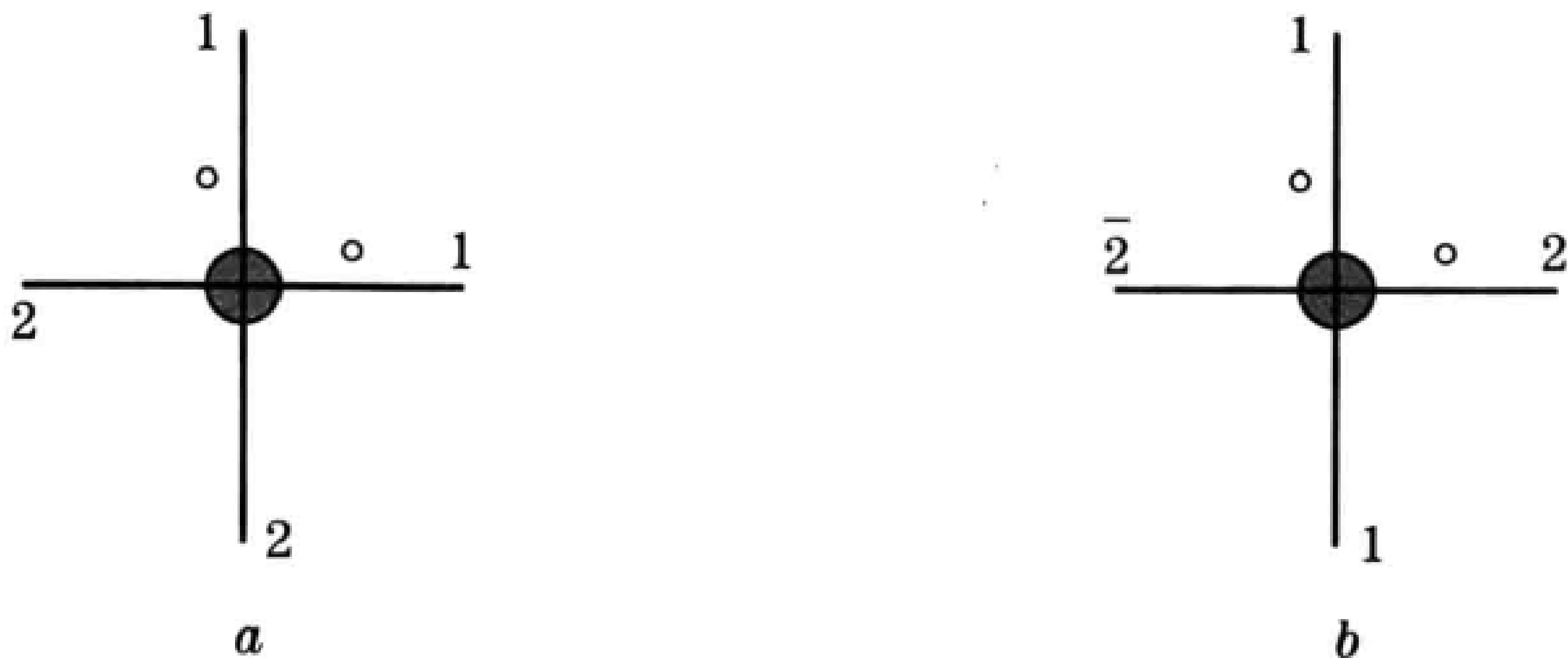


图 7.4.1 在 Klein 瓶上的边数为 2 的根近四角化

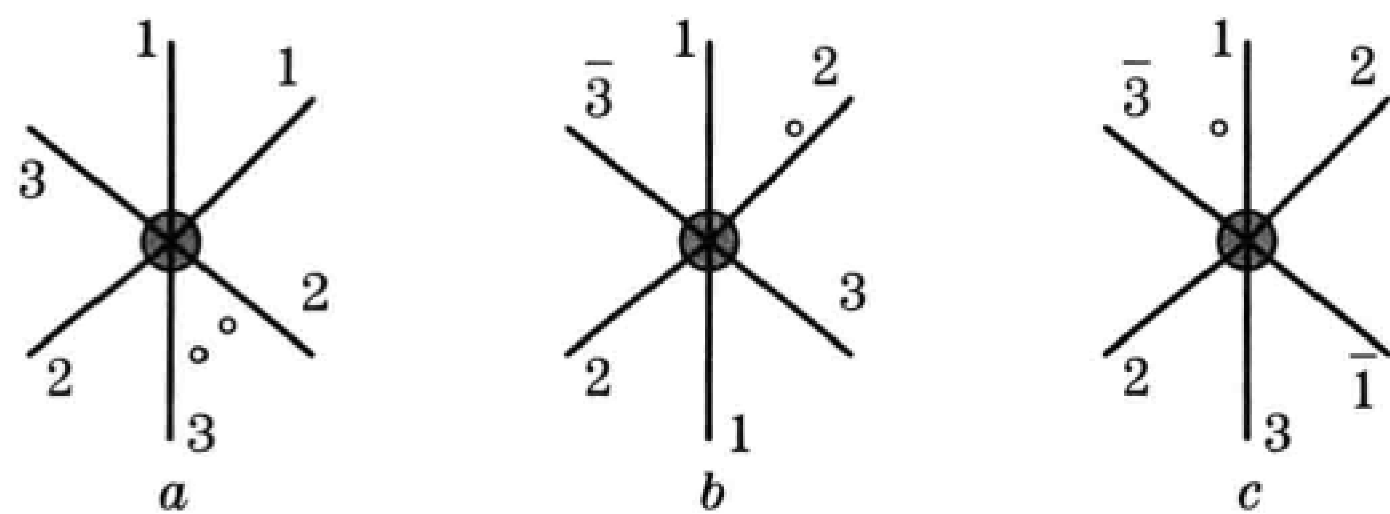


图 7.4.2 在 Klein 瓶上的边数为 3、节点数为 1 的根近四角化

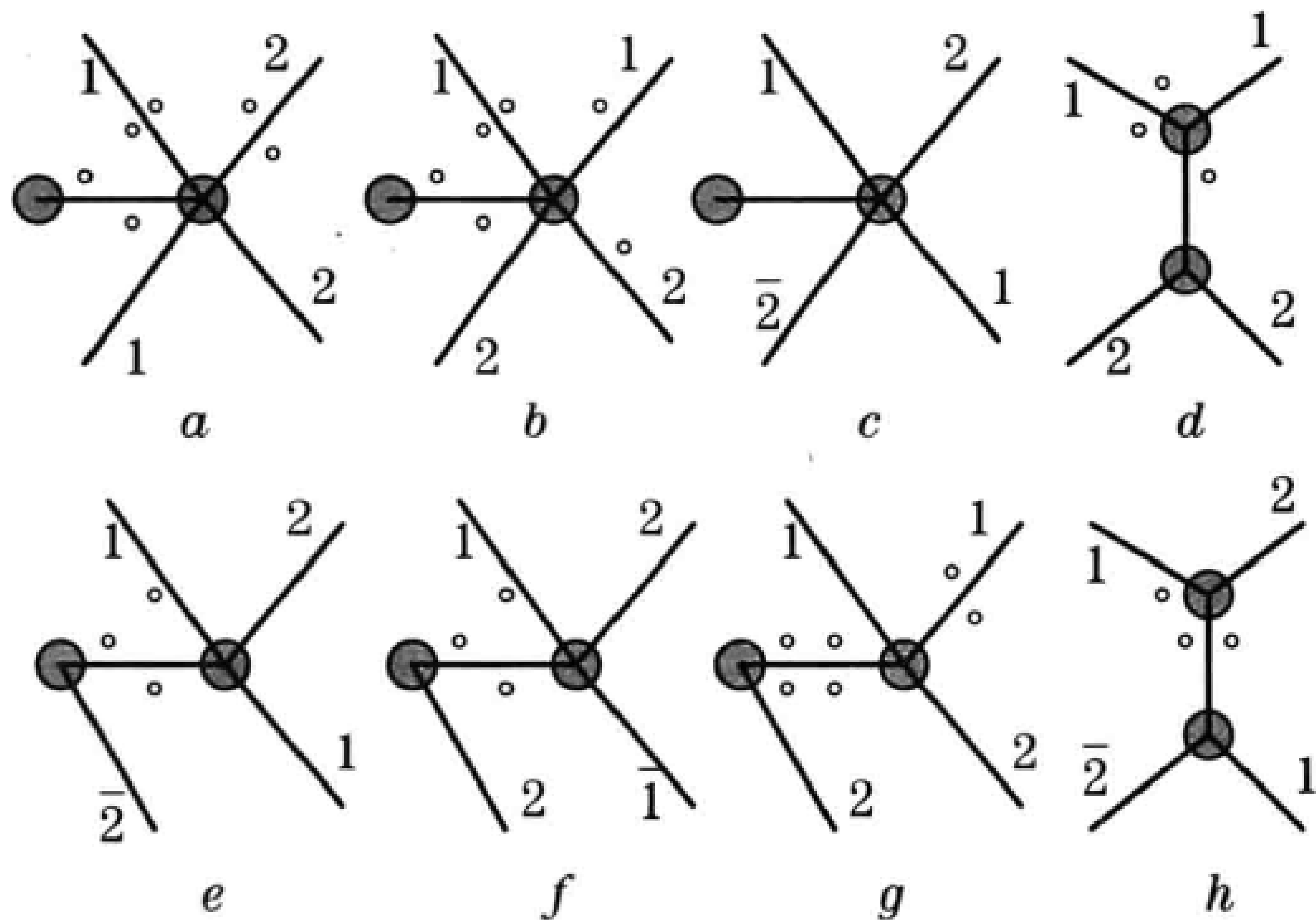


图 7.4.3 在 Klein 瓶上的边数为 3、节点数为 2 的根近四角化

图 7.4.1 显示 (见图 7.3.1 的说明), 两条边的根近四角化共有 4 个同构类, 如表 7.4.1 所示.

表 7.4.1 图 7.4.1 所对应的节点集、面集和同构类

序号	节点集	面集	同构类
a	$(1,\beta1,2,\beta2)$	$(1,\alpha1,2,\alpha2)$	$\{1,\alpha1,2,\alpha2\}$,$\{\beta1,\gamma1,\beta2,\gamma2\}$
b	$(1,2,\beta1,\gamma2)$	$(1,\alpha2,\alpha1,2)$	$\{1,\alpha1,\beta1,\gamma1\}$,$\{2,\alpha2,\beta2,\gamma2\}$

实际上, 这些近四角化都只是四角化.

在图 7.4.2 中 (见图 7.4.1 的说明), 可以看出 3 条边、1 个节点的根近四角化共有 4 个同构类, 如表 7.4.2 所示.

表 7.4.2 图 7.4.2 所对应的节点集、面集和同构类

序号	节点集	面集	同构类
a	$(1,\beta1,2,3,\beta2,\beta3)$	$(1,\alpha1,2,\alpha3)(3,\gamma2)$	$\{3,\gamma2\}$, $\{\alpha2,\beta3\}$
b	$(1,2,3,\beta1,\beta2,\gamma3)$	$(1,\alpha3,\gamma2,3)(\alpha1,\beta2)$	$\{\alpha1,2,\gamma1,\beta2\}$
c	$(1,2,\gamma1,2,\beta2,\gamma3)$	$(1,3)(\alpha1,\alpha2,\beta3,\beta2)$	$\{1,\beta1,3,\beta3\}$

在图 7.4.3 中, 可以看出 3 条边、 2 个节点的根近四角化所确定的 42 个同构类 (见图 7.3.1 的说明), 如表 7.4.3 所示. 其中 $\{Ki\}=\{i\},\{\alpha i\},\{\beta i\},\{\gamma i\}$ $(i=1,2,3)$ 和 $K=\{1,\alpha,\beta,\gamma\}$ 为 Klein 四元群 [57].

表 7.4.3 图 7.4.3 所对应的节点集、面集和同构类

序号	节点集	面集	同构类
a	$(3,1,2,\beta 2,\beta 1)(\gamma 3)$	$(1,\gamma 2,\beta 2,\alpha 1,3,\gamma 3)$	$\{3,\alpha 3\},\{\gamma 3,\beta 3\},\{1,\gamma 1\},\{\alpha 1,\beta 1\},\{2,\gamma 2\},\{\alpha 2,\beta 2\}$
b	$(3,1,\beta 1,2,\beta 2)(\gamma 3)$	$(1,\alpha 1,2,\alpha 2,3,\gamma 3)$	$\{3,\alpha 3\},\{\gamma 3,\beta 3\},\{1,\gamma 2\},\{\alpha 1,\beta 2\},\{2,\gamma 1\},\{\alpha 2,\beta 1\}$
c	$(3,1,2,\beta 1,\gamma 2)(\gamma 3)$	$(1,\alpha 2,\gamma 1,2,3,\gamma 3)$	$\{K1\},\{K2\},\{K3\}$
d	$(3,1,\beta 1)(\gamma 3,2,\beta 2)$	$(1,\alpha 1,3,2,\alpha 2,\gamma 3)$	$\{3,\alpha 3,\gamma 3,\beta 3\},\{1,\gamma 1,2,\gamma 2\},\{\alpha 1,\beta 1,\alpha 2,\beta 2\}$
e	$(3,1,2,\beta 1)(\gamma 3,\gamma 2)$	$(1,\alpha 2,\beta 3,\gamma 1,2,\gamma 3)$	$\{3,\alpha 3,2,\alpha 2\},\{\gamma 3,\beta 3,\gamma 2,\beta 2\},\{1,\alpha 1,\beta 1,\gamma 1\}$
f	$(3,1,2,\gamma 1)(\gamma 3,\beta 2)$	$(1,3,\beta 2,\alpha 1,\alpha 2,\gamma 3)$	$\{3,\alpha 3,2,\alpha 2\},\{\gamma 3,\beta 3,\beta 2,\gamma 2\},\{1,\alpha 1,\gamma 1,\beta 1\}$
g	$(3,1,\beta 1,2)(\gamma 3,\beta 2)$	$(1,\alpha 1,2,\beta 3,\alpha 2,\gamma 3)$	$\{3,\alpha 2\},\{\alpha 3,2\},\{\beta 3,\gamma 2\},\{\gamma 3,\beta 2\},\{1,\gamma 1\},\{\alpha 1,\beta 1\}$
h	$(3,1,2)(\gamma 3,\beta 1,\gamma 2)$	$(1,\beta 3,\alpha 2,\gamma 1,2,\gamma 3)$	$\{3,\alpha 2,\gamma 3,\beta 2\},\{\alpha 3,2,\beta 3,\gamma 2\},\{1,\alpha 1,\beta 1,\gamma 1\}$

例 7.4.2 在 Klein 瓶上的根四角化的同构分类 (续)(如图 7.4.4~图 7.4.7、表 7.4.4~表 7.4.7 所示).

可以看出, 在图 7.4.4 中 (见图 7.3.1 的说明), 提供了四条边的根四角化在 Klein 瓶上共有 $12+16+8+32=68$ 个同构类.

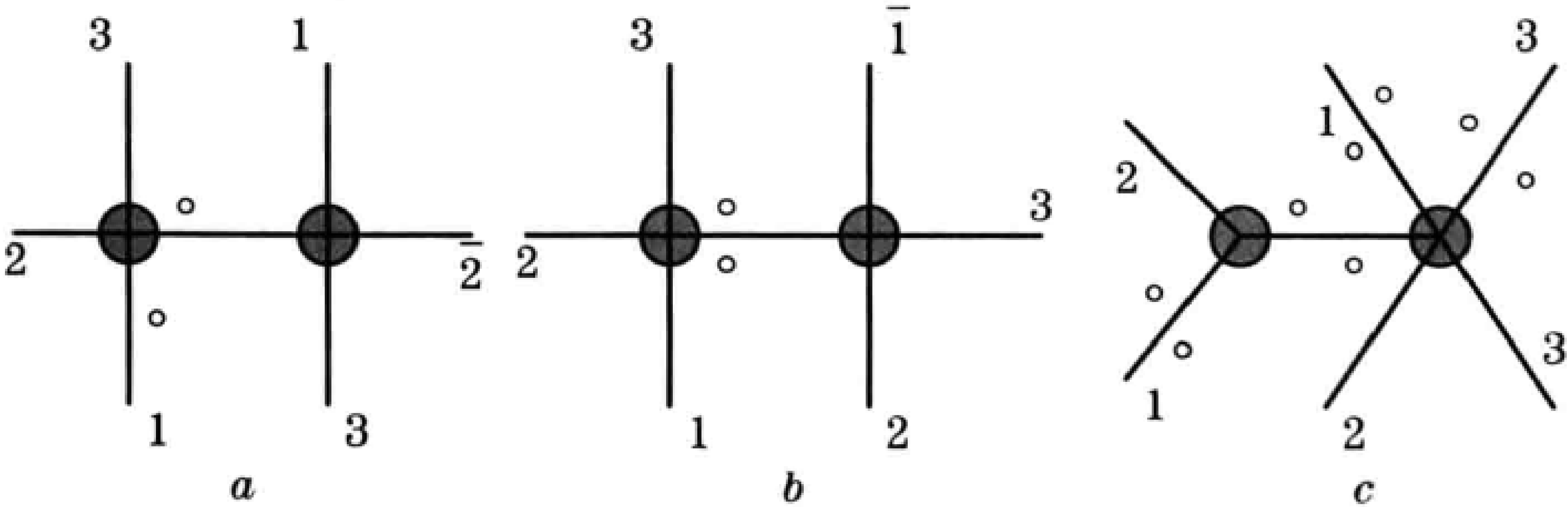


图 7.4.4 klein 瓶上边数为 4、节点为 2 的四角化 (I)

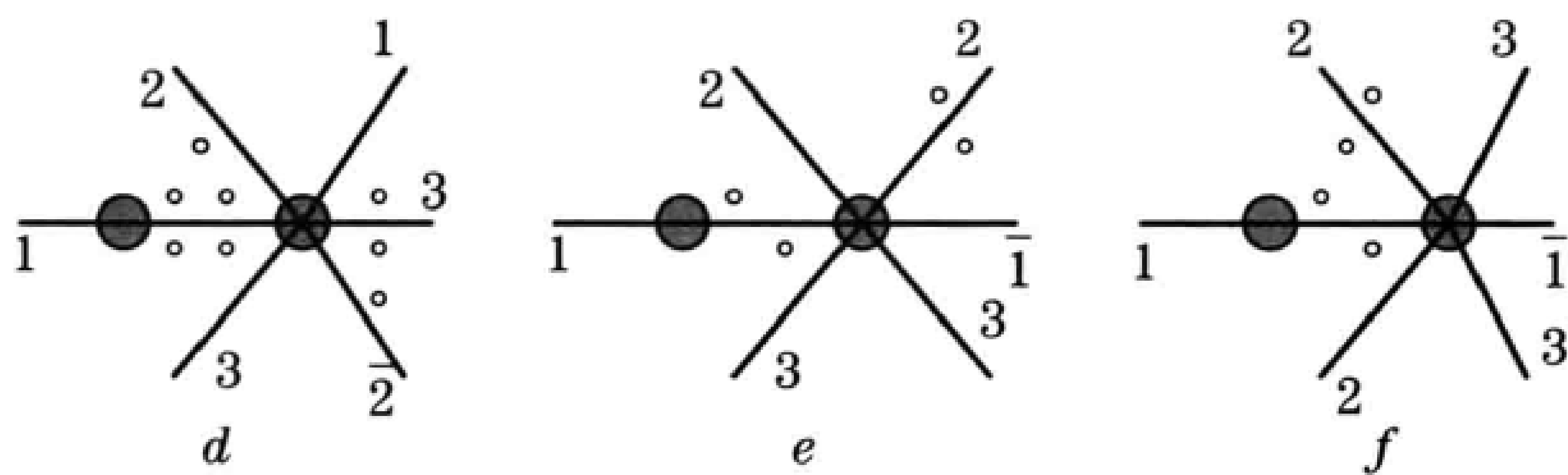


图 7.4.5 klein 瓶上边数为 4、节点为 2 的四角化 (II)

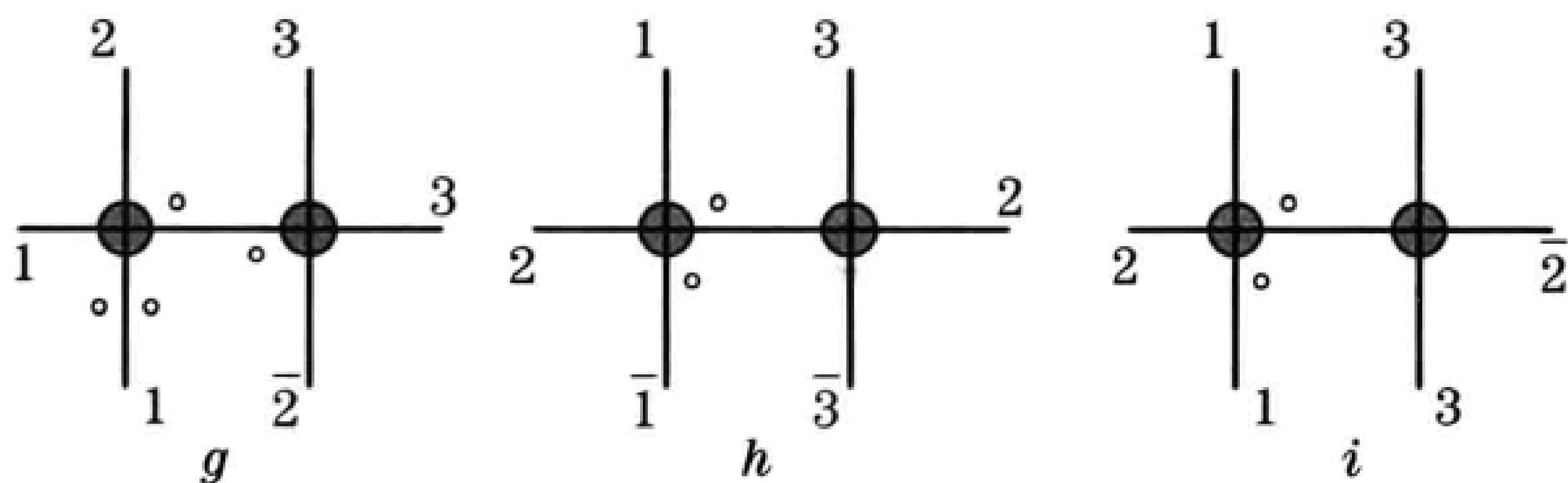


图 7.4.6 klein 瓶上边数为 4、节点为 2 的四角化 (III)

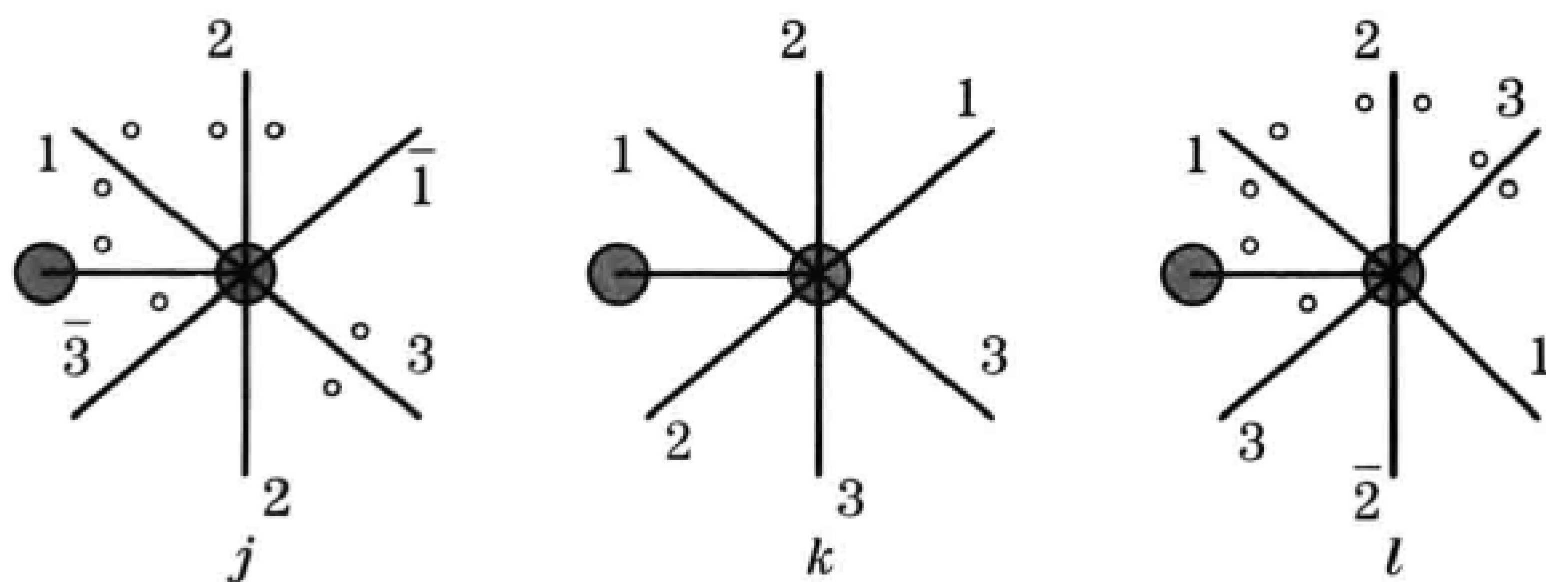


图 7.4.7 klein 瓶上边数为 4、节点为 2 的四角化 (IV)

表 7.4.4 图 7.4.4 所对应的节点集、面集和同构类

序号	节点集	面集	同构类
a	$(4,1,2,3)$	$(1,\beta4,\alpha3,\gamma4)$	$\{4,\alpha4,2,\alpha2,\gamma4,\beta4,\gamma2,\beta2\}$,
	$(\gamma4,\beta1,\gamma2,\beta3)$	$(\alpha1,\gamma2,3,\beta2)$	$\{1,\alpha1,3,\alpha3,\beta1,\gamma1,\beta3,\gamma3\}$
b	$(4,1,2,3)$	$(1,\beta3,\alpha2,\gamma4)$	$\{4,\alpha1,2,\alpha3,\gamma4,\beta1,\beta3,\gamma2\}$,
	$(\gamma4,\gamma1,\beta3,\beta2)$	$(2,\gamma3,4,\gamma1)$	$\{\alpha4,1,\alpha2,3,\beta4,\gamma1,\gamma3,\beta2\}$
c	$(4,1,2)$	$(1,\beta4,\alpha2,\gamma4)$	$\{4,\alpha4\},\{\gamma4,\beta4\},\{1,\alpha2\},\{\alpha1,2\}$,
	$(\gamma4,\beta1,3,\beta3,\beta2)$	$(\alpha1,3,\alpha3,\beta2)$	$\{\beta1,\gamma2\},\{\gamma1,\beta2\},\{3,\gamma3\},\{\alpha3,\beta3\}$

表 7.4.5　图 7.4.5 所对应的节点集、面集和同构类

序号	节点集	面集	同构类
d	$(4,1)$ $(\gamma4,2,\beta1,3,\gamma2,\beta3)$	$(1,\alpha2,\alpha3,\gamma4)$ $(\alpha1,3,\beta2,\beta4)$	$\{4,1\},\{\alpha4,\alpha1\},\{\beta4,\beta1\},\{\gamma4,\gamma1\},$ $\{2,\alpha2\},\{\gamma2,\beta2\},\{3,\gamma3\},\{\alpha3,\beta3\}$
e	$(4,1)$ $(\gamma4,2,\beta2,\gamma1,3,\beta3)$	$(1,3,\alpha3,\gamma4)$ $(\alpha1,\gamma2,\beta2,\beta4)$	$\{4,\alpha4,1,\alpha1\},\{\gamma4,\beta4,\gamma1,\beta1\},$ $\{2,\gamma2,3,\gamma3\},\{\alpha2,\beta2,\alpha3,\beta3\}$
f	$(4,1)$ $(\gamma4,2,3,\gamma1,\beta3,\beta2)$	$(1,\beta3,\alpha2,\gamma4)$ $(\alpha1,\alpha3,\beta2,\beta4)$	$\{4,\alpha4,1,\alpha1\},\{\gamma4,\beta4,\gamma1,\beta1\},$ $\{2,\alpha3,\beta3,\gamma2\},\{\alpha2,3,\gamma3,\beta2\}$

表 7.4.6　图 7.4.6 所对应的节点集、面集和同构类

序号	节点集	面集	同构类
g	$(4,1,\beta1,2)$ $(\gamma4,3,\beta3,\gamma2)$	$(1,\alpha1,2,\gamma4)$ $(\alpha2,\gamma3,\beta3,\beta4)$	$\{4,\alpha2,\gamma4,\beta2\},\{\alpha4,2,\beta4,\gamma2\},$ $\{1,\gamma1,3,\gamma3\},\{\alpha1,\beta1,\alpha3,\beta3\}$
h	$(4,1,2,\gamma1)$ $(\gamma4,3,\beta2,\gamma3)$	$(1,4,3,\gamma4)$ $(\alpha1,\alpha2,\gamma3,\beta2)$	$\{4,\alpha4,2,\alpha2,\gamma4,\beta4,\beta2,\gamma2\},$ $\{1,\alpha1,\gamma1,\beta1,3,\alpha3,\gamma3,\beta3\}$
i	$(4,1,2,\beta1)$ $(\gamma4,3,\gamma2,\beta3)$	$(1,\alpha2,\alpha3,\gamma4)$ $(\alpha1,4,3,\beta2)$	$\{4,\alpha4,2,\alpha2,\gamma4,\beta4,\gamma2,\beta2\},$ $\{1,\alpha1,\beta1,\gamma1,3,\alpha3,\beta3,\gamma3\}$

表 7.4.7　图 7.4.7 所对应的节点集、面集和同构类

序号	节点集	面集	同构类
j	$(4,1,2,\gamma1,3,\beta2,\gamma3)$, $(\gamma4)$	$(1,3,4,\gamma4)$, $(\alpha1,\alpha2,\gamma3,\beta2)$	$\{4,\alpha4\},\{\gamma4,\beta4\},\{1,\beta3\},\{\alpha1,\gamma3\},$ $\{2,\gamma2\},\{\alpha2,\beta2\},\{3,\beta1\},\{\alpha3,\gamma1\}$
k	$(4,1,2,\beta1,3,\beta3,\beta2)$, $(r4)$	$(1,\alpha2,4,\gamma4)$, $(\alpha1,3,\alpha3,\beta2)$	$\{K1\},\{K2\},\{K3\},\{K4\}$
l	$(4,1,2,3,b1,r2,b3)$, $(r4)$	$(1,\alpha3,4,\gamma4)$, $(\alpha1,\gamma2,3,\beta2)$	$\{4,\alpha4\},\{\gamma4,\beta4\},\{1,\gamma3\},\{\alpha1,\beta3\},$ $\{2,\beta2\},\{\alpha2,\gamma2\},\{3,\gamma1\},\{\alpha3,\beta1\}$

7.5　曲面无环型

考虑关于变元 x 和 y 的函数 f 所满足的方程:

$$\begin{cases} axy\left(2y\dfrac{\partial f}{\partial y}-x\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=(1-xyf|_{x=1})f-1, \\ f|_{x=0,y=0}=1, \end{cases} \tag{7.5.1}$$

其中 $a\in\mathcal{R}_+$, $a\neq 0$.

为下面推导方便, 先将方程式 (7.5.1) 在整域扩张 $\mathcal{R}\{x,y\}$ 上等价地变换成

$$f=axy\left(2y\frac{\partial f}{\partial y}-x\frac{\partial f}{\partial x}\right)+xyf|_{x=1}f+1. \tag{7.5.2}$$

因为我们的目的在于论证方程在 $\mathcal{R}_+\{x,y\}\subseteq\mathcal{R}\{x,y\}$ 中解的存在性、唯一性, 以及求出解的一种单项或正项和表示, 故可令

$$f=\sum_{n\geqslant 0}F_ny^n,\quad F_n=[f]_n\in\mathcal{R}\{x\}. \tag{7.5.3}$$

由方程式 (7.5.1) 的始条件, 知

$$[f|_{x=0}]_0=1. \tag{7.5.4}$$

从式 (7.5.3) 可知, 对于 $n\geqslant 0$,

$$[f|_{x=1}]_n=F_n|_{x=1},\quad \left[y\frac{\partial f}{\partial y}\right]_n=nF_n,\quad \left[x\frac{\partial f}{\partial x}\right]_n=x\frac{\mathrm{d}F_n}{\mathrm{d}x}. \tag{7.5.5}$$

若记 $H_n=F_n|_{x=1}$ $(n\geqslant 0)$, 则由式 (7.5.3) 和式 (7.5.5), 对于 $n\geqslant 0$, 有

$$[f|_{x=1}f]_n=\sum_{i=0}^{n}H_iF_{n-i}. \tag{7.5.6}$$

在式 (7.5.3) ~ 式 (7.5.6) 的基础上, 由式 (7.5.2), 可得

$$\begin{aligned}
&y^0:[f]_0=1\\
&\qquad\Rightarrow\ F_0=1\quad\Rightarrow\quad F_0=1,\ H_0=1, &(7.5.7)\\
&y^1:[f]_1=ax\left[2y\frac{\partial f}{\partial y}-x\frac{\partial f}{\partial x}\right]_0+x[f|_{x=1}f]_0=x(H_0F_0)=x\\
&\qquad\Rightarrow\quad F_1=x,\ H_1=1, &(7.5.8)\\
&y^2:[f]_2=ax\left[2y\frac{\partial f}{\partial y}-x\frac{\partial f}{\partial x}\right]_1+x[f|_{x=1}f]_1\\
&\qquad\quad=ax(2x-x)+x(H_0F_1+H_1F_0)\\
&\qquad\quad=ax(2x-x)+x(1+x)=x+(a+1)x^2\\
&\qquad\Rightarrow\quad F_2=x+(a+1)x^2,\ H_2=a+2, &(7.5.9)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y^3: [f]_3 &= ax\Big[2y\frac{\partial f}{\partial y} - x\frac{\partial f}{\partial x}\Big]_2 + x[f|_{x=1}f]_2 \\
&= ax\Big(2(2F_2) - x\frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}x}\Big) + x\sum_{i=0}^{2} H_i F_{2-i} \\
&= ax(3x + 2(a+1)x^2) + x((a+2) + 2x + (a+1)x^2) \\
\Rightarrow &\quad \begin{cases} F_3 = (a+2)x + (3a+2)x^2 + (2a^2+3a+1)x^3, \\ H_3 = 2a^2 + 7a + 5, \end{cases}
\end{aligned} \tag{7.5.10}
$$

以及对于任何整数 $n \geqslant 4$,

$$
\begin{aligned}
y^n: [f]_n &= ax\Big[2y\frac{\partial f}{\partial y} - x\frac{\partial f}{\partial x}\Big]_{n-1} + x[f|_{x=1}f]_{n-1} \\
\Rightarrow &\quad F_n = ax\Big(2(n-1)F_{n-1} - x\frac{\mathrm{d}F_{n-1}}{\mathrm{d}x}\Big) + x\sum_{i=0}^{n-1} H_i F_{n-1-i}.
\end{aligned} \tag{7.5.11}
$$

引理 7.5.1 对于任何整数 $n \geqslant 1$, F_n 是 x 的常数项为 0 的 n 次多项式.

证明 由式 (7.5.8) ~ 式 (7.5.10), 对于 $n = 1$, 2, 3, 引理的结论为真. 对于 $n \geqslant 4$ 时的情形, 可以假设对于所有 i $(n > i \geqslant 1)$, F_i 都是 x 的常数项为 0 的 i 次多项式. 利用这个假设, 往证 $i = n$ 时的情形. 因为在式 (7.5.11) 中, 等号的右端有一个因子 x, F_n 的常数项为 0. 令 d 为未定元 x 的多项式的次. 由式 (7.5.11), 有

$$
d(F_n) = 1 + d(F_{n-1}) = 1 + (n-1) = n.
$$

从而, 引理得证. □

根据引理 7.5.1, 可以将 F_n 表示为如下形式:

$$
F_n = \sum_{i=1}^{n} F_{i,n} x^i, \tag{7.5.12}
$$

其中 $F_{i,n} \in \mathcal{R}$ $(n \geqslant i \geqslant 1)$.

引理 7.5.2 在式 (7.5.11) 中, 多项式

$$
2(n-1)F_{n-1} - x\frac{\mathrm{d}F_{n-1}}{\mathrm{d}x} \geqslant 0 \quad (n \geqslant 2),
$$

当且仅当 $F_{n-1} \geqslant 0$.

证明 由式 (7.5.12), 有

$$2(n-1)F_{n-1}-x\frac{\mathrm{d}F_{n-1}}{\mathrm{d}x}=2(n-1)\sum_{i=1}^{n-1}F_{i,n-1}x^i-\sum_{i=1}^{n-1}iF_{i,n-1}x^i$$
$$=\sum_{i=1}^{n-1}(2(n-1)-i)F_{i,n-1}x^i.$$

对于任何 $n\geqslant i\geqslant 1$, 都有 $2(n-1)-i>0$, 由此即得引理的结论. □

引理 7.5.3 对于任何整数 $n\geqslant 1$, $F_n\in\mathcal{R}_+[x]$(即非负整系数以 x 为未定元多项式的集合).

证明 基于引理 7.5.1、引理 7.5.2 和 $a\in\mathcal{R}_+$, 用数学归纳法, 即可得所有 $F_{i,n}=\partial_x^iF_n\in\mathcal{R}_+$. 引理得证. □

定理 7.5.1 方程式 (7.5.1) 在 $\mathcal{R}_+[x,y\}$ 中有且仅有一个解.

证明 令 $f_{\rm nl}=f$, $\partial_y^nf_{\rm nl}=F_n$ $(n\geqslant 0)$, 由式 (7.5.7)~ 式 (7.5.11) 确定. 因为 $f_{\rm nl}$ 满足方程式 (7.5.2) 且方程式 (7.5.2) 与方程式 (7.5.1) 等价, $f_{\rm nl}$ 也是方程式 (7.5.1) 的一个解. 由引理 7.5.3, 知 $f_{\rm nl}\in\mathcal{R}_+[x,y\}$.

从式 (7.5.7) 到式 (7.5.11) 的过程可以看出, 在 $\mathcal{R}_+[x,y\}$ 中, $f_{\rm nl}$ 对于方程式 (7.5.1) 初值的唯一性. 因此, 这个解在 $\mathcal{R}_+[x,y\}$ 中是仅有的. □

定理 7.5.2 方程式 (7.5.1) 在 $\mathcal{R}_+[x,y\}$ 中的解有如下的正项和递推表示：

$$\begin{cases}\partial_y^nf_{\rm nl}=x\left(F_{n-1}+\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\left(a(2n-i-2)F_{i,n-1}+F_i|_{x=1}F_{n-1-i}\right)\right)\ (n\geqslant 1),\\ \partial_y^0f_{\rm nl}=1,\end{cases}\tag{7.5.13}$$

其中 $F_i=\partial_y^if_{\rm nl}$, $F_{i,n-1}=\partial_x^iF_{n-1}$ $(n-1\geqslant i\geqslant 1)$.

证明 由定理 7.5.1 和引理 7.5.2 的证明, 经过整理, 即可得式 (7.5.13). □

例 7.5.1 给定根顶点次和度, 确定无自环根地图在可定向曲面上的同构类. 方程

$$\begin{cases}xy\left(2y\dfrac{\partial f}{\partial y}-x\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=(1-xyf|_{x=1})f-1,\\ f|_{x=0,y=0}=1\end{cases}\tag{7.5.14}$$

(即 [65] 中第 211 页的式 (8.4.8)) 的解, 就给出了无自环根地图在可定向曲面上以根顶点次和度为参数的同构类数.

当 $a=1$ 时, 式 (7.5.1) 就变成了式 (7.5.14). 因此, 方程式 (7.5.14) 的解就是式 (7.5.13) 中 $a=1$ 时的情形.

例 7.5.2 给定根顶点次和度, 确定无自环根地图在全部曲面上的同构类. 方程

$$\begin{cases} 2xy\left(2y\dfrac{\partial f}{\partial y}-x\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=(1-xyf|_{x=1})f-1, \\ f|_{x=0,y=0}=1 \end{cases} \tag{7.5.15}$$

(即 [65] 中第 213 页的式 (8.4.17)) 的解, 就给出了无自环根地图在全部曲面 (包括可定向与不可定向) 上以根顶点次和度为参数的同构类数.

当 $a=2$ 时, 式 (7.5.1) 就变成了式 (7.5.15). 因此, 方程式 (7.5.15) 的解就是式 (7.5.13) 中 $a=2$ 时的情形.

鉴于这两个特例, 方程式 (7.5.1) 称为曲面无环型的.

7.6 曲面无端型

考虑关于变元 x 和 y 的函数 f 所满足的方程

$$\begin{cases} ax^3y\dfrac{\partial f}{\partial x}=\left(1-ax^2y+\dfrac{xy}{1-x}\right)f-\dfrac{x^2y}{1-x}f|_{x=1}-xy-1, \\ f|_{x=0,y=0}=1, \end{cases} \tag{7.6.1}$$

其中 $a\in\mathcal{R}_+$, $a\neq 0$.

通过在整域扩张 $\mathcal{R}\{x,y\}$ 中等价变换, 将方程式 (7.6.1) 变为

$$f=ax^3y\frac{\partial f}{\partial x}+ax^2yf+\frac{xy}{1-x}(xf|_{x=1}-f)+xy+1. \tag{7.6.2}$$

令 f 由 $F_n=[f]_n=\partial_y^n f\in\mathcal{R}\{x\}$ $(n\geqslant 0)$ 确定, 即

$$f=\sum_{n\geqslant 0}F_ny^n,\quad F_n=[f]_n\in\mathcal{R}\{x\}. \tag{7.6.3}$$

由方程式 (7.6.1) 的始条件,

$$[f|_{x=0}]_0 = 1. \tag{7.6.4}$$

从式 (7.6.3) 可知, 对于 $n \geqslant 0$,

$$[f|_{x=1}]_n = F_n|_{x=1}, \quad \left[x\frac{\partial f}{\partial x}\right]_n = x\frac{\mathrm{d}F_n}{\mathrm{d}x}. \tag{7.6.5}$$

记 $H_n = F_n|_{x=1}$ $(n \geqslant 0)$. 由式 (7.6.5), 对于 $n \geqslant 0$, 有

$$H_n = \sum_{i \geqslant 0} \partial_x^i F_n. \tag{7.6.6}$$

在式 (7.6.4)~式 (7.6.6) 的基础上, 由式 (7.6.2), 可得

$$\begin{aligned}
&y^0 : [f]_0 = 1 \quad \text{(在方程式 (7.6.2) 右端除常数项外都有因子 } y\text{)} \\
&\quad \Rightarrow \quad F_0 = 1,\ H_0 = 1, && (7.6.7) \\
&y^1 : [f]_1 = ax^2\left[x\frac{\partial f}{\partial x}\right]_0 + ax^2[f]_0 + \frac{x[xf|_{x=1} - f]_0}{1-x} + x \\
&\quad = ax^2 - x + x = ax^2 \\
&\quad \Rightarrow \quad F_1 = ax^2,\ H_1 = a, && (7.6.8) \\
&y^2 : [f]_2 = ax^2\left[x\frac{\partial f}{\partial x}\right]_1 + ax^2[f]_1 + \frac{x[xf|_{x=1} - f]_1}{1-x} \\
&\quad = 2a^2x^4 + a^2x^4 + ax^2 = ax^2 + 3a^2x^4 \\
&\quad \Rightarrow \quad F_2 = ax^2 + 3a^2x^4,\ H_2 = a + 3a^2, && (7.6.9)
\end{aligned}$$

以及对于任何整数 $n \geqslant 3$,

$$\begin{aligned}
&y^n : [f]_n = ax^2\left[x\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{n-1} + ax^2[f]_{n-1} + \frac{x[xf|_{x=1} - f]_{n-1}}{1-x} \\
&\quad \Rightarrow \quad F_n = ax^3\frac{\mathrm{d}F_{n-1}}{\mathrm{d}x} + ax^2F_{n-1} + \frac{x(xH_{n-1} - F_{n-1})}{1-x}. && (7.6.10)
\end{aligned}$$

引理 7.6.1 对于任何整数 $n \geqslant 1$, F_n 是 x 的最小次为 2 的 $2n$ 次多项式.

证明 由式 (7.6.8)~式 (7.6.9), 对于 $n = 1, 2$, 引理的结论为真. 对于 $n \geqslant 3$ 的情形, 可以假设对于所有 i $(1 \leqslant i < n-1)$, F_i 都是 x 的最小次为 2 的 $2i$ 次多项式. 利用这个假设, 往证 $i = n$ 时的情形. 因为在式 (7.6.10) 中, 等号的右端有一个因子 x^2, 故 F_n 的常数项和一次项均为 0. 令 $d(p)$ 为未定元 x 的多项式 p 的次. 由式 (7.6.10), 有

$$d(F_n) = 2 + d(F_{n-1}) = 2 + 2(n-1) = 2n.$$

从而, 引理得证. □

基于这个引理, 可以将 F_n $(n \geqslant 1)$ 表示为如下形式:

$$F_n = \sum_{i=2}^{2n} F_{i,n} x^i, \quad H_n = \sum_{i=2}^{2n} F_{i,n}. \tag{7.6.11}$$

引理 7.6.2 对于任何整数 $n \geqslant 1$,

$$(1-x) \big| (xH_n - f_n), \quad \frac{xH_n - F_n}{1-x} \geqslant 0. \tag{7.6.12}$$

证明 由式 (7.6.11), 有

$$\frac{xH_n - F_n}{1-x} = \frac{\displaystyle\sum_{i=2}^{2n} F_{i,n}(x-x^i)}{1-x} = x\sum_{i=2}^{2n} F_{i,n}\Big(\frac{1-x^{i-1}}{1-x}\Big). \tag{7.6.13}$$

因为对于 $i \geqslant 2$, $(1-x)\big|(1-x^{i-1})$, 故第一个结论成立. 又因为对于 $i \geqslant 2$,

$$\frac{1-x^{i-1}}{1-x} = \sum_{j=0}^{i-2} x^j,$$

故第二个结论成立. □

从这个引理的证明中, 可以看出

$$\frac{xH_n - F_n}{1-x} = \sum_{j=1}^{2n-2} \Big(\sum_{i=j+1}^{2n} F_{i,n} \Big) x^j. \tag{7.6.14}$$

引理 7.6.3 对于任何整数 $n \geqslant 1$, $F_n \in \mathcal{R}_+[x]$.

证明 由于 $a \in \mathcal{R}_+$, 在上面两个引理的基础上, 从式 (7.6.10) 和归纳法原理可以看出, $F_n \in \mathcal{R}_+[x)$ 当且仅当 $(xH_n - F_n)/(1-x) \in \mathcal{R}_+[x)$. 由式 (7.6.13), 即得欲证的结论. □

定理 7.6.1 方程式 (7.6.1) 在 $\mathcal{R}_+[x, y\}$ 中有且仅有一个解.

证明 令

$$f = f_{\mathrm{nd}}, \quad \partial_y^n f_{\mathrm{nd}} = F_n \quad (n \geqslant 0),$$

由式 (7.6.7) ~ 式 (7.6.10) 所确定. 因为 f_{nd} 满足方程式 (7.6.2), 且方程式 (7.6.2) 与方程式 (7.6.1) 等价, 所以 f_{nd} 也是方程式 (7.6.1) 的一个解. 由引理 7.6.3, 知 $f_{\mathrm{nd}} \in \mathcal{R}_+[x, y\}$.

从式 (7.6.7) 到式 (7.6.10) 的过程可以看出, 在 $\mathcal{R}_+[x,y\}$ 中, $f_{\rm nd}$ 对于方程式 (7.6.1) 初值的唯一性. 这个解在 $\mathcal{R}_+[x,y\}$ 中是仅有的. □

定理 7.6.2 方程式 (7.6.1) 在 $\mathcal{R}_+[x,y\}$ 中的解 $f_{\rm nd}$ 有如下正项和递推表达式：对于 $n \geqslant 2$,

$$[f_{\rm nd}]_n = ax^2\Big(\sum_{i=2}^{2n-2}(i+1)F_{i,n-1}\Big) + x\sum_{i=1}^{2n-3}\Big(\sum_{j=i+1}^{2n-2}F_{j,n-1}\Big)x^i. \tag{7.6.15}$$

证明 将式 (7.6.11) 和式 (7.6.14) 代入式 (7.6.10), 经整理后, 即可得式 (7.6.15). □

例 7.6.1 给定根顶点次和度, 在可定向曲面上的无端割地图的根同构类. 方程

$$\begin{cases} x^3y\dfrac{\partial f}{\partial x} = \Big(1-x^2y+\dfrac{xy}{1-x}\Big)f - \dfrac{x^2y}{1-x}f|_{x=1} - xy - 1, \\ f|_{x=0,y=0} = 1 \end{cases} \tag{7.6.16}$$

(即[65] 中第 180 页的式 (7.5.12)) 的解, 就给出了无端割地图在所有可定向曲面上以根顶点次和度 (棱数) 为参数的根同构类数.

当 $a=1$ 时, 式 (7.6.1) 就变成了式 (7.6.16). 因此, 方程式 (7.6.16) 的解就是式 (7.6.15) 中 $a=1$ 的情形.

例 7.6.2 给定根顶点次和度, 在全部 (可定向和不可定向) 曲面上的无端割地图的根同构类. 考虑方程

$$\begin{cases} 2x^3y\dfrac{\partial f}{\partial x} = \Big(1-2x^2y+\dfrac{xy}{1-x}\Big)f - \dfrac{x^2y}{1-x}f|_{x=1} - xy - 1, \\ f|_{x=0,y=0} = 1. \end{cases} \tag{7.6.17}$$

当 $a=2$ 时, 式 (7.6.1) 就变成了式 (7.6.17). 因此, 方程式 (7.6.17) 的解就是式 (7.6.15) 中 $a=2$ 时的情形.

由于这两个特例, 我们称方程式 (7.6.1) 为曲面无端型的.

7.7 曲面 Euler 型

考虑关于变元 x 和 y 的函数 f 所满足的方程

$$\begin{cases} 2ax^4y\dfrac{\partial f}{\partial x^2}=\left(1-ax^2y+\dfrac{x^2y}{1-x^2}\right)f-\dfrac{x^2y}{1-x^2}f|_{x=1}-1, \\ f|_{x=0,y=0}=1, \end{cases} \tag{7.7.1}$$

其中 $a\in\mathcal{R}_+$, $a\neq 0$.

将方程式 (7.7.1) 在 $\mathcal{R}\{x^2,y\}$(在方程中只含 x 的偶次幂)$\subseteq\mathcal{R}\{x,y\}$ 中变为等价形式:

$$f=1+ax^2y\left(f+2x^2\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)+\frac{x^2y}{1-x^2}(f|_{x=1}-f). \tag{7.7.2}$$

令 f 由 $F_n=[f]_n=\partial_y^n f\in\mathcal{R}\{x^2\}$ $(n\geqslant 0)$ 确定, 即

$$f=\sum_{n\geqslant 0}F_ny^n,\quad F_n=[f]_n\in\mathcal{R}\{x^2\}. \tag{7.7.3}$$

由方程式 (7.7.1) 的始条件,

$$[f|_{x=0}]_0=1. \tag{7.7.4}$$

从式 (7.7.3) 可知, 对于 $n\geqslant 0$,

$$[f|_{x=1}]_n=F_n|_{x=1},\quad \left[x^2\frac{\partial f}{\partial x^2}\right]_n=x^2\frac{\mathrm{d}F_n}{\mathrm{d}x^2}. \tag{7.7.5}$$

记 $H_n=F_n|_{x=1}$ $(n\geqslant 0)$. 由式 (7.7.5), 对于任何 $n\geqslant 0$, 有

$$H_n=\sum_{i\geqslant 0}\partial_x^i F_n. \tag{7.7.6}$$

在式 (7.7.4) ~ 式 (7.7.6) 的基础上, 由式 (7.7.2), 可得

$$\begin{aligned} &y^0:[f]_0=1(\text{在方程式 (7.7.2) 右端除常数项外都有因子 } y)\\ &\quad\Rightarrow\quad F_0=1(\text{方程式 (7.7.1) 的始条件}),\ H_0=1, \qquad (7.7.7)\\ &y^1:[f]_1=ax^2\left[f+2x^2\frac{\partial g}{\partial x^2}\right]_0+\frac{x^2[f|_{x=1}-f]_0}{1-x^2} \end{aligned}$$

$$= ax^2(1+0)+0 = ax^2$$

$$\Rightarrow \quad F_1 = ax^2,\ H_1 = a, \tag{7.7.8}$$

$$y^2 : [f]_2 = ax^2\left[f+2x^2\frac{\partial g}{\partial x^2}\right]_1 + \frac{x^2[f|_{x=1}-f]_1}{1-x^2}$$

$$= ax^2(ax^2+2ax^2)+\frac{x^2(a-ax^2)}{1-x^2} = 3a^2x^4+ax^2$$

$$\Rightarrow \quad F_2 = 3a^2x^4+ax^2,\ H_1 = 3a^2+a, \tag{7.7.9}$$

以及对于任何整数 $n \geqslant 3$,

$$y^n : [f]_n = ax^2\left[f+2x^2\frac{\partial g}{\partial x^2}\right]_{n-1} + \frac{x^2[f|_{x=1}-f]_{n-1}}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \quad F_n = ax^2\left(F_{n-1}+2x^2\frac{\mathrm{d}F_{n-1}}{\mathrm{d}x^2}\right)+\frac{x^2}{1-x^2}(H_{n-1}-F_{n-1}). \tag{7.7.10}$$

引理 7.7.1　对于任何整数 $n \geqslant 1$, F_n 是 x 的最小次不小于 2 的不含奇次项的 $2n$ 次多项式.

证明　因为在方程式 (7.7.1) 中只含 x 的偶次幂, 故 f 不含 x 的奇次项. 由式 (7.7.8)~ 式 (7.7.9), 对于 $n=1$ 和 2, 引理的结论为真. 对于 $n \geqslant 3$ 时的情形, 可以假设对于所有 i $(n > i \geqslant 1)$, F_i 都是 x 的最小次为 2 的不含奇次项的 $2i$ 次多项式. 利用这个假设, 往证 $i=n$ 时的情形. 因为在式 (7.7.10) 中, 等号的右端有一个因子 x^2, 故 F_n 的常数项和一次项为 0. 令 $d(p)$ 为以 x 为未定元的多项式 p 的次. 由式 (7.7.10), 有

$$d(F_n) = 2+d(F_{n-1}) = 2+2(n-1) = 2n.$$

从而, 引理得证. □

基于这个引理, 可以将 F_n $(n \geqslant 1)$ 表示为如下形式:

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} F_{2i,n}x^{2i}, \quad H_n = \sum_{i=1}^{n} F_{2i,n}. \tag{7.7.11}$$

引理 7.7.2　对于任何整数 $n \geqslant 1$,

$$(1-x^2)\big|(H_n-f_n), \quad \frac{H_n-F_n}{1-x^2} \geqslant 0, \tag{7.7.12}$$

当且仅当 $F_n \in \mathcal{R}_+[x^2]$.

证明　由式 (7.7.11), 有

$$\frac{H_n-F_n}{1-x^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} F_{2i,n}(1-x^{2i})}{1-x^2}. \tag{7.7.13}$$

因为对于 $i \geqslant 1$, $(1-x^2)\big|(1-x^{2i})$, 故第一个结论成立. 又因为对于 $i \geqslant 1$,

$$\frac{1-x^{2i}}{1-x^2}=\sum_{j=0}^{i-1}x^{2j}\geqslant 0,$$

故第二个结论成立. □

从这个引理的证明中, 可以看出

$$\frac{H_n-F_n}{1-x^2}=\sum_{j=1}^{n-1}\Big(\sum_{i=j+1}^{n}F_{2i,n}\Big)x^{2j}. \tag{7.7.14}$$

引理 7.7.3 对于任何整数 $n\geqslant 1$, $F_n\in\mathcal{R}_+[x^2]$.

证明 由于 $a\in\mathcal{R}_+$, 在上面两个引理的基础上, 从式 (7.7.10) 和归纳法原理可以看出, $F_n\in\mathcal{R}_+[x^2)$ 当且仅当 $(H_n-F_n)/(1-x^2)\in\mathcal{R}_+[x^2)$. 由式 (7.7.13), 即得欲证的结论. □

定理 7.7.1 方程式 (7.7.1) 在 $\mathcal{R}_+[x,y\}$ 中有且仅有一个解.

证明 令 $f_{\rm eu}=f$, $\partial_y^n f_{\rm eu}=F_n$ $(n\geqslant 0)$, 由式 (7.7.7)~式 (7.7.10) 确定. 因为 $f_{\rm nd}$ 满足方程式 (7.7.2) 且方程式 (7.7.2) 与方程式 (7.7.1) 等价, $f_{\rm eu}$ 也是方程式 (7.7.1) 的一个解. 由引理 7.7.3, 知 $f_{\rm eu}\in\mathcal{R}_+[x,y\}$.

从式 (7.7.7) 到式 (7.7.10) 的过程可以看出, 在 $\mathcal{R}_+[x,y\}$ 中, $f_{\rm eu}$ 对于方程式 (7.7.1) 初值的唯一性. 因此, 这个解在 $\mathcal{R}_+[x,y\}$ 中是仅有的. □

定理 7.7.2 方程式 (7.7.1) 在 $\mathcal{R}_+[x,y\}$ 中的解 $f_{\rm eu}$ 有如下正项和递推表示式：对于 $n\geqslant 2$,

$$[f_{\rm eu}]_n=\sum_{m=1}^{n}A_{2m,n-1}x^{2m}, \tag{7.7.15}$$

其中

$$A_{2m,n-1}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}F_{2i,n-1}, & m=1,\\ \displaystyle(2m-1)aF_{2(m-1),n-1}+\sum_{i=m}^{n-1}F_{2i,n-1}, & 2\leqslant m\leqslant n-1,\\ (2n-1)aF_{2(n-1),n-1}, & m=n.\end{cases} \tag{7.7.16}$$

证明　将式 (7.7.11) 和式 (7.7.13) 代入式 (7.7.10), 经整理后, 即可得式 (7.7.15). □

例 7.7.1　给定根顶点次和度, Euler 地图在可定向曲面上的根同构类. 方程

$$\begin{cases} 2x^4y\dfrac{\partial f}{\partial x^2}=\left(1-x^2y+\dfrac{x^2y}{1-x^2}\right)f-\dfrac{x^2y}{1-x^2}f|_{x=1}-1, \\ f|_{x=0,y=0}=1 \end{cases} \tag{7.7.17}$$

(即[65] 中由 §6.5 提供的分解原理所导出的) 的解, 就提供了在所有可定向曲面上, Euler 根地图以根顶点次和度为参数的同构类数.

注意, 当 $a=1$ 时, 式 (7.7.1) 就变成了式 (7.7.17). 因此, 方程式 (7.7.17) 的解, 就是式 (7.7.15) 和式 (7.7.16) 中 $a=1$ 时的情形.

例 7.7.2　给定根顶点次和度, Euler 地图在全部 (可定向和不可定向) 曲面上的根同构类. 方程

$$\begin{cases} 4x^4y\dfrac{\partial f}{\partial x^2}=\left(1-2x^2y+\dfrac{x^2y}{1-x^2}\right)f-\dfrac{x^2y}{1-x^2}f|_{x=1}-1, \\ f|_{x=0,y=0}=1 \end{cases} \tag{7.7.18}$$

的解, 就提供了在全部曲面上, Euler 地图以根顶点次和度为参数的根同构类数.

注意, 当 $a=2$ 时, 式 (7.7.1) 就变成了式 (7.7.18). 因此, 方程式 (7.7.18) 的解就是式 (7.7.15) 和式 (7.7.16) 中 $a=2$ 时的情形.

基于这两个特例, 方程式 (7.7.1) 称为曲面 Euler 型的.

7.8　注　记

1. 球面上的情形是一般曲面上的重要基础. 从 7.1 节的例 7.1.4 中, 引发出对于带边缘曲面的注意. 事实上, 欠 –1 面就可以视为一个边缘. 再考虑到根面也作为一个边缘, 就得到一个柱面. 由此将曲面上地图的根同构分类, 转化为球面上这种地图的根同构分类.

2. 在 [83] 中, 讨论了柱面上的近三角化地图的根同构类. 虽然给出了解的带一个参数的显函数表示, 但由于计算复杂, 未能得到最终结果. 用这里的方法, 同样可以获得那里方程解的一个有限正项和的形式. 如果一个地图只有两个顶

点可能例外, 其他所有顶点都是偶次的, 则称之为 Euler 迹, 或者单行地图. 对于在[106] 中提供的三次方程, 同样用这里的方法, 也可论证其解的适定性并求出解的有限正项和形式.

3. 在 [7] 中, 由一个三元函数的二次方程, 当取变元 $y = z$ 时, 得到的就是方程式 (7.1.1). 自然, 可以用 7.1 节中的方法导出解的有限正项和形式.

4. 最早讨论四角化在曲面上根同构类的文章当为 [6]. 那里的曲面是圆盘, 即一类最简单的带边缘的曲面, 在亏格为 0 的可定向曲面带仅有的一个边缘与这个圆盘的边缘一致. 亏格为 0 的可定向曲面带的两个边缘就是 [70](2012) 中的泛柱面. 对于泛柱面上一个四角化, 如果将其两个边缘都视为面, 就得到一个球面上的欠 −1 面四角化. 它的平面对偶就是一个除两个可能的例外所有顶点次均为偶数, 或视为一个单行地图, 还可称 Euler 迹. 最早用 Euler 迹或迹到曲面上的文章当为 [72](1979), 其中讨论了图的最大亏格 (一个图的所有上地图亏格中的最大者).

5. 在 [84](2001) 中, 讨论了环面上四角化的根同构类, 用了多至四个参数, 已经给出了所有函数的直接显式, 但有非正项和. 用本章的方法, 它们都有有限正项和表示. 在 [88](2002)、[11](2002) 等中, 也是一样的.

6. 射影面的情形, 还可参见 [82](2000)、[86](2002)、[87](2002)、[89](2005)、[15](2002)、[105](2007) 等. 那里的所有函数都可用这里的方法导出有限正项和的形式.

7. 虽然 4–正则地图的对偶是四角化, 但 7.4 节中仍用删去棱和它的逆, 即添加棱, 进行无限集的分解, 对于四角化所导出的方程比 [85](2001) 中对于 4–正则的简单得多; 并且最终得到四条棱在 Klein 瓶上的情形为 68 而不是 67. 同样可以将那里的函数都表示成有限正项和的形式.

8. 若查看 7.2 节∼7.4 节中出现的微分方程组与组合地图计数的关系, 可参见 [70](2012). 在那里有基本方程被发现的全过程.

9. 关于 7.5 节∼7.7 节中出现的微分方程组, 可参见专门讨论曲面上偏微分方程的文献 [71](2012).

第 8 章　外面型介子方程

8.1　植　树　型

在文献 [22,24] 中, 可以看到方程

$$\begin{cases} f = y_1 + \int_y \left(\dfrac{y^2 f}{1 - yf}\right), \\ f|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = 0, \end{cases} \tag{8.1.1}$$

其中 $f \in \mathcal{R}\{x, \boldsymbol{y}\}$.

在方程 (8.1.1) 中, $f = f(\boldsymbol{y}) \in \mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots)$, 有

$$f = \sum_{n \geqslant 0} F_n, \tag{8.1.2}$$

其中 F_n 是 $\boldsymbol{y}$ 的一个 n 次齐多项式, 即

$$F_n = \sum_{\substack{\boldsymbol{n} \geqslant 0 \\ |\boldsymbol{n}| = n}} F_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}. \tag{8.1.3}$$

式中 $|\boldsymbol{n}| = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots$, 即 $\boldsymbol{n}$ 的所有分量的和.

由

$$\frac{1}{1 - yf} = \sum_{m \geqslant 0} (yf)^m,$$

就有

$$\frac{y^2 f}{1 - yf} = \sum_{m \geqslant 1} y(yf)^m = \sum_{m \geqslant 1} y^{m+1} f^m.$$

由此, 方程式 (8.1.1) 等价地变为

$$\begin{cases} f = y_1 + \sum_{m\geqslant 1} y_{m+1} f^m, \\ F_0 = 0. \end{cases} \tag{8.1.4}$$

对于任何整数 $i \geqslant 1$, 记

$$f^i = \sum_{n\geqslant 0} F_n^{[i]}, \tag{8.1.5}$$

其中 $F_n^{[i]}$ 是 $\boldsymbol{y}$ 的 n 次齐多项式.

由方程式 (8.1.4) 的始条件, 有

$$F_n^{[0]} = 0 \quad (n \geqslant 0). \tag{8.1.6}$$

进而, 由式 (8.1.2), 对任何整数 $n \geqslant 0$, 有

$$\begin{cases} F_n^{[1]} = F_n, \\ F_n^{[i]} = \sum_{j=0}^{n} F_j F_{n-j}^{[i-1]} \quad (i \geqslant 2). \end{cases}$$

再考虑到式 (8.1.6), 就有

$$\begin{cases} F_n^{[1]} = F_n, \\ F_n^{[i]} = \sum_{j=1}^{n-1} F_j F_{n-j}^{[i-1]} \quad (i \geqslant 2). \end{cases} \tag{8.1.7}$$

下面, 在方程式 (8.1.4) 的基础上, 依次讨论确定 F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 和 F_n $(n \geqslant 5)$ 的过程.

由始条件, $F_0 = 0$ 已经被确定. 对于 $n = 1$, 由式 (8.1.6), 有

$$y_2 F_0^{[1]} + y_3 F_0^{[2]} + y_4 F_0^{[3]} + y_5 F_0^{[4]} + \cdots = 0,$$

即得

$$F_1 = y_1. \tag{8.1.8}$$

由此, 从式 (8.1.7) 导出

$$F_1^{[i]} = 0 \quad (i \geqslant 2). \tag{8.1.9}$$

对于 $n=2$, 由式 (8.1.8), 有

$$y_3F_1^{[2]}+y_4F_1^{[3]}+y_5F_1^{[4]}+y_6F_1^{[5]}+\cdots=0,$$

即得

$$F_2=y_2F_1=y_1y_2. \tag{8.1.10}$$

对于 $n=3$, 由式 (8.1.10), 有

$$y_4F_2^{[3]}+y_5F_2^{[4]}+y_6F_2^{[5]}+y_7F_2^{[6]}+\cdots=0,$$

即得

$$F_3=y_3F_2^{[2]}+y_2F_2^{[2]}=y_1^2y_3+y_1y_2^2. \tag{8.1.11}$$

对于 $n=4$, 由式 (8.1.11), 有

$$y_5F_3^{[4]}+y_6F_3^{[5]}+y_7F_3^{[8]}+y_8F_3^{[7]}+\cdots=0,$$

即得

$$F_4=y_4F_3^{[3]}+y_3F_3^{[2]}+y_2F_3^{[1]}=y_1^3y_4+3y_1^2y_2y_3+y_1y_2^3. \tag{8.1.12}$$

引理 8.1.1　对于任何整数 $n\geqslant 0$, F_n 是一个与所有 y_i $(i\geqslant n+1)$ 无关的 n 次齐多项式.

证明　对于 $n=0,1,\cdots,4$, 从式 (8.1.6)~式 (8.1.12), 可以看出引理的结论成立. 事实上, 对于任何 $n\geqslant 1$, 由式 (8.1.7), 有 $F_{n-1}^{[i-1]}=0$ $(i\geqslant n+1)$. 因为所有项 $y_iF_{n-1}^{[i-1]}=0$ $(i\geqslant n+1)$, 由方程式 (8.1.4), 可知 F_n 是一个与所有 y_i $(i\geqslant n+1)$ 无关的 n 次齐多项式. □

基于这个引理, 对于 $n\geqslant 5$, 由方程式 (8.1.4), 得

$$F_n=\sum_{i=1}^{n-1}y_{i+1}F_{n-1}^{[i]}. \tag{8.1.13}$$

定理 8.1.1　方程式 (8.1.1) 在 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 中有且仅有一个解.

证明　从上面的讨论可以看出, 由式 (8.1.6)~式 (8.1.13) 中的 F_n $(n\geqslant 0)$, 所提供的如式 (8.1.2) 所示的 f 是方程式 (8.1.4) 的一个解, 并且 $f\in\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$. 因为方程式 (8.1.4) 与方程式 (8.1.1) 等价, 这个 f 也是方程式 (8.1.1) 的一个解. 进而,

考虑到上面求 F_n $(n \geqslant 0)$ 的过程对于初值 F_0 的唯一性, 这个解是仅有的. □

再看一看 n 次齐多项式 F_n 更进一步的结构性质. 由引理 8.1.1, 可以记

$$F_n = \sum_{|\boldsymbol{i}_n|=n} F_{\boldsymbol{i}_n} \boldsymbol{y}_n^{\boldsymbol{i}_n}, \tag{8.1.14}$$

其中 $\boldsymbol{y}_n = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, $\boldsymbol{i}_n = (i_1, i_2, \cdots, i_n)$. 为方便, 令

$$\pi(F_{\boldsymbol{i}_n}) = \sum_{j=1}^{n} j i_j = \boldsymbol{n}\boldsymbol{i}_n^{\mathrm{T}}. \tag{8.1.15}$$

引理 8.1.2 对于任何整数 $n \geqslant 1$ 和整数 i, $1 \leqslant k \leqslant n$, 若 $F_{\boldsymbol{i}_n}^{[k]} > 0$, 则 $\pi(F_{\boldsymbol{i}_n}^{[k]}) = 2n - k$.

证明 对于 $n \leqslant 4$, 由式 (8.1.8)、式 (8.1.10)~式 (8.1.12), 可见引理的结论成立. 对于 $n \geqslant 5$, 假若当不超过 $n-1$ 时, 引理的结论成立. 用数学归纳法, 往证 n 的情形. 由归纳假设, 对于 $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$,

$$\pi(F_j F_{n-j}^{[i-1]}) = (2j-1) + (2n-2j-i+1) = 2n-i,$$

这与 j 无关. 由式 (8.1.7) 有

$$\pi(F_{n-1}^{[i]}) = \pi(F_j F_{n-j}^{[i-1]}) = 2n-i.$$

再由式 (8.1.13), 有

$$\pi(F_n) = \pi(y_{i+1}) + \pi(F_{n-1}^{[i]}) = (i+1) + (2(n-1)-i) = 2n-1.$$

从而, 引理对任何整数 $n \geqslant 1$ 都成立. □

事实上, $k=1$ 的情形本身就具有独立的意义, 而且它是其余情形的基础.

推论 8.1.1 对于任何整数 $n \geqslant 1$, 有 $\pi(F_n) = 2n-1$.

证明 此乃引理 8.1.2 中 $k=1$ 时的情形. □

令 $\mathcal{I}_n = \{\boldsymbol{i}_n \geqslant \boldsymbol{0}_n | \boldsymbol{n}\boldsymbol{i}_n^{\mathrm{T}} = 2n-1\}$. 由推论 8.1.1 有

$$F_n = \sum_{\boldsymbol{i}_n \in \mathcal{I}_n} F_{\boldsymbol{i}_n} \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{i}_n}. \tag{8.1.16}$$

进而, 对于 k $(2 \leqslant k \leqslant n)$, 由式 (8.1.7), 有

$$F_n^{[k]} = \sum_{\boldsymbol{i}_n \in \mathcal{I}_n} F_{\boldsymbol{i}_n}^{[k]} \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{i}_n}. \tag{8.1.17}$$

注意, 当 $k=1$ 时, 有 $F_n^{[k]} = F_n$ $F_{\boldsymbol{i}_n}^{[k]} = F_{\boldsymbol{i}_n}$.

定理 8.1.2　方程式 (8.1.1) 的解由如下正项和表示确定:

$$
F_n = \begin{cases} 0, & n=0, \\ y_1, & n=1, \\ y_1 y_2, & n=2, \\ y_1 y_2^2 + y_1^2 y_3, & n=3, \\ y_1 y_2^3 + 3y_1^2 y_2 y_3 + y_1^3 y_4, & n=4, \\ y_2 F_{n-1} + \sum_{i=3}^{n-1} y_i F_{n-1}^{[i-1]} + y_1^{n-1} y_n, & n \geqslant 5. \end{cases} \tag{8.1.18}
$$

证明　当 $n=0$ 时, 由方程式 (8.1.1) 的始条件即得. 当 $1 \leqslant n < 5$ 时, 已经由式 (8.1.8)、式 (8.1.10)~式 (8.1.12) 给出. 对于 $n \geqslant 5$ 时的一般情形, 因为 $F_{n-1}^{[1]} = F_{n-1}$, $F_{n-1}^{[n-1]} = y_1^{n-1}$, 故由式 (8.1.8), 有

$$
\begin{aligned}
F_n &= \sum_{i=1}^{n} y_i F_{n-1}^{[i-1]} \quad (\text{由于 } F_{n-1}^{[0]} = 0) \\
&= \sum_{i=2}^{n} y_i F_{n-1}^{[i-1]} \quad (\text{由于 } F_{n-1}^{[1]} = F_{n-1}) \\
&= y_2 F_{n-1} + \sum_{i=3}^{n} y_i F_{n-1}^{[i-1]} \quad (\text{由于 } F_{n-1}^{[n-1]} = y_1^{n-1}) \\
&= y_2 F_{n-1} + \sum_{i=3}^{n-1} y_i F_{n-1}^{[i-1]} + y_1^{n-1} y_n.
\end{aligned}
$$

由于方程式 (8.1.4) 与方程式 (8.1.1) 等价, 所以定理的结论成立.　□

在这个定理中, 由于 F_n $(0 \leqslant n \leqslant 4)$ 和所有 $F_n^{[i]}$ $(0 \leqslant i \leqslant 4)$ 皆为正项和形式, 所以对于任何 $n \geqslant 5$, F_n 也为正项和形式.

例 8.1.1　植树依点剖分的根同构类. 一个植树就是根顶点次为 1 的平面树. 在文献[66] 中, 第一次直接用初等方法提供了对于给定非根顶点按次的一个剖分, 植树根同构类的数目, 即 $n+1$ 阶植树中, 非根顶点剖分向量 $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, \cdots)$ 的根同构类的数目为

$$
\frac{1}{n}\binom{n}{\boldsymbol{n}} = \frac{(n-1)!}{\boldsymbol{n}!}. \tag{8.1.19}
$$

由定理 8.1.1 知, 在式 (8.1.16) 中,

$$
F_{\boldsymbol{i}_n} = \frac{(n-1)!}{\boldsymbol{i}_n!}. \tag{8.1.20}
$$

定理 8.1.3 方程式 (8.1.1) 的解由如下的系数无和显式确定：

$$F_n = \sum_{\boldsymbol{i}_n \in \mathcal{I}_n} \frac{(n-1)!}{\boldsymbol{i}_n!} \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{i}_n}, \tag{8.1.21}$$

其中 $\mathcal{I}_n = \{\boldsymbol{i}_n \| \boldsymbol{i}_n| = n,\ \boldsymbol{n}\boldsymbol{i}_n^{\mathrm{T}} = 2n-1\}(n \geqslant 1)$.

证明 在定理 8.1.2 的基础上, 由式 (8.1.16) 和式 (8.1.20), 即可得定理的结论. □

推论 8.1.2 对于任何整数 $n \geqslant 2$ 和向量 $\boldsymbol{i}_n$, 在方程式 (8.1.1) 的解中, $F_{\boldsymbol{i}_n}$ 是个正整数当且仅当 $\boldsymbol{i}_n \in \mathcal{I}_n$.

证明 这是定理 8.1.3 的一个直接结果. □

在此基础上, 允许我们用小阶植树在所有可能顶点剖分向量上的根同构类的数目, 验证方程式 (8.1.1) 相应项的正确性.

在图 8.1.1 中, 提供了阶为 2, 3 和 4 的植树按顶点剖分向量 (用 $\boldsymbol{a} = (1)$, $\boldsymbol{b} = (1,1)$, $\boldsymbol{c} = (2,0,1)$ 和 $\boldsymbol{d} = (1,2,0)$ 表示) 的根同构类. 例如, $\boldsymbol{a}$ 只有 1 类, 即 $F_1 = y_1$; $\boldsymbol{b}$ 也只有 1 类, 即 $F_2 = y_1 y_2$; 以及 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{d}$ 都只有 1 类, 即 $F_3 = y_1^2 y_3 + y_1^3$.

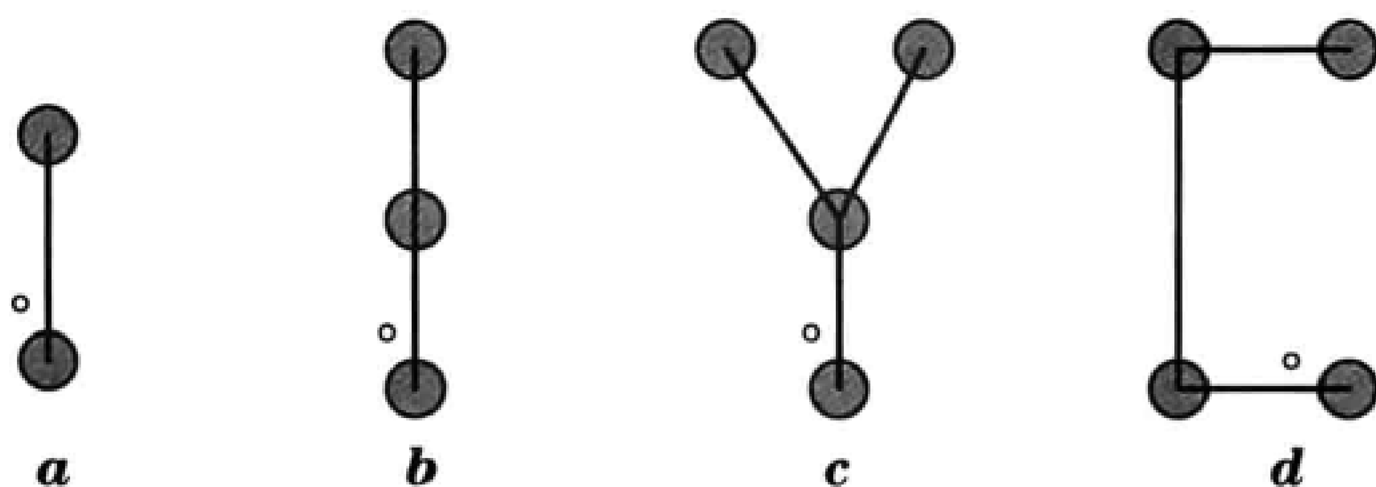


图 8.1.1 阶为 2～4 的植树按顶点剖分的根同构类

在图 8.1.2 中, 提供了阶为 5 的植树按顶点剖分向量 (用 $\boldsymbol{a} = (3,0,0,1)$, $\boldsymbol{b} = (2,1,1,0)$ 和 $\boldsymbol{c} = (1,3,0,0)$ 表示) 的根同构类. 其中, $\boldsymbol{a}$ 有 1 类, $\boldsymbol{b}$ 有 3 类 和 $\boldsymbol{c}$ 有 1 类, 即 $F_4 = y_1^3 y_4 + 3y_1^2 y_2 y_3 + y_1 y_2^3$.

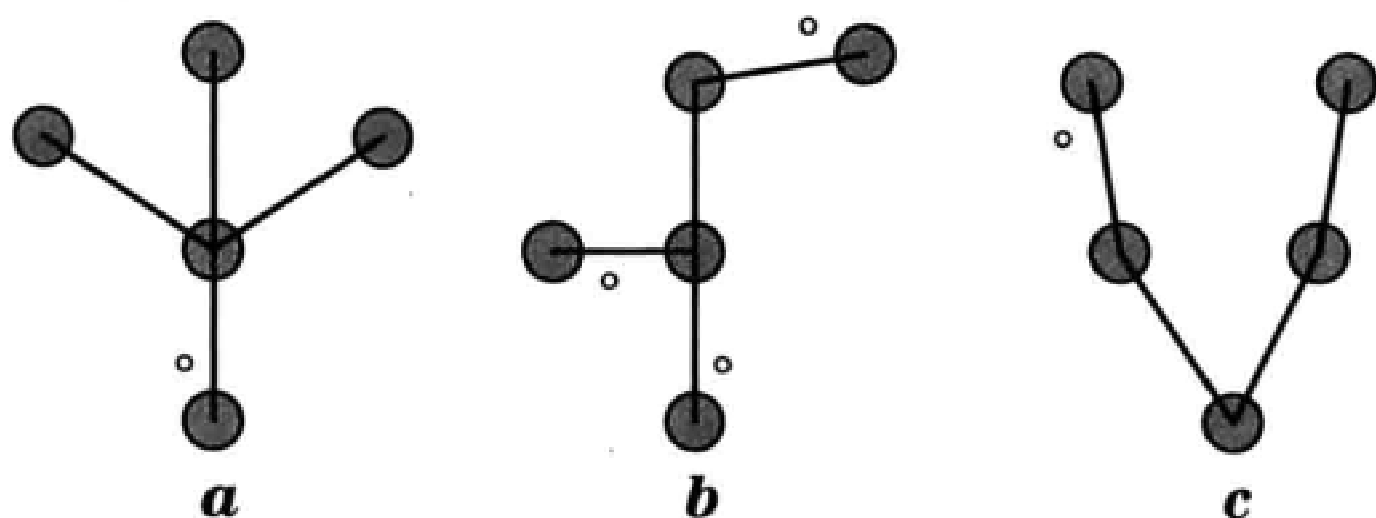


图 8.1.2 阶为 5 的植树按顶点剖分的根同构类

例 8.1.2 无穷维向量方程. 在文献[22,24] 中, 用无穷维矩阵分析的方法提供了方程式 (8.1.4) 的解, 用 τ_1 表示, 为向量方程

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Y})\boldsymbol{\tau}^{\mathbf{T}} = y_1\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} \tag{8.1.22}$$

解的第一个分量. 在这个方程中, $\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\cdots)$, $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0,\cdots)$, $\boldsymbol{Y}=(y_{i,j})_{i\geqslant 1,j\geqslant 1}$, 使得

$$y_{i,j}=\begin{cases} y_{j-i+2}, & i\leqslant j+1, \\ 0, & i\geqslant j+2. \end{cases} \tag{8.1.23}$$

因为

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Y})^{-1}=\sum_{i\geqslant 0}\boldsymbol{Y}^i,$$

方程式 (8.1.22) 的解为

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}=\left(\sum_{n\geqslant 0}y_1\boldsymbol{Y}^n\right)\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}. \tag{8.1.24}$$

由此, 就只剩下确定 $\boldsymbol{Y}^n(n\geqslant 2)$ 了.

对于任何整数 $n\geqslant 2$, 令 $\boldsymbol{Y}^n=(y_{i,j}^{[n]})_{i\geqslant 1,j\geqslant 1}$.

引理 8.1.3 对任何整数 $n\geqslant 2$, $y_{i,j}^{[n]}=0$ $(i\geqslant n+2, 1\leqslant j\leqslant i-n-1)$.

证明 当 $n=2$ 时, 由式 (8.1.23), 对于任何 $i\geqslant 3$, 在 $\boldsymbol{Y}$ 的第 i 行中, $y_{i,j}=0$ $(1\leqslant j\leqslant i-2)$, 对于任何 $j\geqslant 1$, 在 $\boldsymbol{Y}$ 的第 j 列中, $y_{i,j}=0$ $(i\geqslant j+2)$. 因为对 $\forall i,j\geqslant 1$,

$$y_{i,j}^{[2]}=\sum_{k\geqslant 1}y_{i,k}y_{k,j},$$

所以对 $\forall i\geqslant 4, 1\leqslant j\leqslant i-3$, 有

$$y_{i,j}^{[2]}=\sum_{k=i-1}^{j+1}y_{i,k}y_{k,j}=\sum_{k=j+2}^{j+1}y_{i,k}y_{k,j}=0.$$

从而, 当 $n\geqslant 2$ 时, 引理的结论成立.

对于任何整数 $n\geqslant 3$, 假设对于 $2\leqslant l\leqslant n-1$, 有 $y_{i,j}^{[l]}=0$ $(i\geqslant l+2, 1\leqslant j\leqslant i-l-1)$, 往证 $l=n$ 时的情形. 由式 (8.1.23), 对于任何 $i\geqslant 3$, 在 $\boldsymbol{Y}$ 的第 i 行中, $y_{i,j}=0$ $(1\leqslant j\leqslant i-2)$, 由归纳假设, 对于任何 $j\geqslant 1$, 在 $\boldsymbol{Y}$ 的第 j 列中, $y_{i,j}=0$ $(i\geqslant j+(n-1)+1)$. 因为矩阵乘法满足结合律, 故对 $\forall i,j\geqslant 1$,

$$y_{i,j}^{[n]}=\sum_{k\geqslant 1}y_{i,k}y_{k,j}^{[n-1]}.$$

对 $\forall i \geqslant n+2$, $1 \leqslant j \leqslant i-n-1$, 因为在 $\boldsymbol{Y}$ 的第 i 行中, $[y_{i,1}, y_{i,i-2}]$ 内所有元素为 0(其他元素全不是 0) 且在 $\boldsymbol{Y}^{n-1}$ 的第 j 列中, $[y_{j+n,j}, y_{\infty,j})$ 内所有元素为 0(其他元素全不是 0), 故有

$$
\begin{aligned}
y_{i,j}^{[n]} &= \sum_{k \geqslant 1} y_{i,k} y_{k,j}^{[n-1]} \quad (\text{由于 } y_{i,k}=0, k \in [1, i-2]) \\
&= \sum_{k \in [i-1,\infty) \cap [1, n+j-1]} y_{i,k} y_{k,j}^{[n-1]} \quad (\text{由于 } [i-n,\infty) \cap [1, n+j-1] = \emptyset) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

从而, 当 $\forall n \geqslant 3$ 时, 引理的结论成立. □

这个引理允许对于 $n \geqslant 2$, 将 $\boldsymbol{Y}^n = (y_{i,j}^{[n]})_{i \geqslant 1, j \geqslant 1}$ 表示为

$$
y_{i,j}^{[n]} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n+j-1} y_{i,k} y_{k,j}^{[n-1]}, & 1 \leqslant i \leqslant 2, j \geqslant 1, \\ \sum_{k=i-1}^{n+j-1} y_{i,k} y_{k,j}^{[n-1]}, & i \geqslant 3, j-i \geqslant -n, \\ 0, & i \geqslant 3, j-i \leqslant -(n+1). \end{cases} \tag{8.1.25}
$$

引理 8.1.4 对任何整数 $n \geqslant 2$, $y_{i,j}^{[n]}$ $(i \geqslant 1, j \geqslant 1)$ 仅由 $\{y_{i,1}^{[n]} | 2 \leqslant i \leqslant n+1\}$ 和 $\{y_{1,j}^{[n]} | j \geqslant 1\}$ 确定.

证明 当 $n=1$ 时, 由式 (8.1.23) 知, 对任何整数 $s \geqslant 1$, 有 $y_{i+s,j+s} = y_{(j+s)-(i+s)+2} = y_{j-i+2} = y_{i,j}$. 为简便, 称具有这种性质的矩阵满足斜移性. 容易证明, 两个满足斜移性矩阵的积也满足斜移性. 因此, $\boldsymbol{Y}^2$ 满足斜移性, 即对任何整数 $s \geqslant 0$, $y_{i+s,j+s}^{[2]} = y_{i,j}^{[2]}$. 进而, 对任何整数 $n \geqslant 3$, $\boldsymbol{Y}^n$ 满足斜移性, 即对任何整数 $s \geqslant 0$, $y_{i+s,j+s}^{[n]} = y_{i,j}^{[n]}$. 由斜移性和引理 8.1.3, 即可得引理的结论. □

基于这个引理, 对于任何整数 $n \geqslant 1$, 可以令

$$
y_k^{[n]} = \begin{cases} y_{n-k+2,1}^{[n]}, & 1 \leqslant k \leqslant n, \\ y_{1,n-k+2}^{[n]}, & k \geqslant n+1. \end{cases} \tag{8.1.26}
$$

反之, 对于任何整数 $i, j \geqslant 1$,

$$
y_{i,j}^{[n]} = \begin{cases} y_{j-i+2}^{[n]}, & j-i \geqslant -n, \\ 0, & j-i \leqslant -(n+1). \end{cases} \tag{8.1.27}
$$

注意: ① 因为 $y_{i,j}^{[1]}=y_{i,j}$, 所以当 $n=1$ 时, 式 (8.1.27) 就变为式 (8.1.23); ② 对于任何整数 $n\geqslant 1$, 有 $y_1^{[n]}=y_1^n$, 对于 $n\geqslant 2$, 有 $y_2^{[n]}=ny_1^{n-1}y_2$.

从式 (8.1.24), 可知

$$\tau_1=y_1\Big(\sum_{n\geqslant 0}y_{1,1}^{[n]}\Big)=y_1\Big(\sum_{n\geqslant 0}y_n^{[n]}\Big), \tag{8.1.28}$$

其中 $y_0^{[0]}=1$.

定理 8.1.4 对于方程式 (8.1.1) 解中的 F_n $(n\geqslant 1)$, 有

$$F_n=y_1\sum_{i=1}^{n-1}y_{i+1}y_{n-i}^{[n-2]}. \tag{8.1.29}$$

证明 因为 Y^n $(n\geqslant 1)$ 的每一个非 0 元都是一个 n 次齐多项式, 故所有 $y_i^{[n]}$ $(i\geqslant 1)$ 全是 n 次齐多项式. 因为 τ_1 是方程式 (8.1.1) 的一个解, 所以在式 (8.1.28) 中, $y_1y_{n-i}^{[n-2]}$ 是 τ_1 的 $n+1$ 次齐项部分. 由解的唯一性, 知 $F_n=y_1y_{n-1}^{[n-1]}$. 从式 (8.1.25) 和式 (8.1.27), 即可得定理的结论. □

推论 8.1.3 对于任何整数 $n\geqslant 1$, 有

$$\partial_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{i}}F_n=\frac{(n-1)!}{\boldsymbol{i}!}, \tag{8.1.30}$$

其中 $|\boldsymbol{i}|=n$.

证明 由定理 8.1.3 和定理 8.1.1, 即得欲证的结论. □

例 8.1.3 介子泛函方程

$$\begin{cases} f-y_1-1=\displaystyle\int_y\frac{y^2f-y^2}{1+y-yf}, \\ f|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=1 \end{cases} \tag{8.1.31}$$

在 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 中有且仅有一个解; 而且, 这个解就是 $f=f_{\text{planted}}+1$, 其中 f_{planted} 为方程式 (8.1.1) 的解.

8.2 普 树 型

在文献[22,24] 中, 可以见到方程

$$\begin{cases} f = 1 + x\int_y \big(y\delta_{x,y}(uf|_{x=u})\big), \\ f|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = 1, \end{cases} \tag{8.2.1}$$

其中 $f \in \mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$. 注意, 与原方程的不同之处系那里之误.

为叙述方便, 令 $F_m(\boldsymbol{y}) = \partial_x^m f\ (m \geqslant 0)$, $\mathrm{id}(\boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{n}|$, 其中 $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, \cdots)$, 即 $\boldsymbol{y}$ 的幂向量, $|\boldsymbol{n}| = n_1 + n_2 + \cdots$. 对于整数 $n \geqslant 0$, 记

$$F_{m,n} = F_m(\boldsymbol{y})|_{\mathrm{id}(\boldsymbol{y})=n}\Big(= \sum_{|\boldsymbol{n}|=n} F_{m,\boldsymbol{n}}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}\Big),$$

或称 $F_{m,n}$ 是 $F_m(\boldsymbol{y})$ 中 $\boldsymbol{y}$ 的所有 n 次项之和的一个 n 次齐多项式.

由此可见

$$f = \sum_{m\geqslant 0} F_m(\boldsymbol{y})x^m. \tag{8.2.2}$$

因为

$$\begin{aligned} \delta_{x,y}(uf|_{x=u}) &= \frac{xf - yf|_{u=y}}{x-y} \\ &= \frac{x\sum\limits_{m\geqslant 0} F_m(\boldsymbol{y})x^m - y\sum\limits_{m\geqslant 0} F_m(\boldsymbol{y})y^m}{x-y} \quad \text{(在分子中, 提出公共部分)} \\ &= \sum_{m\geqslant 0} F_m(\boldsymbol{y})\frac{x^{m+1} - y^{m+1}}{x-y}, \end{aligned}$$

以及

$$x^{m+1} - y^{m+1} = (x-y)\Big(\sum_{i=0}^{m} x^i y^{m-i}\Big),$$

所以

$$\begin{aligned} \delta_{x,y}(uf|_{x=u}) &= \sum_{m\geqslant 0} F_m(\boldsymbol{y})\Big(\sum_{i=0}^{m} x^i y^{m-i}\Big) = \sum_{i\geqslant 0}\sum_{m\geqslant i} F_m(\boldsymbol{y})y^{m-i}x^i \\ &= \sum_{m\geqslant 0}\Big(\sum_{i\geqslant m} F_i(\boldsymbol{y})y^{i-m}\Big)x^m, \end{aligned}$$

从而

$$\int_y y\delta_{x,y}(uf|_{x=u}) = \sum_{m\geqslant 0}\Big(\sum_{i\geqslant m} F_i(\boldsymbol{y})y_{i-m+1}\Big)x^m.$$

由方程 (8.2.1) 的第一式, 得

$$\begin{aligned} f &= 1+\sum_{m\geqslant 0}\Big(\sum_{i\geqslant m} F_i(\boldsymbol{y})y_{i-m+1}\Big)x^{m+1} \quad (\text{用 } m \text{ 代替 } m+1) \\ &= 1+\sum_{m\geqslant 1}\Big(\sum_{i\geqslant m-1} F_i(\boldsymbol{y})y_{i-m+2}\Big)x^m. \end{aligned} \tag{8.2.3}$$

在式 (8.2.2) 和式 (8.2.3) 的基础上, 即可导出

$$x^0: F_0(\boldsymbol{y}) = 1 \text{ (即方程式 (8.2.1) 的始条件)}, \tag{8.2.4}$$

$$\begin{aligned} x^1: F_1(\boldsymbol{y}) &= \sum_{i\geqslant 0} y_{i+1}F_i(\boldsymbol{y}) \\ &= y_1F_0(\boldsymbol{y})+y_2F_1(\boldsymbol{y})+y_3F_2(\boldsymbol{y})+y_4F_3(\boldsymbol{y})+\cdots, \end{aligned} \tag{8.2.5}$$

$$\begin{aligned} x^2: F_2(\boldsymbol{y}) &= \sum_{i\geqslant 1} y_iF_i(\boldsymbol{y}) \\ &= y_1F_1(\boldsymbol{y})+y_2F_2(\boldsymbol{y})+y_3F_3(\boldsymbol{y})+y_4F_4(\boldsymbol{y})+\cdots, \end{aligned} \tag{8.2.6}$$

$$\begin{aligned} x^3: F_3(\boldsymbol{y}) &= \sum_{i\geqslant 2} y_{i-1}F_i(\boldsymbol{y}) \\ &= y_1F_2(\boldsymbol{y})+y_2F_3(\boldsymbol{y})+y_3F_4(\boldsymbol{y})+y_4F_5(\boldsymbol{y})+\cdots, \end{aligned} \tag{8.2.7}$$

$$\begin{aligned} x^4: F_4(\boldsymbol{y}) &= \sum_{i\geqslant 3} y_{i-2}F_i(\boldsymbol{y}) \\ &= y_1F_3(\boldsymbol{y})+y_2F_4(\boldsymbol{y})+y_3F_5(\boldsymbol{y})+y_4F_6(\boldsymbol{y})+\cdots, \end{aligned} \tag{8.2.8}$$

等等. 通过在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上的等价变换, 即得

$$\begin{aligned} x^1: F_1(\boldsymbol{y}) &= \sum_{i\geqslant 0, i\neq 1} \frac{y_{i+1}}{1-y_2}F_i(\boldsymbol{y}) \\ &= \frac{y_1}{1-y_2}F_0(\boldsymbol{y})+\frac{y_3}{1-y_2}F_2(\boldsymbol{y})+\frac{y_4}{1-y_2}F_3(\boldsymbol{y})+\cdots, \end{aligned} \tag{8.2.9}$$

$$\begin{aligned} x^2: F_2(\boldsymbol{y}) &= \sum_{i\geqslant 1, i\neq 2} \frac{y_i}{1-y_2}F_i(\boldsymbol{y}) \\ &= \frac{y_1}{1-y_2}F_1(\boldsymbol{y})+\frac{y_3}{1-y_2}F_3(\boldsymbol{y})+\frac{y_4}{1-y_2}F_4(\boldsymbol{y})+\cdots, \end{aligned} \tag{8.2.10}$$

$$\begin{aligned} x^3: F_3(\boldsymbol{y}) &= \sum_{i\geqslant 2, i\neq 3} \frac{y_{i-1}}{1-y_2}F_i(\boldsymbol{y}) \\ &= \frac{y_1}{1-y_2}F_2(\boldsymbol{y})+\frac{y_3}{1-y_2}F_4(\boldsymbol{y})+\frac{y_4}{1-y_2}F_5(\boldsymbol{y})+\cdots, \end{aligned} \tag{8.2.11}$$

$$x^4: F_4(\boldsymbol{y}) = \sum_{i\geqslant 3, i\neq 4} \frac{y_{i-2}}{1-y_2} F_i(\boldsymbol{y})$$
$$= \frac{y_1}{1-y_2} F_3(\boldsymbol{y}) + \frac{y_3}{1-y_2} F_5(\boldsymbol{y}) + \frac{y_4}{1-y_2} F_6(\boldsymbol{y}) + \cdots, \tag{8.2.12}$$

以及对于任何整数 $m \geqslant 5$,

$$x^m: F_m(\boldsymbol{y}) = \frac{y_1}{1-y_2} F_{m-1}(\boldsymbol{y}) + \sum_{i\geqslant m+1} \frac{y_{i-m+2}}{1-y_2} F_i(\boldsymbol{y}). \tag{8.2.13}$$

下面, 对任何整数 $m \geqslant 1$, 为确定 $F_{m,n}$ $(n \geqslant 1)$ 作些理论准备. 令 $\min(F_m(\boldsymbol{y}))$ 为 $F_m(\boldsymbol{y})$ 所有系数非 0 项的 $\boldsymbol{y}$ 的幂中的最小者.

引理 8.2.1 给定整数 $m \geqslant 1$. 对于任何整数 $n \geqslant 1$, 如果 $n \leqslant m-1$, 则 $F_{m,n} = 0$.

证明 由方程式 (8.2.1) 的始条件, 有 $F_{m,0} = 0$ $(m \geqslant 1)$. 因为 $\min(F_i(\boldsymbol{y})) = i$ $(i \geqslant 1)$, 由式 (8.2.9), $\min(F_1(\boldsymbol{y})) = \min(y_1/(1-y_2)) = 1$. 对于 $m = 2$, 由式 (8.2.10), $\min(F_2(\boldsymbol{y})) = \min(y_1 F_1(\boldsymbol{y})) = 1 + \min(F_1(\boldsymbol{y})) = 2$. 从而, $F_{m,j} = 0$ $(0 \leqslant j \leqslant 1)$. 一般地, 假设对于 $2 \leqslant s \leqslant m-1$, 有 $F_{s,j} = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant m-2)$. 用归纳法, 往证对于 $s = m$, 有 $F_{m,j} = 0$ $(0 \leqslant j \leqslant m-1)$. 从归纳假设知 $\min(F_{m-1}(\boldsymbol{y})) = m-1$. 由式 (8.2.13), $\min(F_m(\boldsymbol{y})) = 1 + \min(F_{m-1}(\boldsymbol{y})) = 1 + (m-1) = m$. 从而, $F_{m,j} = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant m-1)$. □

从这个引理的证明过程可以看出, 对于任何整数 $m \geqslant 1$, $\min(F_m(\boldsymbol{y})) \geqslant m$.

引理 8.2.2 对于任何整数 m, $n \geqslant 1$, $F_{m,n} = y_1^m$ 当且仅当 $n = m$.

证明 当 $m = n = 1$ 时, 从引理 8.1.1 的证明中已经知道, $F_{1,1} = y_1$. 对于任何 $m = n \geqslant 2$ 时的情形, 假设对于任何 j $(1 \leqslant j \leqslant m-1)$, 有 $F_{j,j} = y_1^j$, 用归纳法, 往证 $F_{m,m} = y_1^m$. 由式 (8.2.13), $F_{m,m} = y_1 F_{m-1,m-1}$. 由归纳假设知 $F_{m-1,m-1} = y_1^{m-1}$, 从而有 $F_{m,m} = y_1 y_1^{m-1} = y_1^m$. 考虑到 $F_{m,m}$ 是 $F_m(\boldsymbol{y})$ 中 m 次齐项部分, 以及这个齐 m 次多项式的唯一性, 即得引理的结论. □

上面两个引理所处理的都是低次项的情形, 下面的引理则是讨论式 (8.2.13) 中无上限求和的高次项.

引理 8.2.3 对于任何整数 m, $n (n \geqslant m \geqslant 1)$, $F_{m,n}$ 与所有 y_i $(i \geqslant n-m+2)$ 无关.

证明 因为式 (8.2.13) 等价于

$$F_m(\boldsymbol{y}) = \sum_{i\geqslant m-1} y_{i-m+2} F_i(\boldsymbol{y}),$$

所以对于任何整数 $n \geqslant m-1$,

$$F_{m,n} = \sum_{i \geqslant m-1} y_{i-m+2} F_{i,n-1} \quad (\text{由 } F_{i,n-1}\ (i \geqslant n) \text{ 和引理 8.2.1})$$
$$= \sum_{i=m-1}^{n-1} y_{i-m+2} F_{i,n-1}.$$

在此基础上, 对于较小的整数 m 和 n, 可以验证 $F_{m,n}$ 满足引理的结论. 对于一般情形, 假若 $F_{i,n-1}$ $(m-1 \leqslant i \leqslant n-1)$ 满足引理的结论, 对 n 用归纳法. 因为 y_{i-m+2} $(m-1 \leqslant i \leqslant n-1)$ 不含 y_i $(i \geqslant n-m+2)$, 所以 $F_{m,n}$ 与所有 y_i $(i \geqslant n-m+2)$ 无关. □

在以上三个引理的基础上, 对于整数 $m, n \geqslant 1$, 我们按 $m+n \geqslant 2$ 由小到大, 然后 m 由大到小的次序, 确定 $F_{m,n}$. 例如, $m+n=2$: $F_{1,1}$; $m+n=3$: $F_{2,1}$, $F_{1,2}$; $m+n=4$: $F_{3,1}$, $F_{2,2}$, $F_{1,3}$; $m+n=5$: $F_{4,1}$, $F_{3,2}$, $F_{2,3}$, $F_{1,4}$; 等等. 由引理 8.2.1, 有 $F_{2,1}=0$, $F_{3,1}=0$, 以及 $F_{4,1}=F_{3,2}=0$. 为方便, 对任何函数 $g \in \mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$, 记 $[g]_n$ 为函数 g 中的 n 次齐多项式.

利用式 (8.2.9) 由引理 8.2.1 和 $[(1-y_2)^{-1}]_0 = 1$, 可知右端的一次项为 $y_1 F_{0,0}$. 由始条件, $F_{0,0}=1$. 从而, 当 $n=1$ 时, 只有 $F_{1,1}=y_1$. 这是 $m+n=2$ 时的情形.

当 $m+n=3$ 时, 只需求 $F_{1,2}$. 由式 (8.2.9),

$$F_{1,2} = y_1 F_{0,0}[(1-y_2)^{-1}]_1 = y_1 y_2.$$

当 $m+n=4$ 时, 要求 $F_{1,3}$ 和 $F_{2,2}$. 由引理 8.2.2, $F_{2,2}=y_1^2$, 只剩下 $F_{1,3}$. 由式 (8.2.9),

$$F_{1,3} = y_1 F_{0,0}[(1-y_2)^{-1}]_2 + y_3 F_{2,2}[(1-y_2)^{-1}]_0 = y_1 y_2^2 + y_3 y_1^2.$$

当 $m+n=5$ 时, 要求 $F_{1,4}$ 和 $F_{2,3}$. 在上面三个引理的基础上, 由式 (8.2.10), 先求

$$F_{2,3} = y_1[(1-y_2)^{-1} F_1(\boldsymbol{y})]_2 \quad (\text{由于 } F_{1,1}=y_1,\ F_{1,2}=y_1 y_2)$$
$$= 2y_1^2 y_2.$$

然后, 由式 (8.2.9), 求

$$F_{1,4} = y_1[(1-y_2)^{-1}]_3 + y_3[(1-y_2)^{-1}(F_{2,2}+F_{2,3})]_3 + y_4 F_{3,3}$$
$$= y_1 y_2^3 + 3y_1^2 y_2 y_3 + y_4 y_1^3.$$

一般地, 对于任何整数 $m+n \geqslant 5$, 由式 (8.2.9) 和引理 8.2.3, 有

$$F_{m,n} = y_1\left[\frac{F_{m-1}(\boldsymbol{y})}{1-y_2}\right]_{n-1} + \sum_{i=m+1}^{n+m-2} y_{i-m+2}\left[\frac{F_i(\boldsymbol{y})}{1-y_2}\right]_{n-1}$$

$$= y_1 \sum_{l=0}^{n-m} y_2^l F_{m-1,n-1-l} + \sum_{i=m+1}^{n+m-2} y_{i-m+2} \sum_{l=0}^{n-i-1} y_2^l F_{i,n-1-l}. \tag{8.2.14}$$

定理 8.2.1 方程式 (8.2.1) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中有且仅有一个解.

证明 从式 (8.2.4) ~ 式 (8.2.14) 的过程可知, 所得到的 $F_{m,n}$ $(m,n \geqslant 0)$ 确定了方程式 (8.2.1) 的一个解. 考虑到这个过程在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上的唯一性, 这个解是仅有的. □

对于任何 $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}$, 记

$$\pi(\boldsymbol{n}) = \sum_{i=1}^{n} in_i.$$

引理 8.2.4 对于任何整数 m, $n \geqslant 1$, $F_{m,n}$ 有 $|\mathcal{N}_{m,n}|$ 项, 其中

$$\mathcal{N}_{m,n} = \left\{\boldsymbol{n} \geqslant \boldsymbol{0} \,\middle|\, |\boldsymbol{n}| = n, \pi(\boldsymbol{n}) = 2n - m\right\}. \tag{8.2.15}$$

证明 首先, 可以验证, 对于 $2 \leqslant m+n \leqslant 5$, 上面求得的 $F_{m,n}$ 的任何一项的幂向量 $\boldsymbol{n}$ 都满足 $\pi(\boldsymbol{n}) = 2n - m$. 因此, 可以记 $\pi(F_{m,n}) = 2n - m$. 假若对于 $1 \leqslant j \leqslant n-1$, $\pi(F_{i,j}) = 2j - i$, 则根据式 (8.2.14), 由

$$\begin{aligned}
\pi(y_1 y_2^l F_{m-1,n-1-l}) &= 1 + 2l + 2(n-1-l) - (m-1) \\
&= 1 + 2(n-1) - (m-1) \\
&= 2n - m, \\
\pi(y_{i-m+2} y_2^l F_{i,n-1-l}) &= (i-m+2) + 2l + 2(n-1-l) - i \\
&= (-m+2) + 2(n-1) \\
&= 2n - m,
\end{aligned}$$

就有 $\pi(F_{m,n}) = 2n - m$.

另一方面, 如果存在 $\boldsymbol{n} \notin \mathcal{N}_{m,n}$, $|\boldsymbol{n}| = n$ 是 $F_{m,n}$ 某项的幂向量, 则必有 $\pi(F_{m,n}) = \pi(\boldsymbol{n}) \neq 2n - m$, 与 $\pi(F_{m,n}) = 2n - m$ 矛盾. □

这个引理告诉我们, 对于任何整数 m, $n \geqslant 1$, $F_{m,n}$ 是一个 n 次齐 $|\mathcal{N}_{m,n}|$ 项式. 令

$$\sigma_n(x) = \Big(\sum_{i \geqslant 1} y_i x^i\Big)^n,$$

记

$$\mathcal{L}_{2n-m} = \left\{\boldsymbol{i} \,\middle|\, \partial_x^{2n-m}\sigma_n(x) \text{ 中 } \boldsymbol{y} \text{ 的幂向量使得 } n_j = 0 \ (j \geqslant i+1)\right\}.$$

引理 8.2.5 任给整数 $m,n\geqslant 1$, 有 $\mathcal{N}_{m,n}=\mathcal{L}_{2n-m}$, 其中 $n=|\boldsymbol{n}|$.

证明 首先, 对于任何 $\boldsymbol{i}\in\mathcal{L}_{2n-m}$, 由

$$\sum_{j\geqslant 1} ji_j = 2n-m,$$

以及 $|\boldsymbol{i}|=n$, 即可知 $\boldsymbol{i}\in\mathcal{N}_{m,n}$.

然后, 对于任何 $\boldsymbol{n}\in\mathcal{N}_{m,n}$, 由 $|\boldsymbol{n}|=n$, 可得

$$\sum_{i\geqslant 1} in_i = 2n-m,$$

从而也有 $\boldsymbol{n}\in\mathcal{L}_{2n-m}$. □

事实上, 引理 8.2.5 意味着, 对于任何整数 $n\geqslant m\geqslant 1$, $F_{m,n}=\partial_x^{2n-m}\sigma_n(x)$.

引理 8.2.6 任给整数 $m,n\geqslant 1$, 有

$$F_{m,n}=\frac{1}{n}\partial_x^{2n-m}\sigma_n(x)=\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathcal{L}_{2n-m}}\frac{n!}{n\boldsymbol{i}!}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{i}}, \tag{8.2.16}$$

其中 $n=|\boldsymbol{i}|$.

证明 由引理 8.2.5 和函数 $\sigma_n(x)$ 的形式, 即可得定理的结论. □

由此, 我们可直接导出方程式 (8.2.1) 的解, 使得所有系数都无和的显式.

定理 8.2.2 方程式 (8.2.1) 的解, 记为 f_{tree}, 有形式

$$\partial_x^m f_{\text{tree}}=\begin{cases}1, & m=0,\\ \displaystyle\sum_{n\geqslant m}\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{N}_{m,n}}\frac{n!}{n\boldsymbol{n}!}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}, & m\geqslant 1,\end{cases} \tag{8.2.17}$$

其中 $\mathcal{N}_{m,n}$ 由式 (8.2.15) 给出.

证明 由引理 8.2.5 和方程式 (8.2.1) 解的形式, 即得定理的结论. □

同时, 可以看出 $\partial_x^1 f_{\text{tree}}=f_{\text{planted}}$, 即方程式 (8.1.1) 的解.

例 8.2.1 平面树的点剖分. 令 m 和 $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3,\cdots)$ 分别为根顶点次和非根顶点剖分向量, 即 n_i $(i\geqslant 1)$ 是 i 次顶点的数目. 记 $P_{m,n}$ 为平面树根同构类的数目, 其中 $n=|\boldsymbol{n}|$, 棱的数目 (或者说, 度). 因为当 $0\leqslant m+n<2$ 时不足道, 这里仅以 $2\leqslant m+n\leqslant 5$ 时的情形为例.

当 $m+n=2$ 时, 只有 $P_{1,1}=y_1$. 已经由图 8.1.1 中的 a 给出.

当 $m+n=3$ 时, 有 $P_{2,1}=0$ $P_{1,2}=y_1y_2$. 后者由图 8.1.1 中的 b 给出.

当 $m+n=4$ 时, 有 $P_{3,1}=0$, $P_{2,2}$, $P_{1,3}=y_1^2y_2+y_1y_2^2$. 其中, $P_{1,3}$ 由图 8.1.1 中的 c 和 d 给出.

当 $m+n=5$ 时, 有 $P_{4,1}=0$, $P_{3,2}=0$, $P_{1,4}=y_1y_2^3+3y_1^2y_2y_3+y_4y_1^3$, $P_{2,3}$ 由下面给出. 其中, $P_{1,4}$ 由图 8.1.4 中的 a, b 和 c 给出.

剩下的 $P_{2,2}=y_1^2$ 和 $P_{2,3}=2y_1^2y_2$ 分别由图 8.2.1 中的 a 和 b 给出.

所有这些都显示 $P_{m,n}=F_{m,n}$.

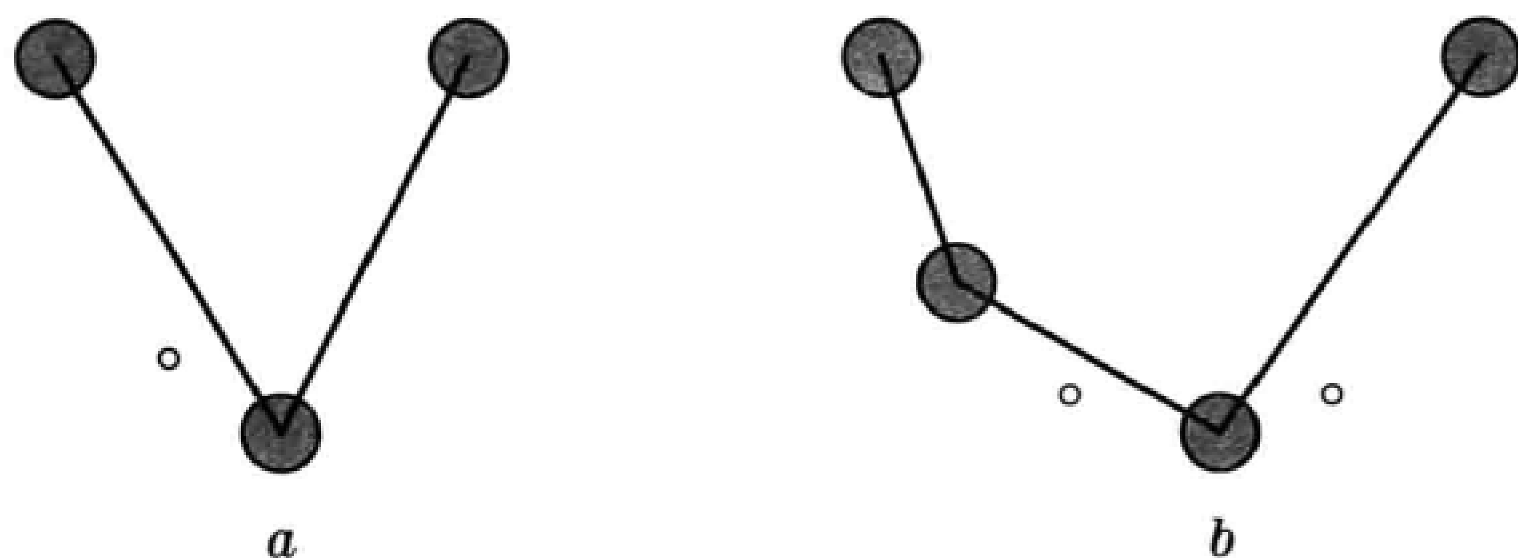


图 8.2.1 平面树按顶点剖分的根同构类

例 8.2.2 介子方程

$$\begin{cases} f=1+xf\int_y \left(yf|_{x=y}\right), \\ f|_{x=0,\boldsymbol{y}=\mathbf{0}}=1 \end{cases} \tag{8.2.18}$$

与方程 (8.2.1) 式在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中等价.

例 8.2.3 介子方程

$$\begin{cases} f=\left(1-x\int_y \left(yf|_{x=y}\right)\right)^{-1}, \\ f|_{x=0,\boldsymbol{y}=\mathbf{0}}=1 \end{cases} \tag{8.2.19}$$

与方程式 (8.2.1) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上等价.

例 8.2.4 平面瓣丛的根同构类. 瓣丛就是只有一个顶点的地图. 因为平面瓣丛是平面树的对偶, 平面瓣丛的面与平面树的顶点对应. 由例 8.2.1 可知, 方程式 (8.2.1) 的解也提供了平面瓣丛以根面次和非根面剖分向量为参数的根同构类数.

例 8.2.5 无穷维函数方程. 因为方程式 (8.2.1) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上与下面的函数

方程等价:

$$\begin{cases} f = a + \sum_{i\geqslant 1} x^{2-i} y_i [f]_{i-1}, \\ f|_{x=0\Rightarrow \boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = 1, \end{cases} \tag{8.2.20}$$

方程式 (8.2.18) 和方程式 (8.2.19) 也同样, 其中 $a \in \mathcal{R}_+$,

$$[f]_{i-1} = f - \sum_{j=0}^{i-2} x^j \partial_x^j f.$$

引理 8.2.7 对于任何整数 $m \geqslant 2$, 有

$$\partial_x^m f = (\partial_x^1 f)^m. \tag{8.2.21}$$

证明 令 $\mathcal{B}_l$ 为所有根面次为 l $(l \geqslant 1)$ 的平面瓣丛的集合. 因为 $\mathcal{B}_m$ 和 $\mathcal{B}_l \times \mathcal{B}_{m-1}$ 之间有一个双射, 故有 $\partial_x^m f = \partial_x^1 f \partial_x^{m-1} f$, 从而 $\partial_x^m f = (\partial_x^1 f)^m$. 因此, 引理的结论得证. □

由于 $\partial_x^1 f$ 是方程

$$\begin{cases} \tau = a + y_1 + \sum_{n\geqslant 2} y_n \tau^{n-1}, \\ \tau|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = 0 \end{cases} \tag{8.2.22}$$

的解, 由始条件, $a = 0$, 有

$$\tau = y_1 + \sum_{n\geqslant 2} y_n \tau^{n-1}.$$

由此, 即可用 Lagrange 反演求出 τ 的系数无和的显式, 以及所有 τ^m $(m \geqslant 2)$ 的系数无和显式[22,25,60].

事实上, τ 就是式 (8.2.17) 中 $m = 1$ 时的情形, 即 $\tau = f_{\text{planted}}$.

8.3 单 圈 型

在文献 [22,24] 中, 可以见到方程

$$\begin{cases} f = x^2 f_{\text{tree}} + x \int_y (y \partial_{x,y} f|_{x=u}), \\ f|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = 0, \end{cases} \tag{8.3.1}$$

其中 f_{tree} 已由式 (8.2.17) 给出.

为叙述方便, 令 $F_m(\boldsymbol{y})=\partial_x^m f(m\geqslant 0)$, $\text{id}(\boldsymbol{y})=|\boldsymbol{n}|$, 其中 $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3,\cdots)$, 即 $\boldsymbol{y}$ 的幂向量, $|\boldsymbol{n}|=n_1+n_2+n_3+\cdots$. 对于整数 $n\geqslant 0$, 记

$$F_{m,n}=F_m(\boldsymbol{y})|_{\text{id}(\boldsymbol{y})=n}\ \Big(=\sum_{|\boldsymbol{n}|=n}F_{m,\boldsymbol{n}}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}\Big),$$

或称 $F_{m,n}$ 是 $F_m(\boldsymbol{y})$ 中 $\boldsymbol{y}$ 的所有 n 次项的和的一个 n 次齐多项式.

由方程 (8.3.1) 的第二式, 即始条件, 有

$$F_0(\boldsymbol{y})=0. \tag{8.3.2}$$

由此可见

$$f=\sum_{m\geqslant 1}F_m(\boldsymbol{y})x^m. \tag{8.3.3}$$

因为

$$\begin{aligned}\partial_{x,y}(f|_{x=u})&=\frac{xf-yf|_{u=y}}{x-y}\quad (\text{由式 (8.3.3)})\\&=\frac{x\sum\limits_{m\geqslant 1}F_m(\boldsymbol{y})x^m-y\sum\limits_{m\geqslant 1}F_m(\boldsymbol{y})y^m}{x-y}\\&=xy\sum_{m\geqslant 1}F_m(\boldsymbol{y})\frac{x^{m-1}-y^{m-1}}{x-y},\\x^{m-1}-y^{m-1}&=(x-y)\Big(\sum_{i=0}^{m-2}x^iy^{m-i-2}\Big),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\partial_{x,y}(f|_{x=u})&=xy\sum_{m\geqslant 1}F_m(\boldsymbol{y})\Big(\sum_{i=0}^{m-2}x^iy^{m-i-2}\Big)\\&=\sum_{i\geqslant 0}\sum_{m\geqslant i+2}F_m(\boldsymbol{y})y^{m-i-1}x^{i+1}\\&=\sum_{m\geqslant 2}\Big(\sum_{i\geqslant m+2}F_i(\boldsymbol{y})y^{i-m-1}\Big)x^{m+1}\\&=\sum_{m\geqslant 3}\Big(\sum_{i\geqslant m+1}F_i(\boldsymbol{y})y^{i-m}\Big)x^m,\end{aligned}$$

从而

$$x\int_y y\delta_{x,y}(uf|_{x=u})=\sum_{m\geqslant 3}\Big(\sum_{i\geqslant m+1}F_i(\boldsymbol{y})y_{i-m+1}\Big)x^{m+1}$$

$$= \sum_{m \geqslant 4} \Big(\sum_{i \geqslant m} F_i(\boldsymbol{y}) y_{i-m+2} \Big) x^m.$$

因为

$$f_{\text{tree}} = 1 + \sum_{m \geqslant 1} \partial_x^m f_{\text{tree}} x^m$$

已经在定理 8.2.2 中给出, 若记 $T_m = \partial_x^m f_{\text{tree}}$ $(m \geqslant 1)$, 则由方程 (8.3.1) 的第一式, 得

$$\begin{aligned} f &= x^2 \Big(1 + \sum_{m \geqslant 1} \partial_x^m f_{\text{tree}} x^m \Big) + \sum_{m \geqslant 4} \Big(\sum_{i \geqslant m} F_i(\boldsymbol{y}) y_{i-m+2} \Big) x^m \\ &= x^2 + T_1 x^3 + \sum_{m \geqslant 4} \Big(T_{m-2} + \sum_{i \geqslant m} F_i(\boldsymbol{y}) y_{i-m+2} \Big) x^m. \end{aligned} \tag{8.3.4}$$

因为方程式 (8.3.4) 与方程式 (8.3.1) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上等价, 我们可以只考虑式 (8.3.4), 以确定方程式 (8.3.1) 的解 f.

引理 8.3.1 关于 $\{F_m | m \geqslant 0\}$, $F_m = F_m(\boldsymbol{y})$ 的方程组

$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 0, \\ F_m = T_{m-2} + \displaystyle\sum_{i \geqslant m} y_{i-m+2} F_i \quad (m \geqslant 2), \end{cases} \tag{8.3.5}$$

与方程式 (8.3.1) 等价, 其中 T_m $(m \geqslant 1)$ 已经由定理 8.2.2 给出.

证明 由方程组式 (8.3.5) 与式 (8.3.4) 等价、式 (8.3.4) 与方程式 (8.3.1) 等价, 即得欲证的结论. □

令 $F_{m,n} = F_m|_{n=|\boldsymbol{n}|} = [F_m]_n$ $(m \geqslant 2,\ n \geqslant 0)$. 由式 (8.3.5), 有

$$F_{m,n} = [T_{m-2}]_n + \sum_{i \geqslant m} y_{i-m+2} [F_i]_{n-1}. \tag{8.3.6}$$

引理 8.3.2 对于任何整数 $n \geqslant 0$, 有 $F_{m,n} = 0$ $(m \geqslant n+3)$.

证明 当 $n = 0$ 时, 由式 (8.3.6), 有

$$F_{m,0} = [T_0]_0 = \begin{cases} 1, & m = 2, \\ 0, & m > 3. \end{cases}$$

可见, 当 $m \geqslant n+3 = 0+3 = 3$ 时, $F_{m,0} = 0$.

对于 $n \geqslant 3$ 的一般情形, 假设 $F_{m,n-1} = 0$, $m \geqslant (n-1)+3 = n+2$. 用归纳法, 往证 $F_{m,n} = 0$ $(m \geqslant n+3)$. 由 $T_{m,n} = 0$ $(m \geqslant n+1)$, 有 $T_{m-2,n} = 0$ $(m-2 \geqslant n+1,$

即 $m \geqslant n+3$). 若 $m \geqslant n+3$, 则对于任何 $i \geqslant m$, $i \geqslant n+3 > (n-1)+3 = n+2$. 由归纳假设, $F_{i,n-1} = 0$ $(i \geqslant m)$. 由式 (8.3.6), 得 $F_{m,n} = 0$ $(m \geqslant n+3)$. □

根据这个引理, 允许我们对于任何一个给定的整数 $n \geqslant 0$, 只需确定 $F_{m,n}$ $(2 \leqslant m \leqslant n+2)$ 就够了; 而且, 我们可以将式 (8.3.6) 直接变为

$$\begin{aligned} F_{m,n} &= [T_{m-2}]_n + \sum_{i=m}^{n+1} y_{i-m+2}[F_i]_{n-1} \quad (\text{利用 } j = i-m) \\ &= [T_{m-2}]_n + \sum_{j=0}^{n-m+1} y_{j+2}[F_{j+m}]_{n-1}. \end{aligned} \tag{8.3.7}$$

引理 8.3.3 给定整数 $m \geqslant 2$. 对于任何整数 $n \geqslant 0$, $F_{m,n}$ 与 y_i $(i \geqslant n+2)$ 无关.

证明 首先, 可以检验, 对于 $n = 0, 1$, $F_{m,n}$ 与 y_i $(i \geqslant n+2)$ 无关. 然后, 一般地, 对于 $n \geqslant 2$, 假设 $F_{m,l}$ $(l \leqslant n-1)$ 与 y_i $(i \geqslant l+2)$ 无关. 往证 $F_{m,n}$ 与 y_i $(i \geqslant n+2)$ 无关. 因为 $T_{m-2,n} = [\partial_x^{m-2} f_{\text{tree}}]_n$, 由式 (8.2.17), $T_{m-2,n}$ 与 y_i $(i \geqslant n+1)$ 无关. 由归纳假设, $F_{j+m,n-1}$ $(0 \leqslant j \leqslant n-m+1)$ 与 y_i $(i \geqslant n+1)$ 无关. 因为在式 (8.3.7) 的求和项中有 y_{n+1}, 所以 $F_{m,n}$ 与 y_i $(i \geqslant n+2)$ 无关. □

由此, 对于给定的整数 $n \geqslant 1$, $F_{m,n}$ 是有限向量 $\boldsymbol{y}_{n+1}$ 的一个 n 次齐多项式.

引理 8.3.4 对于任何整数 $n \geqslant 1$, $m = n+2$, 有 $F_{m,n} = y_1^n$.

证明 由式 (8.3.7), $F_{n+2,n} = [T_n]_n$. 由式 (8.2.17), $[T_n]_n = [\partial_x^n f_{\text{tree}}]_n = y_1^n$ $(n \geqslant 1)$. 由此即得欲证的结论. □

根据式 (8.3.5), 只需讨论它的第二式. 又这个第二式与式 (8.3.7) 等价, 故只需讨论式 (8.3.7). 从式 (8.3.7) 和引理 8.3.4 可以看出, 对任何给定的整数 $n \geqslant 1$, 只需确定 $F_{m,n}$ $(2 \leqslant m \leqslant n+1)$ 这 n 个函数. 事实上, 它们都是 $\boldsymbol{y}$ 的 n 次齐多项式.

当 $n = 1$ 时, 只求 $F_{2,1}$. 由式 (8.3.7),

$$\begin{aligned} F_{2,1} &= [T_0]_1 + y_2[F_2]_0 \quad ([T_0]_1 = 0(\text{定理 } 8.2.2),\ [F_2]_0 = 1(\text{引理 } 8.3.4)) \\ &= 0 + y_2 = y_2. \end{aligned} \tag{8.3.8}$$

当 $n = 2$ 时, 只求 $F_{3,2}$ 和 $F_{2,2}$. 由式 (8.3.7),

$$F_{3,2} = [T_1]_2 + y_2[F_3]_1 = y_1y_2 + y_1y_2 = 2y_1y_2, \tag{8.3.9}$$

$$F_{2,2} = [T_0]_2 + y_2[F_2]_1 + y_3[F_3]_1 = y_2^2 + y_2y_3. \tag{8.3.10}$$

当 $n=3$ 时, 只求 $F_{4,3}$, $F_{3,3}$ 和 $F_{2,3}$. 由式 (8.3.7),

$$F_{4,3}=[T_2]_3+y_2[F_4]_2=2y_1^2y_2+y_2y_1^2=3y_1^2y_2, \tag{8.3.11}$$

$$\begin{aligned}F_{3,3}&=[T_1]_3+y_2[F_3]_2+y_3[F_4]_2\\&=(y_1y_2^2+y_1^2y_3)+y_2(2y_1y_2)+y_3(y_1^2)\\&=3y_1y_2^2+2y_1^2y_3,\end{aligned} \tag{8.3.12}$$

$$\begin{aligned}F_{2,3}&=[T_0]_3+y_2[F_2]_2+y_3[F_3]_2+y_4[F_4]_2\\&=y_2(y_2^2+y_2y_3)+y_3(2y_1y_2)+y_4(y_1^2)\\&=3y_1y_2y_3+y_2^3+y_1^2y_4.\end{aligned} \tag{8.3.13}$$

定理 8.3.1　方程式 (8.3.1) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中有且仅有一个解.

证明　由于依上述过程所得到的 $F_{m,n}\in\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 满足式 (8.3.7) 或方程组式 (8.3.5), 从方程式 (8.3.5) 与方程组式 (8.3.5) 等价知, 这些 $F_{m,n}\in\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 构成方程式 (8.3.5) 的一个解. 由方程式 (8.3.5) 与方程式 (8.3.1) 等价, 即知方程式 (8.3.1) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中有一个解. 进而, 由上述求 $F_{m,n}\in\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 的过程对于方程式 (8.3.1) 初值的唯一性, 这个解是仅有的. □

令 $\boldsymbol{y}_n=(y_1,y_2,y_3,\cdots,y_n)$, 则由引理 8.3.2 和引理 8.3.3, 对于任何整数 $n\geqslant 1$, 我们可以考虑 $F_{m,n}$ 为 $\boldsymbol{y}_{n+1}$ 的 n 次齐多项式, 记为 $\mathcal{J}(F_{m,n})$, 或简单地,

$$\mathcal{J}_{m,n}=\left\{\boldsymbol{i}_{n+1}\,\middle|\,\text{在 } F_{m,n} \text{ 中存在以 } \boldsymbol{i}_{n+1} \text{ 为幂向量的项}\right\}. \tag{8.3.14}$$

引理 8.3.5　对于任何整向量 $\boldsymbol{i}_{n+1}\in\mathcal{J}_{m,n}$, 有

$$\sum_{j=1}^{n+1} ji_j=2(n+1)-m.$$

证明　首先, 从式 (8.3.8) ~式 (8.3.13) 所得到的 $F_{m,n}$ $(m\geqslant 2)$, 可以验证, 对于 $n\leqslant 3$, 引理的结论成立.

然后, 对于 $n\geqslant 4$ 时的一般情形, 假设当 $l\leqslant n-1$ 时, 所有 $\boldsymbol{i}_{l+1}\in\mathcal{J}_{m,l}$, 满足引理的结论. 往证 $l=n$ 时的情形. 为方便, 对于向量 $\boldsymbol{i}=(i_1,i_2,i_3,\cdots)$, 记

$$\pi(\boldsymbol{i})=\sum_{j\geqslant 1} ji_j.$$

对于任何 $\boldsymbol{i}\in\mathcal{J}(T_{m,n})$, $\pi(\boldsymbol{i})=2n-m$. 由此即知 $\pi(T_{m-2,n})=2n-(m-2)=2(n+1)-m$. 由归纳假设, 对 $\forall\boldsymbol{i}\in\mathcal{J}(y_{j+2}F_{j+m,n-1})$, $\pi(\boldsymbol{i})=(j+2)+\pi(F_{j+m,n-1})=((j+2)+2n)-(j_m)=2(n+1)-m(0\leqslant j\leqslant n-m+1)$. 从而, 由式 (8.3.7), 对于

任何 $\boldsymbol{i}\in\mathcal{J}_{m,n}$, 有 $\pi(\boldsymbol{i})=2(n+1)-m$. 这就是欲证的结论. □

因为这个引理的结论不依赖 $\boldsymbol{i}_{n+1}$ 在 $\mathcal{J}_n$ 中的选择, 我们可以记

$$\pi(F_{m,n})=\sum_{j=1}^{n+1} ji^j \quad (\boldsymbol{i}_{n+1}\in\mathcal{J}_{m,n}), \tag{8.3.15}$$

即 $\pi(F_{m,n})=\pi(\boldsymbol{i}_{n+1})=2(n+1)-m$. 令

$$\lambda_n(z)=\Big(\sum_{j=1}^{n+1} y_j x^j\Big)^n, \tag{8.3.16}$$

记

$$\mathcal{I}_{2n-m+2}=\big\{\boldsymbol{i}\,\big|\,\text{在 }\partial_z^{2n-m+2}\lambda_n(z)\text{ 中存在以 }\boldsymbol{i}\text{ 为幂向量的项}\big\}. \tag{8.3.17}$$

引理 8.3.6 对于任何整数 $m\geqslant 2$, $n\geqslant 0$, 有

$$\mathcal{I}_{2n-m+2}=\big\{\boldsymbol{i}\geqslant\mathbf{0}\,\big|\,|\boldsymbol{i}|=n,\pi(\boldsymbol{i})=2n-m+2\big\}. \tag{8.3.18}$$

证明 对于任何 $\boldsymbol{i}\in\mathcal{I}_{2n-m+2}$, 由式 (8.3.17), 在 $\partial_z^{2n-m+2}\lambda_n(z)$ 中存在以 $\boldsymbol{i}$ 为幂向量的项, 从而 $|\boldsymbol{i}|=n$, $\pi(\boldsymbol{i})=2n-m+2$. 因此, 式 (8.3.18) 左端集合是右端集合的一个子集.

另一方面, 对于式 (8.3.18) 右端集合中的任何一个向量 $\boldsymbol{i}$, 因为 $(x\boldsymbol{y})^{\boldsymbol{i}}=\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{i}}x^{\pi(\boldsymbol{i})}$ 是 $\partial_z^{2n-m+2}\lambda_n(z)$ 中的一项, 所以 $\boldsymbol{i}\in\mathcal{I}_{2n-m+2}$. 因此式 (8.3.18) 右端集合是左端集合的一个子集. □

在这个引理的基础上, 我们将会容易地发现 $F_{m,n}$ 中幂指数向量集的结构.

引理 8.3.7 给定 $n\geqslant 3$. 当 $2\leqslant m\leqslant n+2$ 时, $F_{m,n}$ 与 y_i $(i\geqslant n-m+4)$ 无关.

证明 对于 $n=2,3,4$, 由式 (8.3.8) ~式 (8.3.13), 可以验证引理的结论. 对于 $n\geqslant 5$, 假设 $F_{m,n-1}$ 满足引理的结论, 即仅与 y_i $(1\leqslant i\leqslant (n-1)-m+3=n-m+2)$ 有关. 往证, $F_{m,n}$ 只与 y_i $(1\leqslant i\leqslant n-m+3)$ 有关. 令 $\delta(F)=\max\{i|y_i\text{ 与 }F\text{ 有关}\}$. 在式 (8.3.7) 的基础上, 只需确定

$$\max\Big\{\delta(T_{m-2,n}),\delta\Big(\sum_{j=0}^{n-m+1} y_{j+2}F_{j+m,n-1}\Big)\Big\}.$$

从 8.2 节的讨论可知, $T_{m-2,n}$ 至少与所有 y_i $(i\geqslant n-m+4)$ 无关. 用归纳假设, 因为

$$\delta(y_{n-m+3}F_{n+1,n-1})=\max\big\{\delta(y_{j+2}F_{j+m,n-1})\,\big|\,0\leqslant j\leqslant n-m+1\big\},$$

所以 $\delta(\Sigma)=n-m+3$. 从而, $\delta(F_{m,n})=n-m+3$, 即 $F_{m,n}$ 与 y_i $(i\geqslant n-m+4)$ 无关. □

这个引理使我们能够以对 n 递推的方式构造集合 $\{\boldsymbol{i}\geqslant \mathbf{0}\,\big|\,|\boldsymbol{i}|=n,\pi(\boldsymbol{i})=2n-m+2\}$.

引理 8.3.8 对于任何整数 $m\geqslant 2$, $n\geqslant 0$, 有 $\mathcal{J}_{m,n}=\mathcal{I}_{2n-m+2}$.

证明 令 $\mathcal{A}$ 为式 (8.3.18) 右端的集合. 由引理 8.3.6, 只需证明 $\mathcal{J}_{m,n}=\mathcal{A}$.

首先, 任给一个向量 $\boldsymbol{i}\in\mathcal{J}_{m,n}$. 往证 $\boldsymbol{i}\in\mathcal{A}$. 由式 (8.3.14), $\boldsymbol{i}$ 是 $F_{m,n}$ 一项幂指标向量. 因为 $F_{m,n}$ 是一个 n 次齐多项式, 故 $|\boldsymbol{i}|=n$. 由引理 8.3.5, $\pi(\boldsymbol{i})=2(n+1)-m$. 从而, $\boldsymbol{i}\in\mathcal{A}$.

然后, 任给一个向量 $\boldsymbol{i}\in\mathcal{A}$. 往证 $\boldsymbol{i}\in\mathcal{J}_{m,n}$. 从引理 8.3.7 所证明的过程, 即可以推导出也有 $\boldsymbol{i}\in\mathcal{J}_{m,n}$. □

由这个引理可知, $F_{m,n}$ 和 $\partial_z^{2n-m+2}\lambda_n(z)$ 相应项之间只差一个仅依赖 $\boldsymbol{i}\in\mathcal{I}_{2n-m+2}$ 的常数. 因此, 对于任何整数 $m\geqslant 2$ 和 $n\geqslant 2$, 可以记

$$F_{m,n}=\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathcal{I}_{2n-m+2}}\alpha_{m,n}(\boldsymbol{i})\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{i}}. \tag{8.3.19}$$

定理 8.3.2 方程式 (8.3.1) 的解由系数无和项

$$F_{m,n}-T_{m-2,n}=\begin{cases}0, & m=0,1,n\geqslant 0,\\ 1, & m=2,n=0,\\ y_1, & m=3,n=1,\\ y_2, & m=2,n=1,\\ \displaystyle\sum_{j=0}^{n-m+1}y_{j+2}\Big(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathcal{I}_{2n-m-j}}\alpha_{j+m,n-1}(\boldsymbol{i})\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{i}}\Big), & n+2\geqslant m\geqslant 2,n\geqslant 2\end{cases} \tag{8.3.20}$$

确定.

证明 由式 (8.3.5)、式 (8.3.8) 和式 (8.3.19) 即可导出欲证的结论. □

虽然式 (8.3.20) 在表示上简单, 还是基于式 (8.3.7) 并沿用式 (8.3.8) ~式 (8.3.13) 的过程, 但便于计算, 而且, 随之可求出式 (8.3.20) 中的系数 $\alpha_{m,n}(\boldsymbol{i})$.

例 8.3.1 单圈地图的点剖分. 一个地图称为单圈的, 是指它的基础图有且仅有一个圈. 为讨论根同构类, 规定根在这个圈上的一条棱的外侧上. 考虑给定

$$(m;\boldsymbol{i})=(\text{根点次; 非根顶点剖分向量})$$

的根同构类.

在图 8.3.1 中,

$a = y_2$： $F_{2,1} = y_2$;

$b = y_1y_2$, cy_1y_2： $F_{3,2} = 2y_1y_2$;

$d = y_2^2$, $e = y_1y_3$： $F_{2,2} = y_2 + y_1y_3$;

$f = 2y_1^2y_2$, $g = y_1^2y_2$： $F_{4,3} = 3y_1^2y_2$;

$h = y_1y_2^2$, $i = y_1y_2^2$, $j = y_1y_2^2$, $k = y_1^2y_3$, $l = y_1^2y_3$： $F_{3,3} = 3y_1y_2^2 + 2y_1^2y_3$;

$m = 2y_1y_2y_3$, $n = y_1y_2y_3$, $o = y_2^3$, $p = y_1^2y_4$： $F_{2,3} = 32y_1y_2y_3 + y_2^3 + y_1^2y_4$.

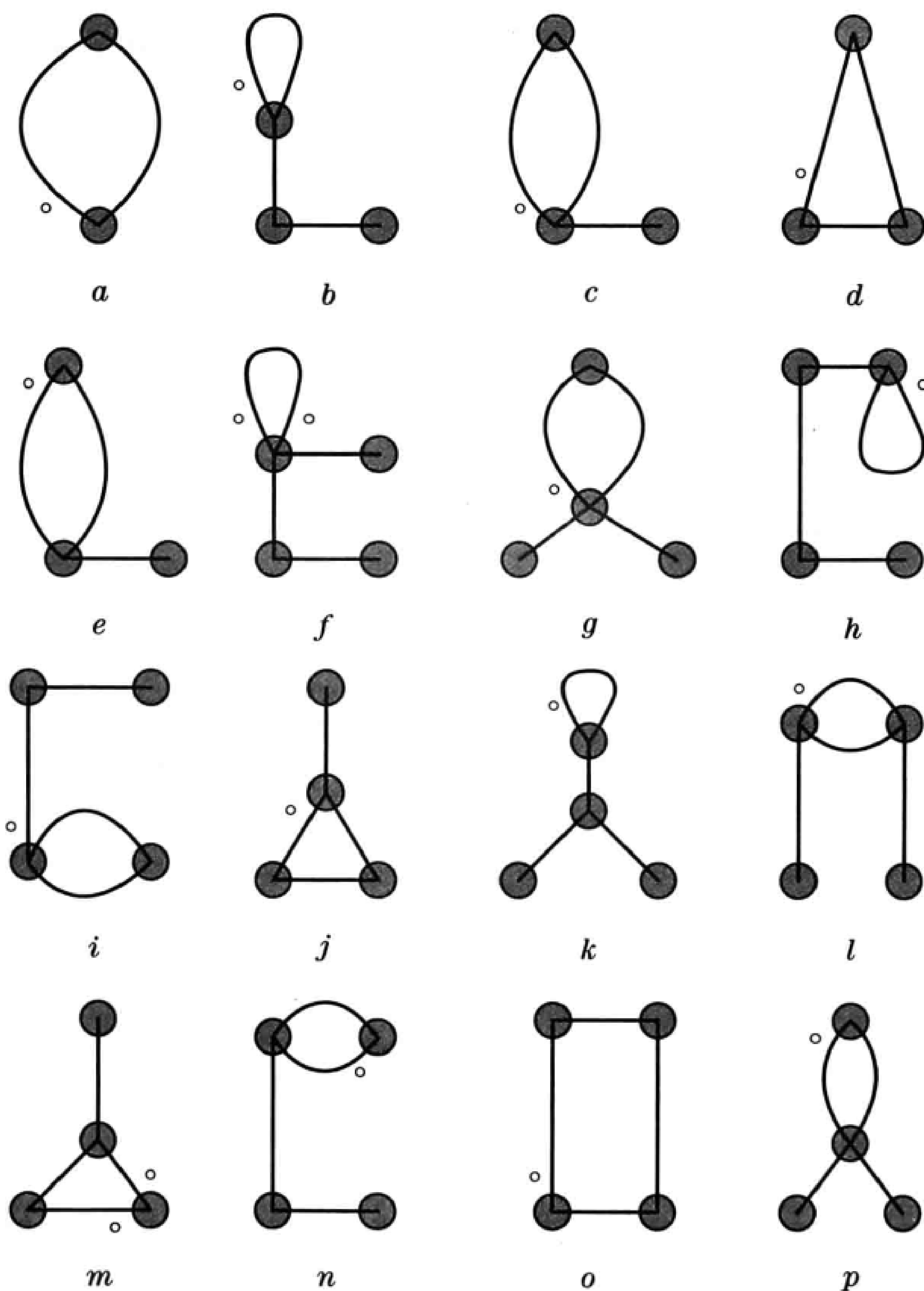


图 8.3.1 非根顶点数为 1～3 的单圈平面地图的根同构类

8.4 超　轮　型

在文献 [55] 中, 可以见到方程

$$\begin{cases} f = x^2 + x^2 \int_y \left(\dfrac{y}{x - yf} \right), \\ f|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = 0, \end{cases} \tag{8.4.1}$$

其中 $\boldsymbol{y} = (y_2, y_3, y_4, \cdots)$. 从而, $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{i}} = y_2^{i_1} y_3^{i_2} y_4^{i_3} \cdots$.

将方程 (8.4.1) 的第一式在 $\mathcal{R}\{x;\boldsymbol{y}\}$ 上做等价变换. 令

$$f = xh, \tag{8.4.2}$$

则得

$$\begin{aligned} h &= x + \int_y \frac{y}{1 - yh} \quad \text{(展开介子泛函下的部分)} \\ &= x + \sum_{i \geqslant 0} y_{i+1} h^i \quad (\text{函数 } h \text{ 与 } y_1 \text{ 无关}) \\ &= x + \sum_{i \geqslant 1} y_{i+1} h^i. \end{aligned} \tag{8.4.3}$$

引理 8.4.1 关于 f 的介子方程式 (8.4.1) 与下面关于 h 的函数方程, 在整域扩张 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上等价：

$$\begin{cases} h = x + \sum_{i \geqslant 1} y_{i+1} h^i, \\ h|_{x=0 \Rightarrow \boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = 0. \end{cases} \tag{8.4.4}$$

证明　由式 (8.4.1) 和式 (8.4.3), 即可导出欲证的结论. □

记 $\langle h \rangle_m = \partial_x^m h = H_m$ $(m \geqslant 0)$, 则

$$h = \sum_{m \geqslant 0} H_m x^m, \quad h^i = \sum_{m \geqslant 0} H_m^{[i]} x^m \quad (i \geqslant 2), \tag{8.4.5}$$

其中 H_m, $H_m^{[i]} \in \mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$, $m \geqslant 0$. 进而, 对任何整数 $i \geqslant 1$,

$$H_m^{[i]} = \begin{cases} H_m, & i = 1, \\ \sum_{l=0}^{m} H_l H_{m-l}^{[i-1]}, & i \geqslant 2. \end{cases}$$

由方程 (8.4.4) 的第二式, 即始条件, 可知

$$H_0 \quad \Rightarrow \quad H_0^{[i]}=0 \quad (i\geqslant 1).$$

从而, 对于任何整数 $m\geqslant 1$,

$$H_m^{[i]}=\begin{cases} H_m, & i=1,\\ \displaystyle\sum_{l=1}^{m-1} H_l H_{m-l}^{[i-1]}, & i\geqslant 2. \end{cases} \tag{8.4.6}$$

引理 8.4.2 给定整数 $m\geqslant 2$. 对于任何整数 $i\geqslant m$, 有

$$H_m^{[i]}=\begin{cases} H_1^m, & i=m,\\ 0, & i\geqslant m+1. \end{cases} \tag{8.4.7}$$

证明 令 $g\in\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$. 用 $d_x g$ 表示 g 中 x 幂的最小值. 由 $H_0=0$, 知 $d_x(h^i)=i$. 当 $m\leqslant i-1$ 时, $\partial_x^m h^i=0$; 当 $m=i$ 时, $\partial_x^m h^m=H_1^m$. 这就是欲证的结论. □

这个结论意味着方程 (8.4.4) 的第一式右端的无穷和, 对于任何一个给定整数 m 都是一个有限和.

引理 8.4.3 方程式 (8.4.4) 在 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 上与如下方程组等价:

$$\begin{cases} H_1=\dfrac{1}{1-y_2},\\ H_m=\displaystyle\sum_{i=2}^{m}\frac{y_{i+1}}{1-y_2}H_m^{[i]} \quad (m\geqslant 2). \end{cases} \tag{8.4.8}$$

证明 由方程 (8.4.4) 的第一式, 对于整数 $m=1$, 从始条件导致

$$\begin{aligned} &\langle h\rangle_1=1+y_2\langle h\rangle_1 \quad \Leftrightarrow \quad H_1=1+y_2H_1\\ &\Rightarrow \quad H_1=\frac{1}{1-y_2}. \end{aligned}$$

这就是式 (8.4.8) 的第一式. 对于整数 $m\geqslant 2$, 有

$$\begin{aligned} &H_m=\sum_{i\geqslant 1} y_{i+1}H_m^{[i]}=y_2H_m+\sum_{i\geqslant 2} y_{i+1}H_m^{[i]}\\ &\Rightarrow \quad H_m=\frac{1}{1-y_2}\sum_{i\geqslant 2} y_{i+1}H_m^{[i]}. \end{aligned}$$

这就是式 (8.4.8) 的第二式. □

因为

$$H_m^{[m]}=H_1^m=\frac{1}{(1-y_2)^m},$$

故式 (8.4.8) 变为

$$\begin{cases} H_1=\dfrac{1}{1-y_2}, \\ H_m=\dfrac{y_{m+1}}{(1-y_2)^{m+1}}+\displaystyle\sum_{i=2}^{m-1}\frac{y_{i+1}}{1-y_2}H_m^{[i]} \quad (m\geqslant 2). \end{cases} \tag{8.4.9}$$

在此基础上, 可继续求得 H_2 和 H_3 的显式:

$$\begin{aligned} H_2&=\frac{y_3}{(1-y_2)^3} \quad (\text{将 } (1-y_2)^{-3} \text{ 展开}) \\ &=\sum_{n\geqslant 0}\binom{2+n}{2}y_2^n y_3 \end{aligned} \tag{8.4.10}$$

$$\begin{aligned} H_3&=\frac{y_4}{(1-y_2)^4}+\frac{y_3}{1-y_2}H_3^{[2]} \quad (\text{由于 } H_3^{[2]}=2H_1H_2) \\ &=\frac{y_4}{(1-y_2)^4}+\frac{2y_3^2}{(1-y_2)^5} \quad (\text{展开 } (1-y_2)^{-4} \text{ 和 } (1-y_2)^{-5}\ ) \\ &=\sum_{n\geqslant 0}\left(\binom{3+n}{3}y_4+2\binom{4+n}{4}y_3^2\right)y_2^n. \end{aligned} \tag{8.4.11}$$

定理 8.4.1　方程式 (8.4.1) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中有且仅有一个解.

证明　由引理 8.4.1, 方程式 (8.4.4) 与方程式 (8.4.1) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中等价. 进而, 由引理 8.4.3, 方程式 (8.4.4) 还与方程组式 (8.4.9) 等价. 可以只讨论后者.

从式 (8.4.10) 和式 (8.4.11) 可知, 当 $m\leqslant 3$ 时, 利用方程组式 (8.4.9), 可知这些 H_m 已经确定.

对于 $m\geqslant 4$, 假设当 $l\leqslant m-1$ 时, 所有 $H_l\in\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 已经由式 (8.4.9) 确定. 往求 H_m.

因为在式 (8.4.9) 的第二式中, $H_m^{[i]}$ $(i\leqslant m-1)$ 都只与 H_l $(1\leqslant l\leqslant m-1)$ 有关, 故由归纳假设, H_m 也只与 H_l $(1\leqslant l\leqslant m-1)$ 有关. 从而, H_m 被确定.

从这个过程可以看出, 所得的 H_m $(m\geqslant 1)$ 是方程组式 (8.4.9) 的一个解. 再考虑到此过程对于始值 H_1 的唯一性, 这个解是仅有的. □

为了便于操作, 还得进一步讨论 H_m 的齐次展开式. 令 n 为未定向量 $\boldsymbol{y}$ 的次, $|\boldsymbol{i}|=n$. 注意, 因为 $\boldsymbol{y}=(y_2,y_3,y_4,\cdots)$, 故对于 $j\geqslant 1$, i_j 为 y_{j+1} 的幂.

对于整数 $m\geqslant 1$ 和 $n\geqslant 0$, 记 $H_{m,n}=[H_m]_n$ 为 H_m 中的 n 次齐项部分, 即 $\boldsymbol{y}$ 的一个 n 次齐多项式.

若 $\boldsymbol{i}$ 是 $H_{m,n}$ 中一项的幂向量, 则令

$$\sigma(\boldsymbol{i}) = \sum_{j\geqslant 1}(j+1)i_j. \tag{8.4.12}$$

引理 8.4.4 对于任何整数 $m\geqslant 2$, $n\geqslant 1$ 和 $i\geqslant 1$, 关于 $H_{m,n}^{[i]}$, 有 $\sigma(\boldsymbol{i}) = 2n+m-i$.

证明 当 $m=1$ 时, 由式 (8.4.9) 的第一式, 因为对于任何整数 $n\geqslant 1$, $H_{1,n}=y_2^n$, 所以有 $\sigma(\boldsymbol{i})=2n=2n+m-1$. 实际上, 这也是 $[H_1^{[i]}]_n$ 当 $i=1$ 时的情形.

对于 $m\geqslant 2$ 时的一般情形, 假设小于 m, n 和 i 时引理的结论都得到了验证. 往证 m, n 和 i 的情形. 为了叙述的方便, 对于 $P\in\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$, 姑且令 $\sigma(P)=\sigma(\boldsymbol{i})$, 其中 $\boldsymbol{i}$ 是 P 中一项的幂向量. 对于 $H_{m,n}^{[i]}=[H_m^{[i]}]_n$, 由式 (8.4.6) 及 σ 的可加性, 对于 $i\geqslant 2$, 得

$$\begin{aligned}\sigma(H_{m,n}^{[i]}) &= \sigma([H_l H_{m-l}^{[i-1]}]_n) = \sigma([H_l]_s)+\sigma([H_{m-l}^{[i-1]}]_{n-s})\\ &= (2s+l-1)+\big(2(n-s)+(m-1)-(i-1)\big)\\ &= 2n+m-i.\end{aligned}$$

这就是引理的结论. □

推论 8.4.1 对于任何整数 $m\geqslant 2$ 和 $n\geqslant 1$, 关于 $H_{m,n}$, 有 $\sigma(\boldsymbol{i})=2n+m-1$.

证明 这只是引理 8.4.4 中 $i=1$ 时的情形. □

由此可见, $\sigma(\boldsymbol{i})$ 的值与 $H_{m,n}$ 中项的选择无关. 我们可以记 $\sigma_{m,n}=\sigma(H_{m,n})=2n+m-1$. 为了叙述的方便, 需要引进一些符号. 令

$$\mathcal{H}_{m,n}=\big\{\boldsymbol{i}\geqslant\boldsymbol{0}\,\big|\,\boldsymbol{i}\text{ 是 }H_{m,n}\text{ 中一项的幂向量}\big\}. \tag{8.4.13}$$

考虑到引理 8.4.4, 记

$$\mathcal{L}_{m,n}=\big\{\boldsymbol{i}\geqslant\boldsymbol{0}\,\big|\,|\boldsymbol{i}|=n,\ \sigma(\boldsymbol{i})=2n+m-1\big\}. \tag{8.4.14}$$

引理 8.4.5 对于任何整数 $m\geqslant 1$, H_m 与所有 y_l $(l\geqslant m+2)$ 无关.

证明 首先, 对于 $m\leqslant 3$, 由式 (8.4.9) 的第一式、式 (8.4.10) 和式 (8.4.11) 知, 引理的结论成立. 然后, 对于 $m\geqslant 4$, 假设当 $i\leqslant m-1$ 时, H_i 都满足引理. 用归纳法, 往证当 $i=m$ 时的情形. 由式 (8.4.7) 和式 (8.4.8), 用归纳假设, 即可得欲

证的结论. □

根据引理 8.4.7, 对于任何整数 $m\geqslant 1$, 我们可以将 $H_m\in\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 视为有限向量

$$\boldsymbol{y}_{m+1}=(y_2,y_3,\cdots,y_{m+1})$$

的函数.

引理 8.4.6 对于任何整数 $m\geqslant 2$ 和 $n\geqslant 1$, 关于 $H_{m,n}$, 有 $\mathcal{H}_{m,n}=\mathcal{L}_{m,n}$.

证明 由推论 8.4.1 可知, 对于任何 $\boldsymbol{i}\in\mathcal{H}_{m,n}$, 有 $\boldsymbol{i}\in\mathcal{L}_{m,n}$. 这就意味着 $\mathcal{H}_{m,n}\subseteq\mathcal{L}_{m,n}$.

另一方面, 对于任何 $\boldsymbol{i}\in\mathcal{L}_{m,n}$, 往证 $\boldsymbol{i}\in\mathcal{H}_{m,n}$. 当 $m,n=(1,1)$, $(2,1)$, $(1,2)$ 和 $m,n=(3,1)$, $(2,2)$, $(1,3)$ 时, 由式 (8.4.9) 的第一式、式 (8.4.10) 和式 (8.4.11), 可以验证这个结论. 例如, 对于 $(m,n)=(1,1)$, 由引理 8.4.5, 只需考虑幂向量 (i_1,i_2). 因为对于整数 $i_1,i_2\geqslant 0$, 方程组 $|(i_1,i_2)|=i_1+i_2=1$, $\pi(i_1,i_2)=2i_1+3i_2=2$ 只有一个解 $(i_1,i_2)=(1,0)$, 即有 $\mathcal{L}_{1,1}=\{(1,0)\}$. 因为 $H_{1,1}=y_2$, 故有 $\mathcal{H}_{1,1}=\{(1,0)\}$. 再如, 考虑方程组 $i_1+i_2+i_3=2$, $2i_1+3i_2+4i_3=6$ 的解, 得 $\mathcal{L}_{3,2}=\{(0,2,0),(1,0,1)\}$. 对于 $(0,2,0)$, 有 $(y_2,y_3,y_4)^{(0,2,0)}=y_3^2$. 对于 $(1,0,1)$, 有 $(y_2,y_3,y_4)^{(1,0,1)}=y_2y_4$. 由 $H_{3,2}=2y_3^2+4y_2y_4$, 可见 $(0,2,0)$, $(1,0,1)\in\mathcal{H}_{3,2}$. 由此我们可以假定, 对于任何整数 $(i,j)<(m,n)$, 有 $\mathcal{L}_{i,j}\subseteq\mathcal{H}_{i,j}$, 往证 $\mathcal{L}_{m,n}\subseteq\mathcal{H}_{m,n}$.

令 $\boldsymbol{i}\in\mathcal{L}_{m,n}$. 由式 (8.4.9) 和式 (8.4.10), 知

$$H_{m,n}=\frac{(m+n)!}{(m+1)!(n-1)!}y_2^{n-1}y_{m+1}+\sum_{i=2}^{m-1}y_{i+1}\left[\frac{1}{1-y_2}\sum_{l=1}^{m-1}H_lH_{n-l}^{[i]}\right]_{n-1}.$$

由引理 8.4.5, 只需考虑 $\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}_m$. 若 $i_m\neq 0$, 则只能有 $i_m=1$ $i_1=n-1$(否则将小于 (m,n) 的情形, 或无解). 否则, 必存在 i $(1\leqslant i\leqslant m-1)$, 使得 $\boldsymbol{i}=\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{i}'\in\mathcal{L}_{s,t}$, $(s,t)<(m,n)$. 其中 $\boldsymbol{e}_i$ 的第 i 个分量为 1, 其他分量全为 0. 基于归纳假设, 上式右端的求和号内有一项的幂向量为 $\boldsymbol{i}$. 由此就得 $\boldsymbol{i}\in\mathcal{H}_{m,n}$. □

现在, 引进一个新的函数. 令

$$\gamma_n(x)=\Big(\sum_{j\geqslant 2}y_jx^j\Big)^n. \tag{8.4.15}$$

记

$$\mathcal{G}_{2(n-1)+m}=\left\{\boldsymbol{i}\geqslant\boldsymbol{0}\,\middle|\,\boldsymbol{i}\text{ 为}\partial_x^{2(n-1)+m}\gamma_n(x)\text{ 中一项的幂向量}\right\}. \tag{8.4.16}$$

引理 8.4.7 对于任何整数 $m\geqslant 2$ 和 $n\geqslant 1$, 关于 $\partial_x^{2(n-1)+m}\gamma_n(x)$, 有

$$\mathcal{G}_{2(n-1)+m}=\mathcal{L}_{m,n}.$$

证明 对于任何整向量 $\boldsymbol{i} \geqslant \mathbf{0}$, $\boldsymbol{i} \in \mathcal{G}_{2(n-1)+m}$, 因为 $\boldsymbol{i}$ 是 $\partial_x^{2(n-1)+m}\gamma_n(x)$ 中一项的幂向量, $\boldsymbol{i}$ 为方程组

$$\begin{cases} \sum\limits_{j\geqslant 1} i_j = n, \\ \sum\limits_{j\geqslant 1}(j+1)i_j = 2n+m-1 \quad (i_j \geqslant 0,\ j \geqslant 1) \end{cases}$$

的一组整数解. 这就意味着 $\boldsymbol{i} \in \mathcal{L}_{m,n}$. 反之, 对于任何整向量 $\boldsymbol{i} \geqslant \mathbf{0}$, $\boldsymbol{i} \in \mathcal{L}_{m,n}$. 因为 $\boldsymbol{i}$ 是这个方程组的一个解, 故有 $\boldsymbol{i} \in \mathcal{G}_{2(n-1)+m}$. 综合上述两个方面, 即得欲证的结论. □

从引理 8.4.4 和引理 8.4.6, 对于任何整数 $m \geqslant 2$ 和 $n \geqslant 1$, 即可得

$$\mathcal{L}_{m,n} = \mathcal{G}_{2(n-1)+m}. \tag{8.4.17}$$

因为

$$\partial_x^{2(n-1)+m}\gamma_n(x) = \sum_{\boldsymbol{i}\in\mathcal{G}_{2(n-1)+m}} \frac{n!}{\boldsymbol{i}!}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{i}}, \tag{8.4.18}$$

故由引理 8.4.7 知, 存在 $\beta_{\boldsymbol{i}} \in \mathcal{R}_+$, $\boldsymbol{i} \in \mathcal{G}_{2(n-1)+m}$, 使得

$$H_{m,n} = \sum_{\boldsymbol{i}\in\mathcal{G}_{2(n-1)+m}} \beta_{\boldsymbol{i}}\frac{n!}{\boldsymbol{i}!}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{i}}. \tag{8.4.19}$$

定理 8.4.2 方程组式 (8.4.8) 的解有如下系数无和的正项和显式:

$$H_m = \begin{cases} \sum\limits_{n\geqslant 0} y_2^n, & m=2, \\ \sum\limits_{n\geqslant 1}\sum\limits_{\boldsymbol{i}\in\mathcal{G}_{2(n-1)+m}} \beta_{\boldsymbol{i}}\dfrac{n!}{\boldsymbol{i}!}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{i}}, & m \geqslant 3, \end{cases} \tag{8.4.20}$$

其中 $\beta_{\boldsymbol{i}}$ 的含义由式 (8.4.19) 给出.

证明 由式 (8.4.9) 的第一式, 得式 (8.4.20) 的第一式. 因为

$$H_m = \sum_{n\geqslant 1} H_{m,n},$$

故从式 (8.4.19), 即得式 (8.4.20) 的第二式. □

例 8.4.1 超轮的点剖分. 一个超轮就是这样的一个平面根地图, 它的对偶是一个不可分离的外平面地图, 或者说, 删去其根顶点所得的是一个树. 令 $F_{m,n}$ 是

根顶点次为 m、非根顶点数为 n 和顶点剖分向量为 $\boldsymbol{y}=(y_2,y_3,y_4,\cdots)$ 的超轮的根同构类数, 则 $F_{m,n}=H_{m-1,n}$ $(m\geqslant 2,\ n\geqslant 0)$. 由式 (8.4.9) 的第一式, 可得

$$\begin{aligned}H_1&=\sum_{n\geqslant 0}H_{1,n}=\sum_{n\geqslant 0}y_2^n\\&=1+y_2+y_2^2+y_2^3+y_2^4+y_2^5+y_2^6+\cdots.\end{aligned}$$

这就意味着 $F_{2,0}=H_{1,0}=1$, $F_{2,1}=H_{1,1}=y_2$, $F_{2,2}=H_{1,2}=y_2^2$, $F_{2,3}=H_{1,3}=y_2^3$, $F_{2,4}=H_{1,4}=y_2^4$, $F_{2,5}=H_{1,5}=y_2^5$, $F_{2,6}=H_{1,6}=y_2^6$.

在图 8.4.1 中, 提供了 $a=1=F_{2,0}$, $b=y_2=F_{2,1}$, $c=y_2^2=F_{2,2}$, $d=y_2^3=F_{2,3}$, $e=y_2^4=F_{2,4}$, $f=y_2^5=F_{2,5}$, $g=y_2^6=F_{2,6}$.

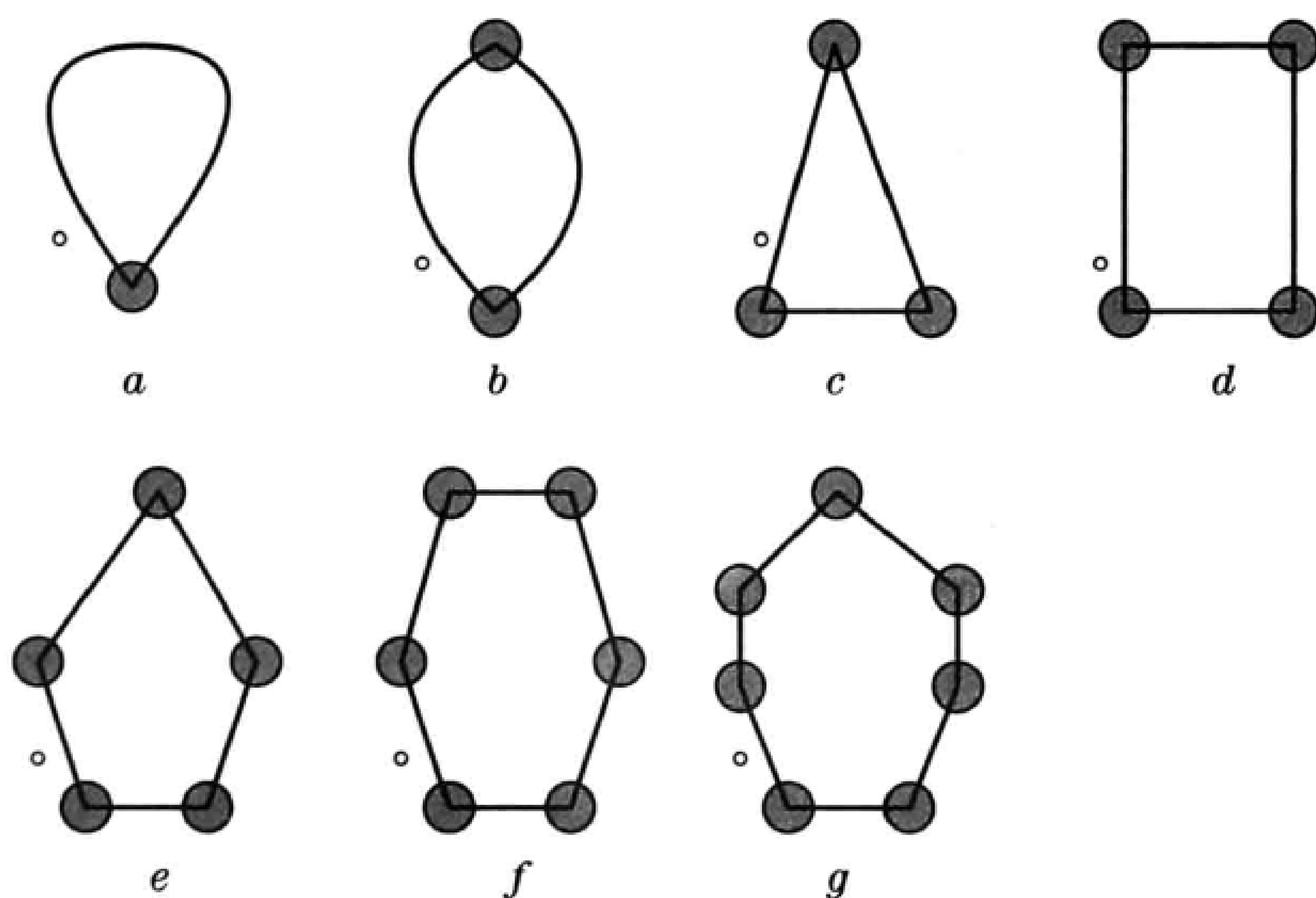


图 8.4.1　根顶点次为 2、非根顶点数不超过 6 的超轮的根同构类

由式 (8.4.10), 可得

$$\begin{aligned}H_2&=\sum_{n\geqslant 0}H_{2,n}=\sum_{i\geqslant 0}\frac{(2+i)!}{2!i!}y_3y_2^i\\&=y_3+3y_2y_3+6y_2^2y_3+10y_2^3y_3+\cdots.\end{aligned}$$

这就意味着 $F_{3,1}=H_{2,1}=y_3$, $F_{3,2}=H_{2,2}=3y_2y_3$, $F_{3,3}=H_{2,3}=6y_2^2y_3$, $F_{3,4}=H_{2,4}=10y_2^3y_3$.

在图 8.4.2 中, 提供了 $a=y_3=F_{3,1}$, $b=3y_2y_3=F_{3,2}$, $c+d=3y_2^2y_3+3y_2^2y_3=6y_2^2y_3=F_{3,3}$, $e+f+g=3y_2^3y_3+6y_2^3y_3+y_2^3y_3=F_{3,4}$.

例 8.4.2　不可分离外平面地图的面剖分. 在方程式 (8.4.1) 的解中, $F_{m,n}=$

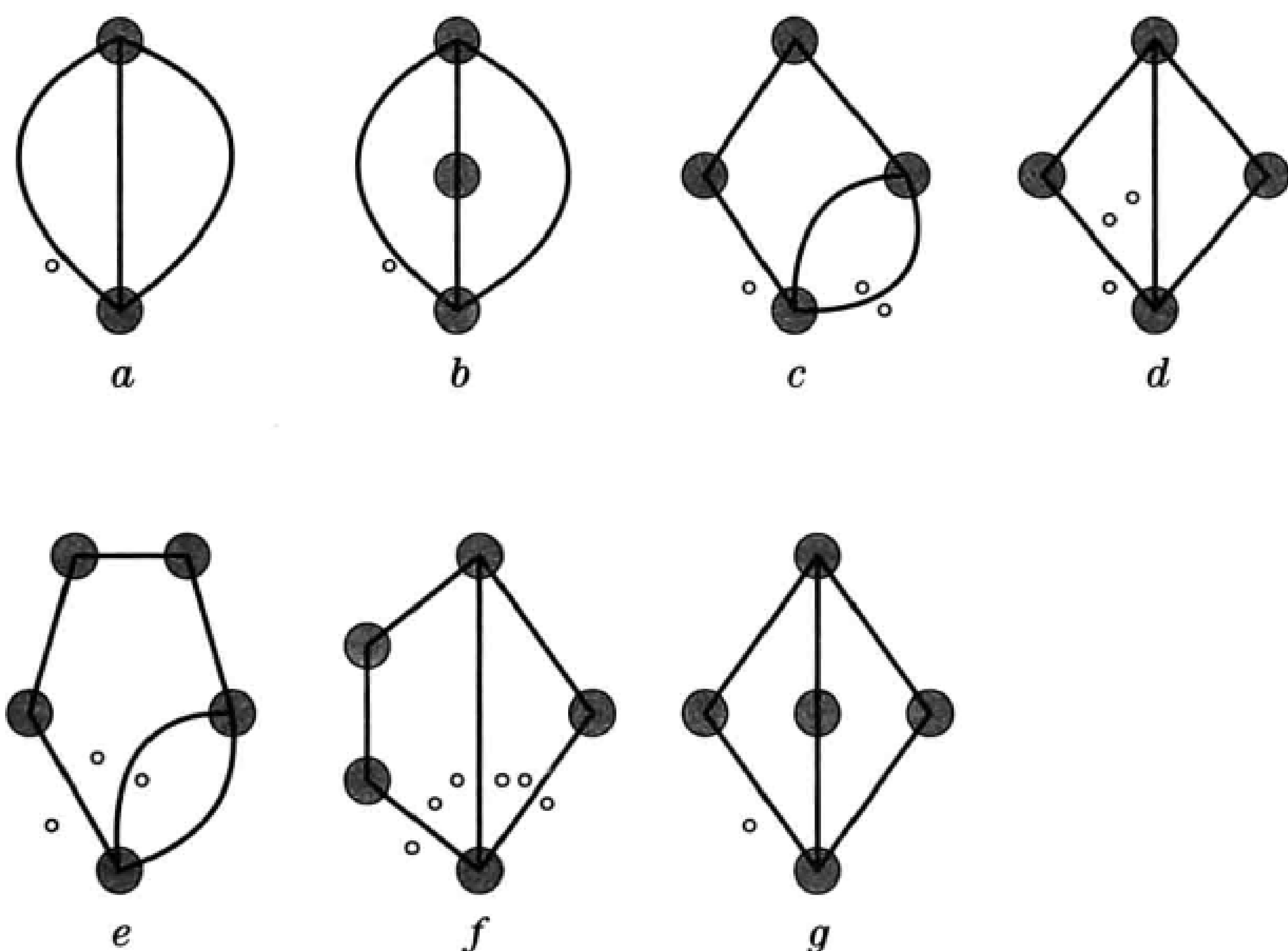


图 8.4.2 根顶点次为 3、非根顶点数不超过 4 的超轮的根同构类

$H_{m-1,n}$ 还提供了不可分离外平面地图, 对于给定根面次 m 和非根面数 n 按照顶点剖分向量的根同构类数.

由式 (8.4.11), 可得

$$H_3=\sum_{n\geqslant 0}H_{2,n}=\sum_{i\geqslant 0}\Big(\frac{(3+i)!}{3!i!}y_4+\frac{2(4+i)!}{4!i!}y_3^2\Big)y_2^i$$
$$=y_4+4y_2y_4+2y_3^2+10y_2y_3^2+10y_2^2y_4+30y_2^2y_3^2+20y_2^3y_4+\cdots.$$

这就意味着 $F_{4,1}=H_{3,1}=y_4$, $F_{4,2}=H_{3,2}=4y_2y_4+2y_3^2$, $F_{4,3}=H_{3,3}=10y_2y_3^2+10y_2^2y_4$, $F_{4,4}=H_{3,4}=30y_2^2y_3^2+20y_2^3y_4$.

在图 8.4.3 中, 提供了 $a=y_4=F_{4,1}$, $b+c=2y_3^2+4y_2y_4=F_{4,2}$, $(d+f)+(e+g+h)=(2+8)y_2y_3^2+(4+2+4)y_2^2y_4=10y_2y_3^2+10y_2^2y_4=F_{4,3}$, $(i+j+k+l+m+n)+(o+p+q+r)=(8+4+8+4+4+2)y_2^2y_3^2+(4+8+4+4)y_2^3y_4=30y_2^2y_3^2+20y_2^3y_4=F_{4,4}$.

例 8.4.3 不可分离外平面简单地图的面剖分. 在方程式 (8.4.1) 的解中可以看出.

例 8.4.4 不可分离外平面二部地图的面剖分. 在方程式 (8.4.1) 的解中可以看出.

例 8.4.5 不可分离外平面简单二部地图的面剖分. 在方程式 (8.4.1) 的解中可以看出.

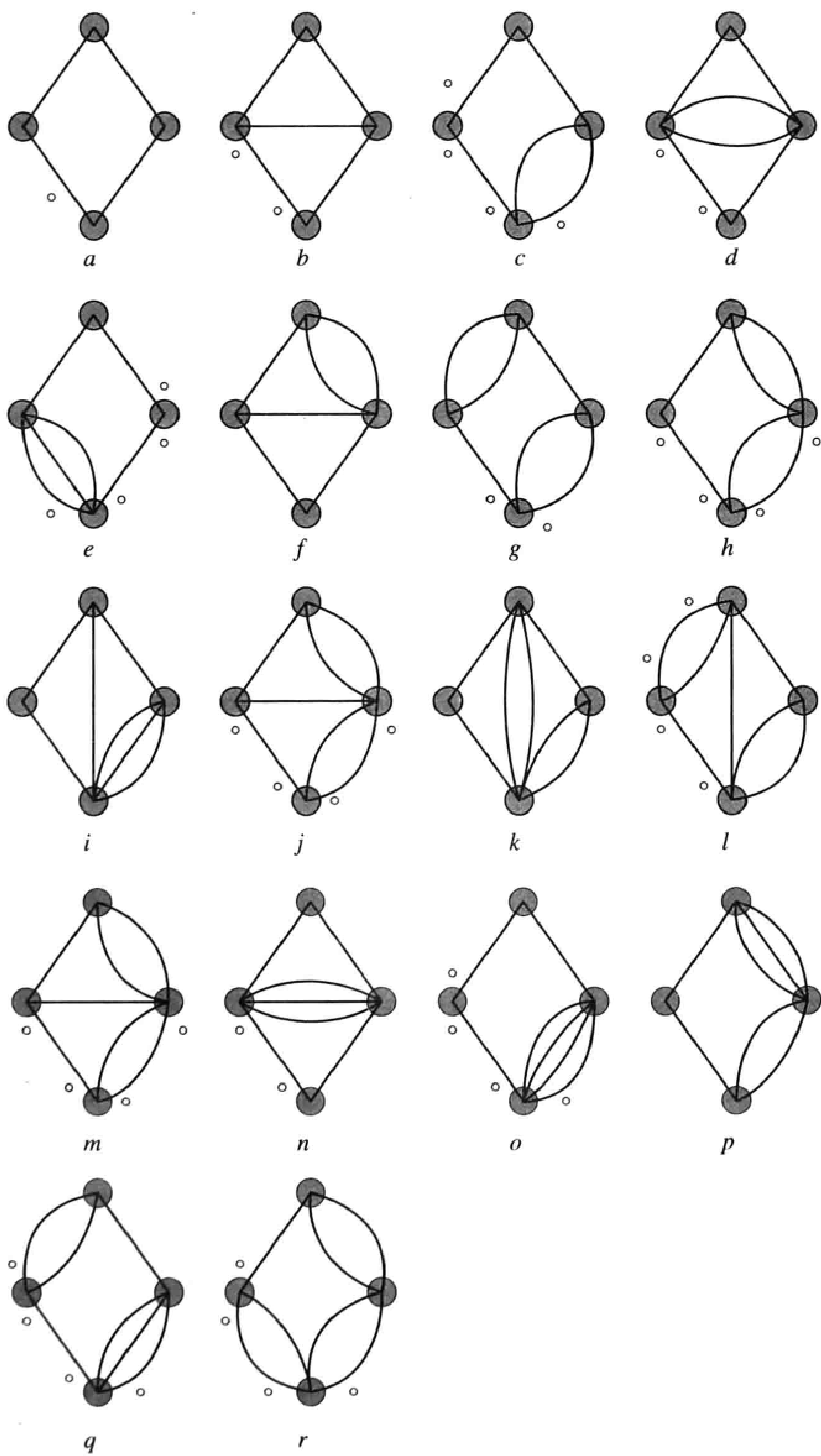


图 8.4.3　非根顶点数为 1～3 的单圈平面的根同构类

8.5 冬 梅 型

在文献[22,24] 中, 可以见到方程

$$\begin{cases} \left(1-\dfrac{xy_3}{1-y_2}\right)f=1+x\displaystyle\int_y \left(y\delta_{x,y}(uf|_{x=u})\right), \\ f|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=1. \end{cases} \tag{8.5.1}$$

注意, 在 $\delta_{x,y}$ 下的 $uf|_{x=u}$ 更正了原文的笔误 $u+uf|_{x=u}$, 而且, 始条件也不同了.

为方便, 采用方程 (8.5.1) 的第一式在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上的等价形式

$$f=1+\frac{xy_3}{1-y_2}f+x\int_y \left(y\delta_{x,y}(uf|_{x=u})\right). \tag{8.5.2}$$

令 $F_m=\partial_x^m f(=[f]_m)(m\geqslant 0)$, $\mathrm{id}(\boldsymbol{y})=|\boldsymbol{i}|$, 其中 $\boldsymbol{i}=(i_1,i_2,i_3,\cdots)$, 即 $\boldsymbol{y}$ 的幂向量, $|\boldsymbol{i}|=i_1+i_2+i_3+\cdots$. 对于整数 $n\geqslant 0$, 记

$$F_{m,n}=F_m|_{\mathrm{id}(\boldsymbol{y})=n}\Big(=\sum_{|\boldsymbol{i}|=n}F_{m,\boldsymbol{i}}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{i}}\Big)(=\langle F_m\rangle_n),$$

或称 $F_{m,n}$ 是 F_m 中 $\boldsymbol{y}$ 的所有 n 次项之和, 即一个齐 n 次多项式.

由此可见

$$f=\sum_{m\geqslant 0}[f]_m x^m=\sum_{m\geqslant 0}F_m x^m. \tag{8.5.3}$$

由

$$\begin{aligned}\delta_{x,y}(uf|_{x=u})&=\frac{xf-yf|_{u=y}}{x-y}=\frac{x\sum\limits_{m\geqslant 0}F_m x^m-y\sum\limits_{m\geqslant 0}F_m y^m}{x-y}\\ &=\sum_{m\geqslant 0}F_m\frac{x^{m+1}-y^{m+1}}{x-y},\end{aligned}$$

$$x^{m+1}-y^{m+1}=(x-y)\Big(\sum_{i=0}^{m}x^i y^{m-i}\Big),$$

有

$$\begin{aligned}\delta_{x,y}(uf|_{x=u})&=\sum_{m\geqslant 0}F_m\Big(\sum_{i=0}^{m}x^i y^{m-i}\Big)=\sum_{i\geqslant 0}\sum_{m\geqslant i}F_m y^{m-i}x^i\\ &=\sum_{m\geqslant 0}\Big(\sum_{i\geqslant m}F_i y^{i-m}\Big)x^m,\end{aligned}$$

从而

$$\int_y y\delta_{x,y}(uf|_{x=u}) = \sum_{m\geqslant 0}\Big(\sum_{i\geqslant m} y_{i-m+1}F_i\Big)x^m.$$

由方程式 (8.5.2), 得

$$\begin{aligned} f &= 1+\frac{xy_3}{1-y_2}f+\sum_{m\geqslant 0}\Big(\sum_{i\geqslant m} y_{i-m+1}F_i\Big)x^{m+1} \quad (\text{用 } m \text{ 代替 } m+1) \\ &= 1+\frac{xy_3}{1-y_2}f+\sum_{m\geqslant 1}\Big(\sum_{i\geqslant m-1} y_{i-m+2}F_i\Big)x^m. \end{aligned} \tag{8.5.4}$$

在式 (8.5.3) 和式 (8.5.4) 的基础上, 即可导出

$$x^0 : F_0 = 1 \quad (\text{即方程式 (8.5.1) 的始条件})$$

$$\Rightarrow \quad F_{m,0} = 0 \ (m \geqslant 1),\ F_{0,n} = 0 \ (n \geqslant 1), \tag{8.5.5}$$

$$x^1 : F_1 = \sum_{i\geqslant 0} y_{i+1}F_i = y_1F_0+y_2F_1+y_3F_2+y_4F_3+\cdots, \tag{8.5.6}$$

$$x^2 : F_2 = \sum_{i\geqslant 1} y_iF_i = y_1F_1+y_2F_2+y_3F_3+y_4F_4+\cdots, \tag{8.5.7}$$

$$x^3 : F_3 = \sum_{i\geqslant 2} y_{i-1}F_i = y_1F_2+y_2F_3+y_3F_4+y_4F_5+\cdots, \tag{8.5.8}$$

$$x^4 : F_4 = \sum_{i\geqslant 3} y_{i-2}F_i = y_1F_3+y_2F_4+y_3F_5+y_4F_6+\cdots, \tag{8.5.9}$$

以及对于任何整数 $m \geqslant 5$,

$$\begin{aligned} x^m : F_m &= \frac{y_3}{1-y_2}F_{m-1}+\sum_{l\geqslant m-1} y_{l-m+2}F_l \\ &= \Big(y_3\sum_{l\geqslant 0} y_2\Big)F_{m-1}+\sum_{l\geqslant m-1} y_{l-m+2}F_l. \end{aligned} \tag{8.5.10}$$

下面, 对任何整数 $m \geqslant 1$, 为确定 $F_{m,n}$ $(n \geqslant 1)$ 作些理论准备. 令 $\min\limits_{\boldsymbol{y}}(F_m)$ 为 F_m 所有系数非 0 项的 $\boldsymbol{y}$ 的幂中的最小者.

引理 8.5.1 给定整数 $m \geqslant 1$. 对于任何整数 $n \geqslant 1$, 如果 $n \leqslant m-1$, 则 $F_{m,n} = 0$.

证明 由式 (8.5.5), 知 $F_{m,0} = 0 (m \geqslant 1)$. 因为 $\min\limits_{\boldsymbol{y}}(F_i) \geqslant i$ $(i \geqslant 1)$, 故由式 (8.5.6), 知 $\min\limits_{\boldsymbol{y}}(F_1) = \min\limits_{\boldsymbol{y}}(y_3F_0) = 1$. 对于 $m = 2$, 由式 (8.5.7), 知 $\min\limits_{\boldsymbol{y}}(F_2) = \min\limits_{\boldsymbol{y}}(y_3F_1) = 1+\min\limits_{\boldsymbol{y}}(F_1) = 2$. 从而, $F_{m,j} = 0 (0 \leqslant j \leqslant 1)$. 一般地, 对于 $2 \leqslant s \leqslant$

$m-1$, 假设有 $F_{s,j}=0(1\leqslant j\leqslant m-2)$. 用归纳法, 往证对于 $s=m$, 有 $F_{m,j}=0$ $(0\leqslant j\leqslant m-1)$. 从归纳假设, 知 $\min\limits_{\boldsymbol{y}}(F_{m-1})=m-1$. 由式 (8.5.10), 知

$$\min_{\boldsymbol{y}}(F_m)=\min_{\boldsymbol{y}}(y_3F_{m-1})=1+\min_{\boldsymbol{y}}(F_{m-1})=1+(m-1)=m.$$

从而, $F_{m,j}=0\ (1\leqslant j\leqslant m-1)$. □

这个引理的证明意味着, 对于任何整数 $m\geqslant 1$, $\min\limits_{\boldsymbol{y}}(F_m)\geqslant m$.

引理 8.5.2 对于任何整数 $m,\ n\geqslant 1$, $F_{m,n}=(y_1+y_3)^m$ 当且仅当 $n=m$.

证明 当 $m=n=1$ 时, 由式 (8.5.6), 可得 $F_{1,1}=y_3F_{0,0}+y_1F_{0,0}=y_1+y_3$. 对于 $m=n\geqslant 2$ 时的情形, 假设对于任何 $j\ (1\leqslant j\leqslant m-1)$, 有 $F_{j,j}=(y_1+y_3)^j$, 用归纳法, 往证 $F_{m,m}=(y_1+y_3)^m$. 由式 (8.5.10), 知

$$\begin{aligned}F_{m,m}&=\Big\langle y_3\sum_{l\geqslant 0}y_2^lF_{m-1}\Big\rangle_{m-1}=y_3F_{m-1,m-1}+y_1F_{m-1,m-1}\\&=(y_1+y_3)F_{m-1,m-1}=(y_1+y_3)^m.\end{aligned}$$

考虑到 $F_{m,m}$ 是 $F_m(\boldsymbol{y})$ 中 m 次齐项部分且这个 m 次齐多项式具有唯一性, 即得引理的结论. □

上面两个引理所处理的都是低次项的情形. 下面的引理则是讨论式 (8.5.10) 中无上限求和的高次项的情形.

引理 8.5.3 对于任何整数 m 和 n $(n\geqslant m\geqslant 1)$, $F_{m,n}$ 与所有 y_i $(i\geqslant n-m+2)$ 无关.

证明 由式 (8.5.10), 对于任何整数 $n\geqslant m\geqslant 1$, 有

$$\begin{aligned}F_{m,n}&=\sum_{l\geqslant 0}\langle y_3y_2^lF_{m-1}\rangle_n+\sum_{i\geqslant m-1}\langle y_{i-m+2}F_i\rangle_n\\&=\sum_{l\geqslant 0}y_3y_2^lF_{m-1,n-l-1}+\sum_{i\geqslant m-1}y_{i-m+2}F_{i,n-1}\\&=\sum_{l=0}^{n-m}y_3y_2^lF_{m-1,n-l-1}+\sum_{i=m-1}^{n-1}y_{i-m+2}F_{i,n-1}.\end{aligned}\tag{8.5.11}$$

在此基础上, 对于较小的整数 m 和 n, 可以验证 $F_{m,n}$ 满足引理的结论. 对于一般情形, 假若 $F_{i,n-1}$ $(m-1\leqslant i\leqslant n-1)$ 满足引理的结论, 对 n 用归纳法. 因为 y_{i-m+2} $(m-1\leqslant i\leqslant n-1)$ 不含 y_i $(i\geqslant n-m+2)$, 所以 $F_{m,n}$ 与所有 y_i

$(i \geqslant n-m+2)$ 无关. □

基于上面的三个引理, 对于整数 $m,n \geqslant 1$, 我们可以按 $m+n \geqslant 2$ 由小到大, 然后 m 由大到小的次序确定 $F_{m,n}$. 例如, $m+n=2$: $F_{1,1}$; $m+n=3$: $F_{2,1}$, $F_{1,2}$; $m+n=4$: $F_{3,1}$, $F_{2,2}$, $F_{1,3}$; $m+n=5$: $F_{4,1}$, $F_{3,2}$, $F_{2,3}$, $F_{1,4}$; 等等. 由引理 8.5.1, 有 $F_{2,1}=0$, $F_{3,1}=0$, 以及 $F_{4,1}=F_{3,2}=0$. 为方便, 对任何函数 $g \in \mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$, 记 $\langle g \rangle_n$ 为函数 g 中的 n 次齐多项式.

利用式 (8.5.11), 得

$$F_{1,1} = y_1 F_{0,0} + \sum_{l=0}^{1-1} y_3 y_2^l F_{0,1-l-1} = y_1 F_{0,0} + y_3 F_{0,0} = y_1 + y_3.$$

从而, 当 $n=1$ 时, 只有 $F_{1,1}=y_1$. 这是 $m+n=2$ 时的情形.

当 $m+n=3$ 时, 只需求 $F_{1,2}$. 由式 (8.5.11), 有

$$\begin{aligned} F_{1,2} &= \sum_{l=0}^{1} y_3 y_2^l F_{0,1-l} + \sum_{i=0}^{1} y_{i+1} F_{i,1} \\ &= y_3 y_2 F_{0,0} + y_2 F_{1,1} = y_2 y_3 + y_2(y_1+y_3) = y_1 y_2 + 2y_2 y_3. \end{aligned}$$

当 $m+n=4$ 时, 要求 $F_{1,3}$ 和 $F_{2,2}$. 由引理 8.5.1, 知 $F_{2,2}=y_1^2$, 只剩下 $F_{1,3}$. 由式 (8.5.11), 有

$$\begin{aligned} F_{1,3} &= \sum_{l=0}^{2} y_3 y_2^l F_{0,2-l} + \sum_{i=0}^{2} y_{i+1} F_{i,2} \\ &= y_3 y_2^2 F_{0,0} + y_2 F_{1,2} + y_3 F_{2,2} \\ &= y_2^2 y_3 + y_2(y_1 y_2 + 2y_2 y_3) + y_3(y_1+y_3)^2 \\ &= y_2(3y_2 y_3 + y_1 y_2) + y_3(y_1+y_3)^2 \\ &= y_1 y_2^2 + 2y_1 y_3^2 + y_1^2 y_3 + 3y_2^2 y_3 + y_3^3. \end{aligned}$$

当 $m+n=5$ 时, 要求 $F_{1,4}$ 和 $F_{2,3}$. 在引理 8.5.1～ 引理 8.5.3 的基础上, 由式 (8.5.11), 先求

$$\begin{aligned} F_{2,3} &= \sum_{l=0}^{1} y_3 y_2^l F_{1,2-l} + \sum_{i=1}^{2} y_i F_{i,2} \\ &= y_3 F_{1,2} + y_2 y_3 F_{1,1} + y_1 F_{1,2} + y_2 F_{2,2} \\ &= y_2 y_3 F_{1,1} + (y_3+y_1) F_{1,2} + y_2 F_{2,2} \\ &= y_2 y_3 (y_1+y_3) + (y_1+y_3)(y_1 y_2 + 2y_2 y_3) + y_2(y_1+y_3)^2 \end{aligned}$$

$$= 6y_1y_2y_3 + 2y_1^2y_2 + 4y_1y_3^2.$$

然后, 由式 (8.5.11), 求

$$\begin{aligned}F_{1,4} &= \sum_{l=0}^{3} y_3 y_2^l F_{0,3-l} + \sum_{i=0}^{3} y_{i+1}F_{i,3}\\ &= y_3y_2^3F_{0,0} + y_3F_{2,3} + y_4F_{3,3}\\ &= y_3y_2^3 + y_3(6y_1y_2y_3 + 2y_1^2y_2 + 4y_1y_3^2) + y_4(y_1+y_3)^3\\ &= y_1(6y_2y_3^2 + 3y_3^2y_4) + y_1^2(2y_2y_3 + 3y_3y_4) + y_1^3y_4\\ &\quad + 4y_2y_3^3 + y_2^3y_4 + y_3^3y_4.\end{aligned}$$

定理 8.5.1 方程式 (8.5.1) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中有且仅有一个解.

证明 从式 (8.5.4) ~式 (8.5.10) 的过程可知, 由式 (8.5.11) 所得到的 $F_{m,n}$ $(m,n \geqslant 0)$ 确定了方程式 (8.2.1) 的一个解. 考虑到这个过程在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上的唯一性, 这个解是仅有的. □

对于任何 $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}$, 记

$$\pi(\boldsymbol{n}) = \sum_{i=1}^{n} in_i \quad (\text{或 } \pi(\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}})).$$

对于 $\boldsymbol{y}$ 的一个多项式 $F_{m,n}$, 也记

$$\mathcal{P}(F_{m,n}) = \{\boldsymbol{n} \,|\, \boldsymbol{n} \text{ 是 } F_{m,n} \text{ 中一项的幂向量}\}.$$

引理 8.5.4 对于任何整数 $m = n \geqslant 1$, 记 $F_{n,n} = F_{[n]}$, 则 $\pi(F_{[n]}) = \{\pi_i(n) \,|\, 0 \leqslant i \leqslant n\}$, 其中

$$\pi_i(n) = \{\pi(\boldsymbol{n}) = 3n - 2i \,|\, \boldsymbol{n} \in \mathcal{P}(F_{[n]})\} \quad (0 \leqslant i \leqslant n). \tag{8.5.12}$$

证明 由引理 8.5.2, 因为对于 $n \geqslant 1$, 有

$$F_{n,n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} y_1^i y_3^{n-i},$$

$\pi(y_1^i y_3^{n-i}) = i + 3(n-i) = 3n - 2i$, 所以

$$\pi(F_{n,n}) = \{3n, 3n-2, 3n-4, \cdots, n+2, n\}.$$

因为这个集合中的 $n+1$ 个元素互不相同, 且 $F_{n,n}$ 共有 $n+1$ 项, 所以 $\pi_i(\boldsymbol{n}) = \pi(y_1^i y_3^{n-i})(0 \leqslant i \leqslant n)$. 从而, 式 (8.5.12) 成立. □

由引理 8.5.4 知, 对于任何整数 $m=n\geqslant 1$, $F_{n,n}$ 是一个 n 次齐 $n+1$ 项式, 而且

$$\pi(F_{n,n})=\sum_{i=0}^{n}\pi(F_{i[n]})\big(=\pi(F_{i[n]})\big),$$

其中

$$\pi(F_{i[n]})=\big\{\pi(\boldsymbol{n})\,\big|\,\pi(\boldsymbol{n})=\pi(y_1^{n-i}y_3^i)=3n-2i,\ \boldsymbol{n}\in\mathcal{P}(F_{[n]})\big\}\quad(0\leqslant i\leqslant n).$$

引理 8.5.5　对于任何整数 $n-1\geqslant m\geqslant 1$, 有

$$\pi(F_{[m,n]})=\{\pi(\boldsymbol{n})\,|\,0\leqslant i\leqslant n-1\},$$

其中

$$\pi_i(\boldsymbol{n})=2n-m+2i\quad(0\leqslant i\leqslant n-1).\tag{8.5.13}$$

证明　首先, 对 $2\leqslant m+n\leqslant 5$, $n\geqslant m\geqslant 1$, 从上面的讨论已经得到结论. 由引理 8.5.4, 只需考虑

$$F_{1,2}=y_1y_2+2y_2y_3\quad\Rightarrow\quad\pi(F_{1,2})=\big\{\pi(y_1y_2),\pi(y_2y_3)\big\}=\big\{3,5\big\}.$$

因为 $3=2\times 2-1+2\times 0=\pi_0(F_{1,2})$, $5=2\times 2-1+2\times 1=\pi_1(F_{1,2})$, 所以 $F_{1,2}$ 满足引理的结论. 由此有

$$\mathcal{P}(F_{1,2})=\mathcal{P}_0(F_{1,2})+\mathcal{P}_1(F_{1,2})=\big\{(1,1,0)\big\}+\big\{(0,1,1)\big\}.$$

由

$$F_{1,3}=y_1y_2^2+2y_1y_3^2+y_1^2y_3+3y_2^2y_3+y_3^3,$$

可得

$$\pi(F_{1,3})=\big\{5,7,5,7,9\big\}=\big\{5,7,9\big\}.$$

因为 $5=2\times 3-1+2\times 0=\pi_0(F_{1,3})$, $7=2\times 3-1+2\times 1=\pi_1(F_{1,3})$, $9=2\times 3-1+2\times 2=\pi_2(F_{1,3})$, 所以 $F_{1,3}$ 满足引理的结论. 由此有

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(F_{1,3})&=\mathcal{P}_0(F_{1,3})+\mathcal{P}_1(F_{1,3})+\mathcal{P}_2(F_{1,3})\\&=\big\{(1,2,0),(2,0,1)\big\}+\big\{(1,0,2),(0,2,1)\big\}+\big\{(0,0,3)\big\}.\end{aligned}$$

相仿地, 可验证 $F_{2,3}$ 和 $F_{1,4}$.

对于 $n\geqslant m\geqslant 3$ 时的一般情形, 假设当 $t\leqslant s\leqslant n-1$ 时, 所有 $F_{s,t}$ 都满足引理的结论, 往证 $F_{m,n}$ 满足引理的结论.

由式 (8.5.13), 对于 $n \geqslant m \geqslant 3$, 有

$$\pi(F_{m,n}) = \bigcup_{l=0}^{n-m} \pi(y_3 y_2^l F_{m-1,n-l-1}) \bigcup_{l=m-1}^{n-1} \pi(y_{l-m+2} F_{l,n-1}).$$

由归纳假设, 得

$$\begin{aligned}
\pi(y_3 y_2^l F_{m-1,n-l-1}) &= \left\{3+2l+\left(2(n-l+1)-(m-1)+2i\right) \middle| 0 \leqslant i \leqslant n-l-2\right\} \\
&= \left\{2n-m+2i+2 \middle| 0 \leqslant i \leqslant n-l-2\right\} \\
&= \left\{2n-m+2i \middle| 1 \leqslant i \leqslant n-l-1\right\}, \\
\pi(y_{l-m+2} F_{l,n-1}) &= \left\{l-m+2+\left(2(n-1)-l+2i\right) \middle| 0 \leqslant i \leqslant n-2\right\} \\
&= \left\{2n-m+2i \middle| 0 \leqslant i \leqslant n-2\right\}.
\end{aligned}$$

因为当前者 $l=0$ 时是 $i=n-1$ 时的情形, 故由两者的并, 得

$$\pi(F_{m,n}) = \left\{2n-m+2i \middle| 0 \leqslant i \leqslant n-1\right\}.$$

这就是引理的结论. □

考虑到引理 8.5.4, 只要注意在式 (8.5.13) 中, 当 $m=n$ 时, 添上 $i=n$ 时的情形, 即得式 (8.5.12).

推论 8.5.1 对于任何整数 $n \geqslant m \geqslant 1$, 有 $\pi(F_{[m,n]}) = \{\pi_i(F_{m,n}) | 0 \leqslant i \leqslant n\}$, 其中

$$\pi_i(F_{m,n}) = 2n-m+2i \quad (0 \leqslant i \leqslant n). \tag{8.5.14}$$

令

$$\omega(x) = \omega(x, \boldsymbol{y}) = \sum_{k \geqslant 1} y_k x^k, \tag{8.5.15}$$

则对于任何整数 $n \geqslant m \geqslant 1$, $i \geqslant 0$, 记

$$\mathcal{L}_{2n-m+2i} = \left\{\boldsymbol{n} \middle| \boldsymbol{n} \text{ 为 } \partial_x^{2n-m+2i}\omega^n(x) \text{ 中一项的幂向量}\right\}. \tag{8.5.16}$$

对于任何整数 $n \geqslant m \geqslant 1$, $n-1 \geqslant i \geqslant 0$, 记

$$\mathcal{N}_i(m,n) = \left\{\boldsymbol{n} \geqslant \boldsymbol{0} \middle| |\boldsymbol{n}| = n, \pi(\boldsymbol{n}) = 2n-m+2i\right\}. \tag{8.5.17}$$

引理 8.5.6 任给整数 $m, n \geqslant 1$, 有 $\mathcal{N}_i(m,n) = \mathcal{L}_{2n-m+2i}$.

证明　首先, 对 $\forall \boldsymbol{n} \in \mathcal{L}_{2n-m+2i}$, 由

$$\sum_{j\geqslant 1} jn_j = 2n-m+2i$$

和 $|\boldsymbol{n}|=n$, 即可知 $\boldsymbol{n}\in\mathcal{N}_i(m,n)$.

然后, 对 $\forall \boldsymbol{n}\in\mathcal{N}_i(m,n)$, 由 $|\boldsymbol{n}|=n$, 导致

$$\sum_{j\geqslant 1} jn_j = 2n-m+2i,$$

从而也有 $\boldsymbol{n}\in\mathcal{L}_{2n-m+2i}$.　□

对于 $\boldsymbol{y}$ 的任何一个至少 1 次齐多项式 P, 用 $|P|$ 表示将 P 的所有系数取 1 的多项式. 事实上, 推论 8.5.1 意味着, 对于任何整数 $n\geqslant m\geqslant 1$, $|F_i(m,n)|=|\partial_x^{2n-m+2i}\omega^n(x)|(0\leqslant i\leqslant n)$.

引理 8.5.7　任给整数 $m,n\geqslant 1$, 存在一个常数 $\alpha_i^{[m,n]}$, 使得

$$F_i(m,n)=\alpha_i^{[m,n]}\partial_x^{2n-m}\sigma_n(x)=\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{L}_{2n-m+2i}}\frac{\alpha_i^{[m,n]}n!}{\boldsymbol{n}!}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}, \tag{8.5.18}$$

其中 $n=|\boldsymbol{n}|$.

证明　由推论 8.5.1 和函数 $\omega^n(x)$ 的形式, 即可得引理的结论.　□

由此, 我们可直接导出方程式 (8.5.1) 的解, 使得其所有系数都无和的显式.

定理 8.5.2　方程式 (8.5.1) 的解, 记为 f_{Wnt}, 有形式

$$\partial_x^m f_{\mathrm{Wnt}}=\begin{cases}0, & m=0,\\ \displaystyle\sum_{n\geqslant m}\sum_{i=0}^{n}\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{N}_i(m,n)}\frac{\alpha_i^{[m,n]}n!}{n\boldsymbol{n}!}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}, & m\geqslant 1,\end{cases} \tag{8.5.19}$$

其中 $\mathcal{N}_{m,n}$ 由式 (8.5.17) 给出.

证明　由引理 8.5.7 和方程式 (8.5.1) 解的形式, 即得定理的结论.　□

事实上, 以式 (8.5.11) 为基础, 所确定的 $F_{m,n}$ 本身就是一种正项和的形式, 按照 $m+n$ 由小到大的次序, 求得的解如式 (8.5.19) 所示的形式, 自然也得知其中那些系数 $\alpha_i^{[m,n]}$.

例 8.5.1　冬梅以根点次和非根点剖分向量为参数的根同构类. 一个冬梅就是一个平面根树, 允许在一个非根悬挂点处关联至多一个圈. 注意, 这里的根点不

在圈上. 方程式 (8.5.1) 的一个实际意义, 就是 $F_{m,n}$ 提供了根顶点次 m、非根顶点数 n 这种地图按点剖分向量的根同构类数目. 例如, 在图 8.5.1 中,

$$\begin{aligned}(a+b)+(c+d+e) &= (y_1+y_3)+(y_1y_2+y_2y_3+y_2y_3)\\ &= (y_1+y_3)+(y_1y_2+2y_2y_3)\\ &= F_{1,1}+F_{1,2},\end{aligned}$$

$$f+g+h = y_1^2+2y_1y_3+y_3^2 = F_{2,2}.$$

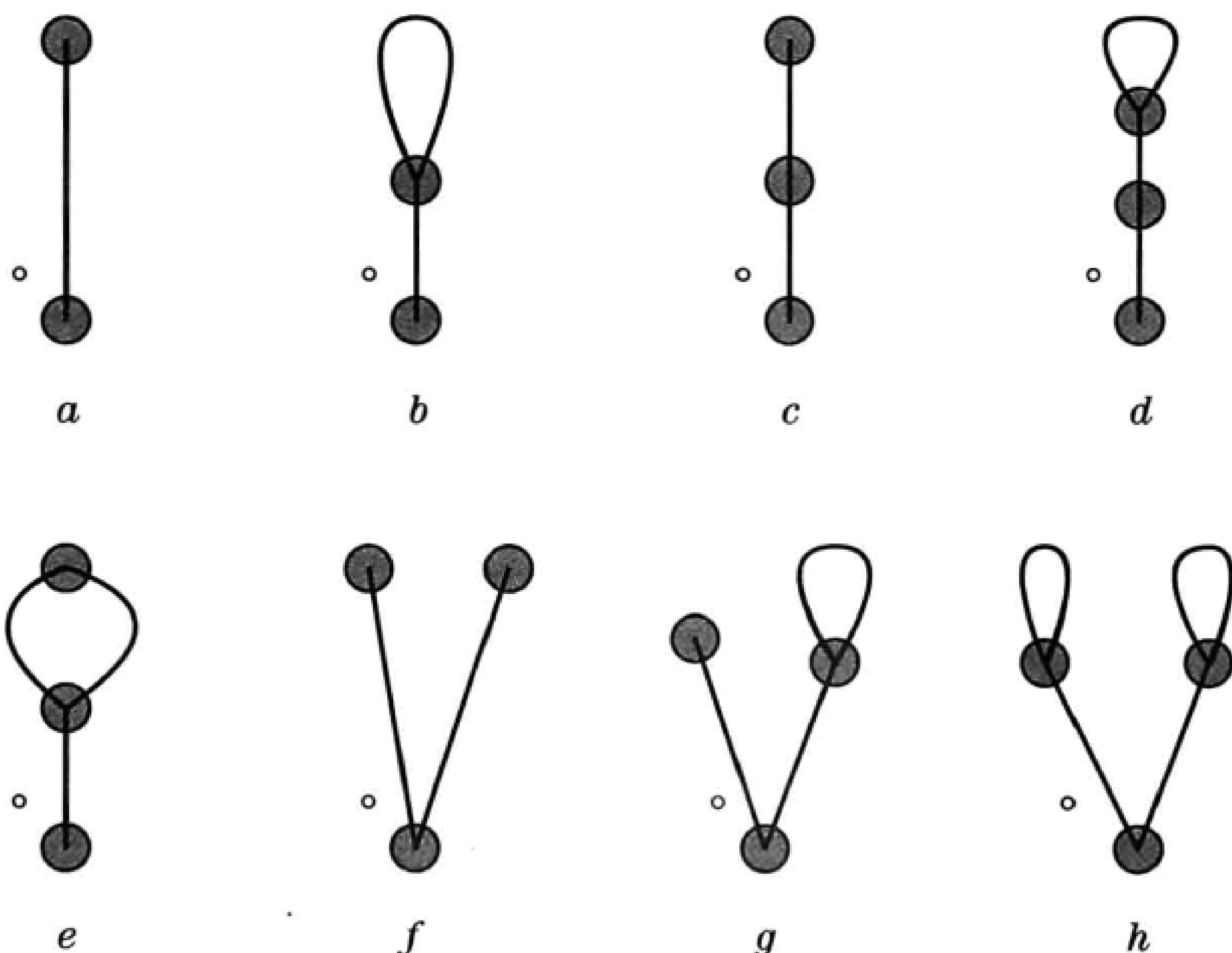


图 8.5.1 非根顶点数为 1～2 的冬梅地图的根同构分类

在图 8.5.2 中,

$$\begin{aligned}a+b+c+(d+f+g)+e &= y_1y_2^2+2y_1y_3^2+y_1^2y_3+(y_2^2y_3+y_2^2y_3+y_2^2y_3)+y_3^3\\ &= y_1y_2^2+2y_1y_3^2+y_1^2y_3+3y_2^2y_3+y_3^3 = F_{1,3},\end{aligned}$$

$$h+i+j+k = y_1^3+3y_1^2y_3+3y_1y_3^2+y_3^3 = (y_1+y_2)^3 = F_{3,3},$$

$$\begin{aligned}(l+m+n)+o+(p+q) &= (2y_1y_2y_3+2y_1y_2y_3+2y_1y_2y_3)\\ &\quad +2y_1^2y_2+(2y_2y_3^2+2y_2y_3^2)\\ &= 6y_1y_2y_3+2y_1^2y_2+4y_2y_3^2 = F_{2,3}.\end{aligned}$$

在图 8.5.3 中,

$$(a+b+c)+(d+e)+h+(f+g)+i+(j+k)+(l+m)$$

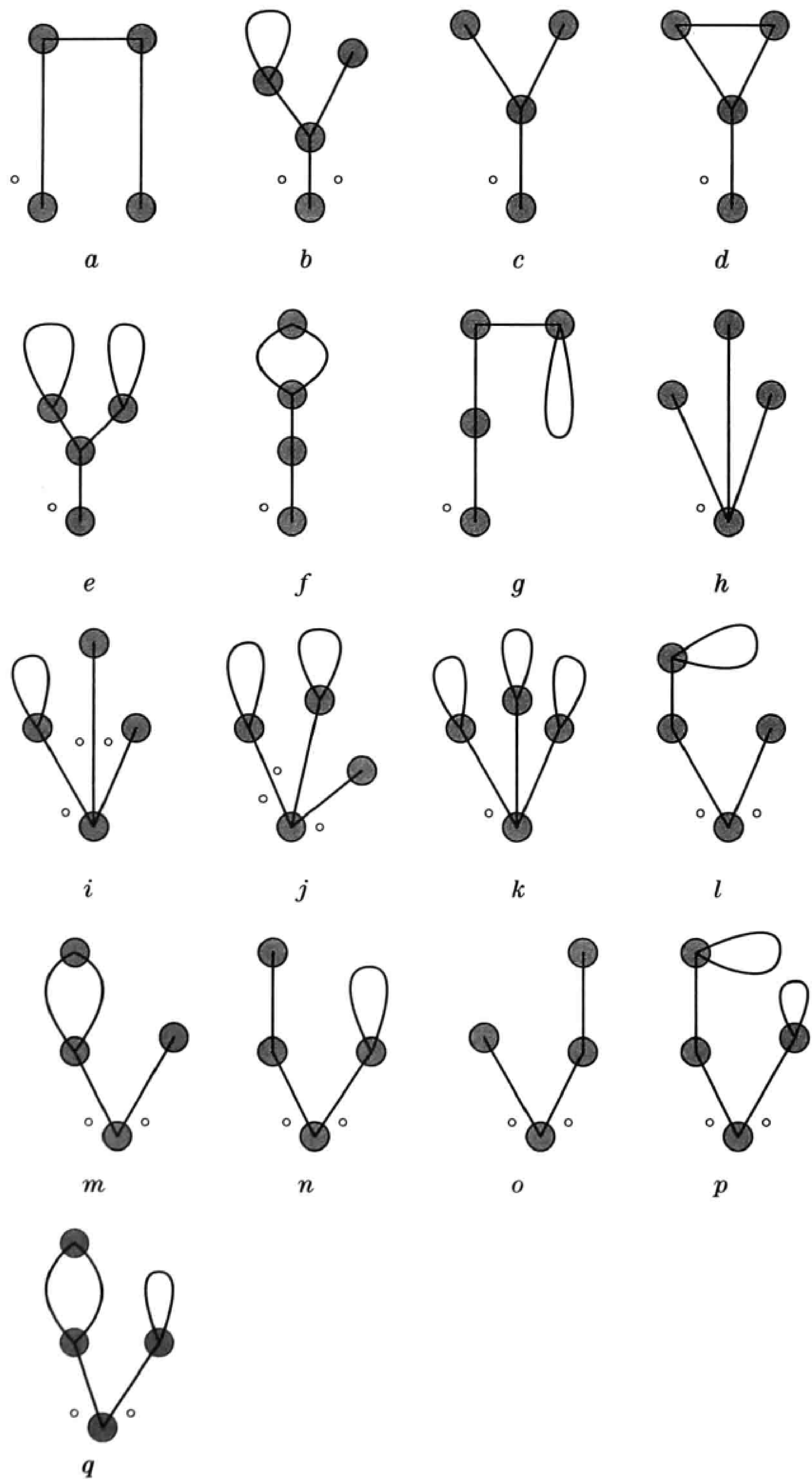


图 8.5.2　非根顶点数为 3 的冬梅地图的根同构分类

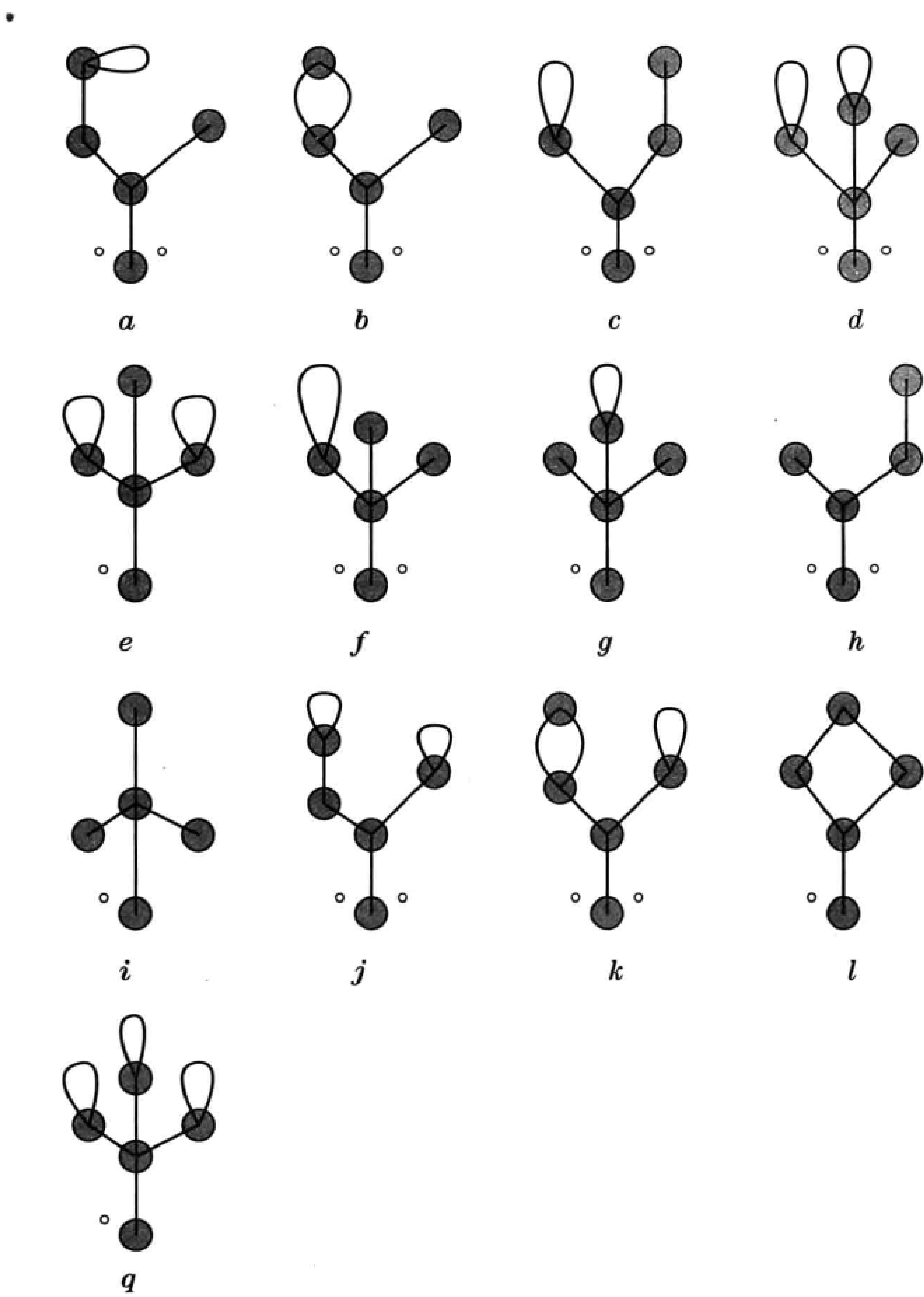


图 8.5.3 非根顶点数为 4 的冬梅地图的根同构分类

$$
\begin{aligned}
&= (2+2+2)y_1y_2y_3^2 + (2+1)y_1y_3^2y_4 + 2y_1^2y_2y_3 + (1+2)y_1^2y_3y_4 \\
&\quad + y_1^3y_4 + (2+2)y_2y_3^2 + y_2^3y_3 + y_3^3y_4 \\
&= 6y_1y_2y_3^2 + 3y_1y_3^2y_4 + 2y_1^2y_2y_3 + 3y_1^2y_3y_4 + y_1^3y_4 + 4y_2y_3^2 + y_2^3y_3 + y_3^3y_4 \\
&= F_{1,4}.
\end{aligned}
$$

8.6　无裂外面型

在文献[30] 中, 可以见到方程

$$\begin{cases} f = x^2 + \int_y \Big(\dfrac{xy\partial_{x,y}(f|_{x=u})}{1-xy}\Big), \\ f|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = 0, \end{cases} \tag{8.6.1}$$

其中 $f \in \mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$.

因为它的一个解与无裂点的外平面地图有关, 故称之为无裂外面型的.

将方程式 (8.6.1) 中介子泛函下的部分在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上作等价变换, 以便展开. 由

$$\begin{aligned} \partial_{x,y}(f|_{x=u}) &= \frac{y(f) - x(f|_{x=y})}{x-y} = \frac{xy}{x-y}\sum_{j\geqslant 0} F_j(x^{j-1} - y^{j-1}) \\ &= xy\sum_{j\geqslant 1} F_j\Big(\sum_{k=0}^{j-2} x^k y^{j-k-2}\Big) = \sum_{k\geqslant 0}\sum_{j\geqslant k+1} F_j x^{k+1} y^{j-k-1}, \end{aligned}$$

有

$$\frac{xy\partial_{x,y}(f|_{x=u})}{1-xy} = \sum_{\substack{k\geqslant 0, j\geqslant k+1 \\ i\geqslant 0}} F_j x^{i+k+2} y^{i+j-k} = \sum_{\substack{i'\geqslant k+2, j\geqslant k+1 \\ k\geqslant 0}} F_j x^{i'} y^{i'+j-2k-2}.$$

由此即可得

$$\begin{aligned} \int_y \Big(\frac{xy\partial_{x,y}(f|_{x=u})}{1-xy}\Big) &= \sum_{\substack{i\geqslant k+2 \\ j\geqslant k+1, k\geqslant 0}} F_j y_{j+i-2k-2} x^i \\ &= \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant i-2 \\ j\geqslant k+1, i\geqslant 2}} F_j y_{j+i-2k-2} x^i \\ &= \sum_{i\geqslant 2}\Big(\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant j-2 \\ 1\leqslant j\leqslant i-1}} + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant i-2 \\ j\geqslant i}}\Big) F_j y_{j+i-2k-2} x^i. \end{aligned} \tag{8.6.2}$$

将式 (8.6.2) 代入方程式 (8.6.1), 就得

$$f = x^2 + \sum_{m\geqslant 2}\Big(\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant j-2 \\ 1\leqslant j\leqslant m-1}} + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant m-2 \\ j\geqslant m}}\Big) F_j y_{m+j-2k-2} x^m. \tag{8.6.3}$$

因为式 (8.6.3) 的右端有一个因子 x, 所以

$$f|_{x=0\Rightarrow \boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=F_0=0$$

是方程式 (8.6.1) 的始条件, 式 (8.6.3) 本身就在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上与方程式 (8.6.1) 等价.

又因为式 (8.6.3) 右端的求和号内带一个因子 x^2, 故

$$F_1=\partial_x^1 f=0.$$

从而, 求方程式 (8.6.3) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中的一个解, 只需要对整数 $m\geqslant 2$, 找到一组在 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 上的函数 F_m, 使得

$$F_m=\begin{cases}1+\Big(\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant j-2\\ 2\leqslant j\leqslant m}}+\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant m-2\\ j\geqslant m+1}}\Big)F_j y_{m+j-2k-2}, & m=2,\\ \Big(\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant j-2\\ 2\leqslant j\leqslant m}}+\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant m-2\\ j\geqslant m+1}}\Big)F_j y_{m+j-2k-2}, & m\geqslant 3.\end{cases} \tag{8.6.4}$$

为了确定 F_m, 还要将它的项按 $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}$ 的幂向量的次, 即 $n=|\boldsymbol{n}|$ 分类. 记 $F_{m,n}$ 为 F_m 中的 n 次项部分, 用 $[F_m]_n$ 表示. 也就是说, $F_{m,n}=[F_m]_n$. 由式 (8.6.4), 当 $n=0$ 时, 对于任何整数 $m\geqslant 2$,

$$F_{m,0}=[F_m]_0=\begin{cases}1, & m=2,\\ 0, & m\geqslant 3.\end{cases} \tag{8.6.5}$$

因此, 只需讨论 $n\geqslant 1$ 时的情形. 又从式 (8.6.4) 可知, 对于任何整数 $n\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}F_{m,n}&=\Big[\Big(\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant j-2\\ 2\leqslant j\leqslant m}}+\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant m-2\\ j\geqslant m+1}}\Big)F_j y_{j+m-2k-2}\Big]_n\\ &=\Big(\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant j-2\\ 2\leqslant j\leqslant m}}+\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant m-2\\ j\geqslant m+1}}\Big)y_{j+m-2k-2}[F_j]_{n-1}\\ &=\Big(\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant j-2\\ 2\leqslant j\leqslant m}}+\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant m-2\\ j\geqslant m+1}}\Big)y_{j+m-2k-2}F_{j,n-1}.\end{aligned} \tag{8.6.6}$$

引理 8.6.1 对于任何整数 $m\geqslant 2$, F_m 与 y_1 无关.

证明 因为在式 (8.6.4) 中, $m\geqslant 2$, $j\geqslant 2$, 且当 $m=2$, $j=2$ 时, $k=0$, 所以 $j+m-2k-1\geqslant 2+2-0-1=2$. 从而, F_m 只可能与 y_l $(l\geqslant 2)$ 有关. □

由引理 8.6.1, 我们只讨论 $\boldsymbol{y}=(y_2,y_3,y_4,\cdots)$ 即可. 先用式 (8.6.4), 看一看 $m=2$ 和 3 时的情形. 对于 $m=2$, 因为在前一个求和部分中,

$$m=2 \quad\Rightarrow\quad j=2 \quad\Rightarrow\quad k=m-2=0,$$

在后一个求和部分中, $k=m-2=0$, 所以

$$F_2=1+F_1y_1+\sum_{j\geqslant 2}F_jy_j=1+F_2y_2+\sum_{j\geqslant 3}F_jy_j$$
$$=\frac{1}{1-y_2}+\sum_{j\geqslant 3}\frac{y_j}{1-y_2}F_j. \tag{8.6.7}$$

在此基础上, 对于整数 $n\geqslant 0$, 即得

$$F_{2,n}=\begin{cases}1, & n=0,\\ y_2, & n=1,\\ y_2^n+\sum\limits_{j\geqslant 3}\sum\limits_{l=0}^{n-2}y_2^l y_j F_{j,n-l-1}, & n\geqslant 2.\end{cases} \tag{8.6.8}$$

对于 $m=3$, 因为在前一个求和部分中,

$$m=3 \quad\Rightarrow\quad 2\leqslant j\leqslant m=3 \quad\Rightarrow\quad 0\leqslant k\leqslant j-2,$$

在后一个求和部分中, $0\leqslant k\leqslant 1$, 所以

$$F_3=\Big(\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant j-2\\ 2\leqslant j\leqslant 2}}+\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 1\\ j\geqslant 3}}\Big)F_jy_{j-2k+1}=F_2y_3+\sum_{j\geqslant 3}F_j(y_{j-1}+y_{j+1})$$
$$=\frac{F_2y_3}{1-y_2-y_4}+\sum_{j\geqslant 3}\frac{y_{j-1}+y_{j+1}}{1-y_2-y_4}F_j. \tag{8.6.9}$$

在此基础上, 对于整数 $n\geqslant 0$, 即得

$$F_{3,n}=\begin{cases}0, & n=0,\\ y_3, & n=1,\\ \sum\limits_{k=0}^{n-1}F_{2,n-k-1}y_3(y_2+y_4)^k+\sum\limits_{\substack{0\leqslant k\leqslant n-2\\ j\geqslant 4}}F_{j,n-k-1}(y_{j-1}+y_{j+1})(y_2+y_4)^k, & n\geqslant 2.\end{cases} \tag{8.6.10}$$

引理 8.6.2　对于任何整数 $m\geqslant 2$, 有

$$F_{m,1}=\begin{cases}y_2, & m=2,\\ y_3, & m=3,\\ y_m, & m\geqslant 4.\end{cases} \tag{8.6.11}$$

证明 当 $m=2,3$ 时, 引理的结论分别由式 (8.6.8) 和式 (8.6.10) 中 $n=1$ 时的情形给出. 对于 $n\geqslant 4$, 由式 (8.6.6), 有

$$\begin{aligned}F_{m,1}&=\Big[\Big(\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant j-2\\2\leqslant j\leqslant m}}+\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant m-2\\j\geqslant m+1}}\Big)y_{j+m-2k-2}F_j\Big]_1\\&=\Big(\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant j-2\\2\leqslant j\leqslant m}}+\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant m-2\\j\geqslant m+1}}\Big)y_{j+m-2k-2}F_{j,0}\\&=\sum_{k=0}^{0}y_{m-2k}F_{2,0}=y_m.\end{aligned}$$

从而, 引理的结论成立. □

在这个引理的证明中, 显示了 $F_{m,1}$ 完全由 $F_{m,0}$ 确定.

定理 8.6.1 方程式 (8.6.1) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中有且仅有一个解.

证明 因为方程式 (8.6.1) 与式 (8.6.4) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上等价, 故只需求出满足式 (8.6.6) 的一组 $F_{m,n}$ $(m\geqslant 2,n\geqslant 0)$.

上面的式 (8.6.5) 和式 (8.6.10) 分别提供了 $n=0$ 和 $n=1$ 时的情形. 引理 8.6.2 自然启示我们, 对于 $n\geqslant 2$, 利用数学归纳法. 假设对于任何整数 $0\leqslant s\leqslant n-1$, $F_{m,s}$ 满足式 (8.6.6), 往求 $F_{m,n}$, 使得它满足式 (8.6.6). 在式 (8.6.6) 的基础上, 通过归纳假设知 $F_{j,n-1}$ $(j\geqslant 2)$ 已被确定, 即求得 $F_{m,n}$ $(n\geqslant 0)$. 由此, 方程式 (8.6.1) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中有一个解.

进而, 由求 $F_{m,n}$ 过程的唯一性, 可知方程式 (8.6.1) 的这个解是仅有的. □

可惜的是这个定理提供的 $F_{m,n}$ 通常总是无限和, 尤其不便实际计算. 为了解决这个问题, 引进一个新的参数 s, 使得对于任何 $\boldsymbol{n}\in\mathcal{L}(F_{m,n})$,

$$s=\sum_{j\geqslant 1}(j+1)n_j\ \ (=\pi(\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}})). \tag{8.6.12}$$

由此得

$$F_{m,n}=\sum_{s\geqslant 0}P_s^{(m,n)}. \tag{8.6.13}$$

事实上, 当 $n=0$ 时, 对于 $m\geqslant 2$, 在 $F_{m,0}$ 中只有一项, 即 $F_{2,0}=1$, 使得 $\pi(F_{2,0})=0$. 还有, 对于任何 $\boldsymbol{n}\geqslant\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{n}\neq\boldsymbol{0}$, 有 $s\geqslant 2$. 由此我们可只讨论 $s\geqslant 2$ 时的情形且不失一般性.

引理 8.6.3 对于任何整数 $n\geqslant 1$, 在 $P_s^{(m,n)}$ 中, $s\equiv m\ (\mathrm{mod}\ 2)$.

证明　首先, 当 $n=1$ 时, 由式 (8.6.11) 因为 $F_{m,1}=y_m$ $(m\geqslant 2)$, 所以 $\pi(F_{m,1})=m$. 从而, $s=m$. 自然, $s\equiv m \pmod 2$.

然后, 考虑 $n\geqslant 2$ 时的一般情形. 对 n 用归纳法, 假设 $\pi(F_{m,l})\equiv m \pmod 2$$(1\leqslant l\leqslant n-1,\ m\geqslant 2)$. 往证, $\pi(F_{m,n})\equiv m \pmod 2$. 由式 (8.6.6), 有

$$\begin{aligned}\pi(F_{m,n})&\equiv(j+m-2k-2)+\pi(F_{j,n-1})\\&\equiv 2j+m-2k-2 \pmod 2\\&\equiv m \pmod 2.\end{aligned}$$

即对于任何整数 $n\geqslant 2$, 在 $P_s^{(m,n)}$ 中, $s\equiv m \pmod 2$, 引理得证. □

由 $F_0=0$, $F_1=0$, 可知 $P_s^{(0,n)}=0$, $P_s^{(1,n)}=0$ $(s\geqslant 0,\ n\geqslant 0)$. 由式 (8.6.5) 知, 对于 $m\geqslant 2$,

$$P_s^{(m,0)}=\begin{cases}1, & m=1,\\ 0, & m\geqslant 3.\end{cases}$$

基于这些, 为了求 $P_s^{(m,n)}$, 我们只讨论 $m\geqslant 2$, $n\geqslant 1$ 和 $s\geqslant 2$(引理 8.6.1) 时的情形即可.

引理 8.6.4　对于任何整数 $m\geqslant 2$, 有 $\min\limits_{\boldsymbol{n}\geqslant\boldsymbol{0}}\{s\,|\,\forall P_s^{(m,n)}\}=m=\pi(F_{m,1})$.

证明　对于任一给定的 $m\geqslant 2$, 有

$$\begin{aligned}&\min_{n\geqslant 1}\{s\,|\,P_s^{(m,n)}\}\\&=\min_{\boldsymbol{n}\geqslant\boldsymbol{0}}\{\pi(\boldsymbol{n})\,|\,\boldsymbol{n}\in\mathcal{L}(F_{m,n}),|\boldsymbol{n}|=n\}\quad(\text{由 }\pi(\boldsymbol{n})\text{ 对 }n\text{ 的单增性})\\&=\min_{\boldsymbol{n}\geqslant\boldsymbol{0}}\{\pi(\boldsymbol{n})\,|\,\boldsymbol{n}\in\mathcal{L}(F_{m,n}),|\boldsymbol{n}|=1\}\quad(\text{由 }\pi(\boldsymbol{n})\text{ 对 }n_j\text{ 和 }j\text{ 的单增性})\\&=\pi(F_{m,1})=m.\end{aligned}$$

由此即得欲证的结论. □

这个引理告诉我们, 若记 P_s 为由 f 中所有满足 $\pi=s$ 项的总和, 则对于 $m\geqslant 2$,

$$P_s=\sum_{l=0}^{\lfloor (s-2)/2\rfloor}x^{s-2l}P_s^{(s-2l,1+l)}\tag{8.6.14}$$

是 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上的一个多项式.

引理 8.6.5　多项式 P_s 与 y_l $(l\geqslant s+1)$ 无关.

证明 用反证法. 假若 P_s 与某 y_l $(l \geqslant s+1)$ 有关, 则存在一项 $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}$, 其中 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3,\cdots)$, 使得 $n_{s+1}>0$. 这就导致

$$\begin{aligned}\pi(\boldsymbol{n}) &= \sum_{j\geqslant 1} jn_j \quad (\text{注意, 这时总有 } n_1=0)\\ &= \sum_{\substack{j\neq s+1\\ j\geqslant 2}} jn_j+(s+1)n_{s+1}\geqslant s+1>s,\end{aligned}$$

与 $s=\pi(\boldsymbol{n})$ 矛盾. □

为了避免向量 $\boldsymbol{y}$ 及其幂 $\boldsymbol{n}$ 的分量下标间不经意地引起混淆, 此后如不特别说明, 总用这个引理证明中所用的 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 的形式. 与前面用的在下标上只差一个错位.

下面看一看, 如何确定 $P_s\in\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}(s\geqslant 2)$.

定理 8.6.2 方程式 (8.6.1) 的解由下面在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上的多项式确定:

$$P_s=\begin{cases} y_2x^2, & s=2,\\ y_3x^3, & s=3,\\ y_4x^4+y_2^2x^2, & s=4,\\ y_sx^s+\displaystyle\sum_{l=1}^{\lfloor (s-2)/2\rfloor} x^{s-2l}P_s^{(s-2l,1+l)}, & s\geqslant 5.\end{cases} \tag{8.6.15}$$

证明 在式 (8.6.14) 的基础上, 可以得到: 当 $s=2$ 时, 由 $l=0$, 得

$$P_2=x^2P_2^{(2,1)}=y_2x^2;$$

当 $s=3$ 时, 由 $l=0$, 得

$$P_3=x^3P_3^{(3,1)}=y_3x^3;$$

当 $s=4$ 时, 由 $l=0,1$, 得

$$P_4=x^4P_4^{(4,1)}+x^2P_4^{(2,2)}=y_4x^4+y_2^2x^2;$$

当 $s=5$ 时, 由 $l=0,1$, 得

$$P_5=x^5P_5^{(5,1)}+x^3P_5^{(3,2)}=y_5x^5+2y_2y_3x^3;$$

当 $s=6$ 时, 由 $l=0,1,2$, 得

$$P_6=x^6P_6^{(6,1)}+x^4P_6^{(4,2)}+x^2P_6^{(2,3)}=y_6x^6+x^4P_6^{(4,2)}+y_2^3x^2,$$

其中 $P_6^{(4,2)}=[F_{4,2}]_6$. 由式 (8.6.6), 知

$$F_4=\Big(\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant j-2\\2\leqslant j\leqslant 4}}+\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2\\j\geqslant 5}}\Big)y_{j-2k+2}F_j$$
$$=y_4F_2+(y_3+y_5)F_3+(y_2+y_4+y_6)F_4+\sum_{j\geqslant 5}(y_{j-2}+y_j+y_{j+2})F_j,$$

即得

$$P_6^{(4,2)}=[y_4F_{2,1}]_6+[y_3F_{3,1}]_6+[y_2F_{4,1}]_6=2y_2y_4+y_3^2.$$

从而, 有

$$P_6=y_6x^6+(2y_2y_4+y_3^2)x^4+y_2^3x^2.$$

一般地, 对于任何整数 $s\geqslant 6$, 因为 $P_s^{(s-2l,1+l)}$ 仅由 $F_{(s-2l,1+l)}$ 确定, 且从上面的讨论知 $F_{(s-2l,1+l)}$ 由 F_m $(m<s-2l)$ 确定, 故根据数学归纳法原理, 由方程式 (8.6.1) 与式 (8.6.4) 的等价性, 即可得欲证的结论. □

虽然式 (8.6.15) 本身已经是一个正项和的形式, 但要考虑 s 的奇偶性带来的一定麻烦, 为了避免这个问题, 可以用参数 $(s+m)/2$(由引理 8.6.3 它总是整数) 将方程式 (8.6.1) 的解表示为

$$\sum_{k\geqslant 0}Q_k\quad \Big(k=\frac{s+m}{2},\ Q_k\in\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}\Big).$$

可以证明所有 Q_k $(k\geqslant 0)$ 都是多项式. 而且, 对于任何整数 $k\geqslant 0$, Q_k 只由 Q_l $(l<k)$ 确定. 因为用的方法与下一节类似, 故暂不在这里赘述.

例 8.6.1　无裂点外平面地图按根点次与点剖分的根同构类. 注意这里的裂点, 是指一个顶点处的半棱可剖分在至少两个连通片中. 在图 8.6.1 中, 提供了与根顶点不关联半棱数 s 不超过 6, 所有这种地图的根同构类. 例如

$$\begin{aligned}
&P_0=a=x^2,\\
&P_1=0,\\
&P_2=b=y_2x^2,\\
&P_3=c=y_3x^3,\\
&P_4=d+e=y_4x^4+y_2^2x^2,\\
&P_5=f+g=y_5x^5+2y_2y_3x^3,\\
&P_6=h+(i+j)+k=y_6x^6+(2y_2y_4+y_3^2)x^4+y_2^3x^2.
\end{aligned}$$

其中 x 的幂为根顶点的次和 y_i $(2\leqslant 2\leqslant 6)$ 的幂为次 i 的非根顶点数. 注意, 这里的 P_s 都与定理 8.6.2 证明中所提供的一致.

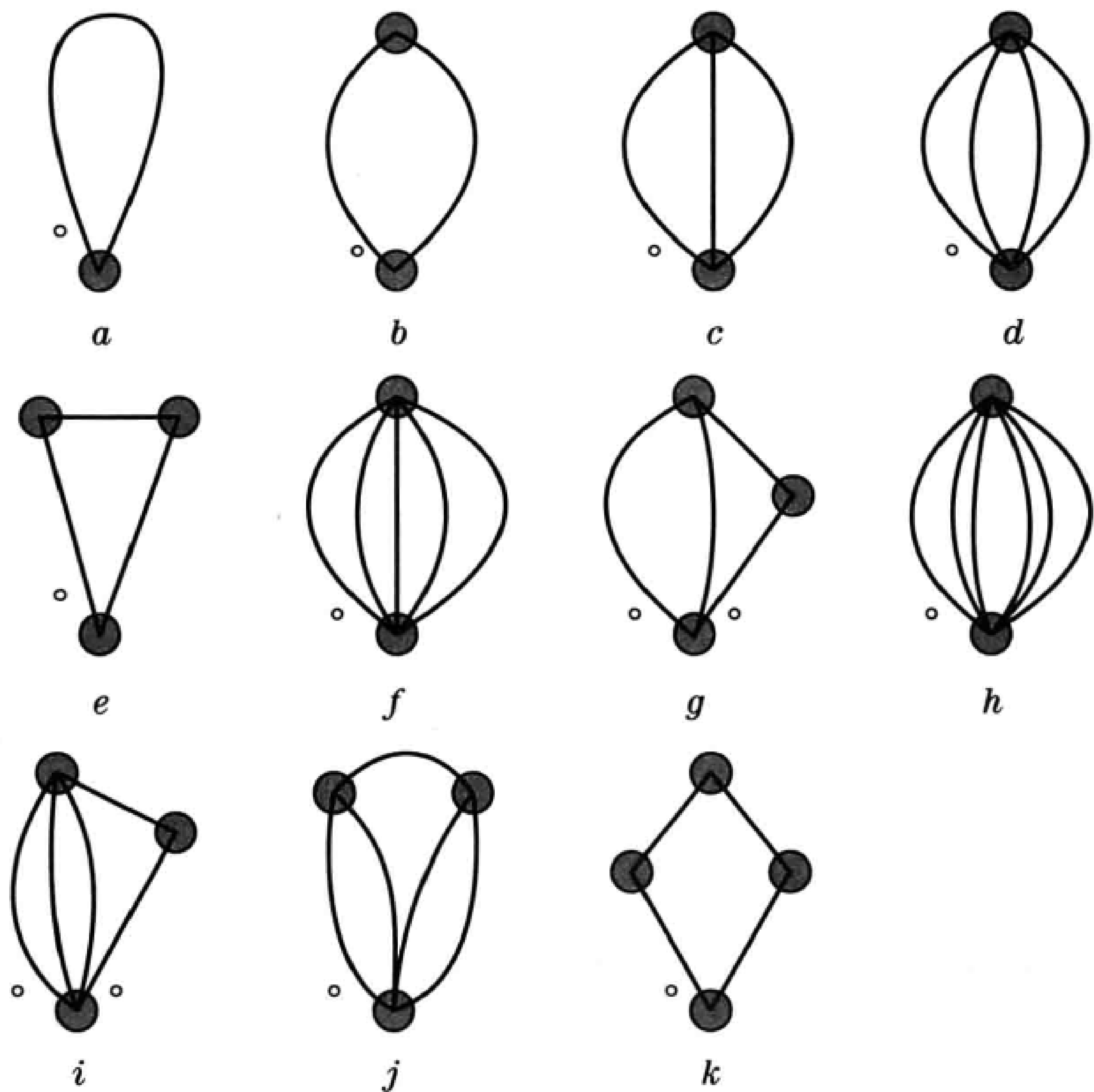


图 8.6.1 根无关半棱数不超过 6 的无裂点外平面地图的根同构类

8.7 受限外面型

在文献[29] 中, 可以见到方程

$$\left\{\begin{array}{l} f = 1 + x^2 f + x\displaystyle\int_y \big(y\delta_{x,y}(uf|_{x=u})\big), \\ f|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = 1, \end{array}\right. \tag{8.7.1}$$

其中 $f \in \mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$. 因为 $f \in \mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 由 $F_m = \partial_x^m f \in \mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}(m \geqslant 0)$ 确定, 所以

$$\begin{aligned} \delta_{x,y}(uf|_{x=u}) &= \sum_{m\geqslant 0} F_m\Big(\frac{x^{m+1} - y^{m+1}}{x - y}\Big) \\ &= \sum_{m\geqslant 0} F_m\Big(\sum_{l=0}^{m} x^l y^{m-l}\Big) = \sum_{l\geqslant 0} x^l \sum_{m\geqslant l} y^{m-l} F_m. \end{aligned}$$

方程 (8.7.1) 的第一式中带介子泛函的项为

$$
\begin{aligned}
x\int_y \big(y\delta_{x,y}(uf|_{x=u})\big) &= \sum_{l\geqslant 0} x^{l+1}\sum_{m\geqslant l} y_{m-l+1}F_m \\
&= \sum_{m\geqslant 1} x^m \sum_{l\geqslant m-1} y_{l-m+2}F_m.
\end{aligned} \tag{8.7.2}
$$

引理 8.7.1　方程式 (8.7.1) 与 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 上的方程组

$$
F_m = \begin{cases} 1, & m=0, \\ \sum\limits_{l\geqslant 0} y_{l+1}F_l, & m=1, \\ F_{m-2}+\sum\limits_{l\geqslant m-1} y_{l-m+2}F_l, & m\geqslant 2 \end{cases} \tag{8.7.3}
$$

等价.

证明　将式 (8.7.2) 代入方程 (8.7.1) 的第一式, 比较两端 x 的同幂项, 即可得式 (8.7.3). 从而, 方程式 (8.7.1) 与方程组式 (8.7.3) 的解之间有一个一一对应. 这就是欲证的结论. □

在式 (8.7.3) 的基础上, 通过 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 中的等价变换, 可得

$$
F_m = \begin{cases} 1, & m=0, \\ \dfrac{1}{1-y_2}\Big(y_1+\sum\limits_{l\geqslant 2} y_{l+1}F_l\Big), & m=1, \\ \dfrac{1}{1-y_2}\Big(F_{m-2}+y_1F_{m-1}+\sum\limits_{l\geqslant m+1} y_{l-m+2}F_l\Big), & m\geqslant 2. \end{cases} \tag{8.7.4}
$$

为方便, 令 $F_{m,n}=[F_m]_n=F_m|_{\boldsymbol{n}=n}$, 即

$$
\sum_{\boldsymbol{n}\geqslant \boldsymbol{0},|\boldsymbol{n}|=n} F_{m,\boldsymbol{n}}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}, \tag{8.7.5}
$$

其中 $F_{m,\boldsymbol{n}}=\partial_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{n}}F_m$ $(m\geqslant 0,\ n\geqslant 0)$.

利用式 (8.7.4), 当 $m=0$ 时, 对于任何整数 $n\geqslant 0$, 有

$$
F_{0,n} = \begin{cases} 1, & n=0, \\ 0, & n\geqslant 1, \end{cases} \tag{8.7.6}
$$

即 $F_{0,n}=\delta_{0,n}$.

对于任何整数 $m \geqslant 0$, 有

$$F_{m,0} = \begin{cases} 1, & m=0, \\ 0, \quad m \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2), & m \geqslant 1, \\ 1, \quad m \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2), & m \geqslant 1, \end{cases} \tag{8.7.7}$$

即 $F_{m,0} = \delta_{m(\mathrm{mod}\ 2),0}$.

当 $m=1$ 时, 由式 (8.7.6), 只需讨论 $n \geqslant 1$, 有

$$F_{1,n} = \left[\frac{y_1}{1-y_2}\right]_n + \sum_{l \geqslant 2} \left[\frac{y_{l+1}}{1-y_2} F_l\right]_n = y_1 y_2^{n-1} + \sum_{l \geqslant 2} y_{l+1} [F_l]_{n-1}.$$

由式 (8.7.4), 即得

$$\begin{aligned} F_{1,1} &= \left[\frac{y_1}{1-y_2}\right]_1 + \sum_{l \geqslant 2} \left[\frac{y_{l+1}}{1-y_2} F_l\right]_1 = y_1 + \sum_{l \geqslant 2} y_{l+1} [F_l]_0 \\ &= y_1 + \sum_{\substack{l \geqslant 2 \\ l \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)}} y_{l+1} = \sum_{i \geqslant 1} y_{2i-1}. \end{aligned}$$

为了求 $F_{1,2}$, 就需要先得到所有 $F_{m,1}$ $(m \geqslant 2)$.

当 $m=2$ 时, 由式 (8.7.7), 也需讨论 $n \geqslant 1$ 时的情形. 由式 (8.7.4), 有

$$\begin{aligned} F_{2,1} &= \left[\frac{F_0}{1-y_2}\right]_1 + \left[\frac{y_1 F_1}{1-y_2}\right]_1 + \sum_{l \geqslant 3} \left[\frac{y_l F_l}{1-y_2}\right]_1 \\ &= y_2 [F_0]_0 + y_1 [F_1]_0 + \sum_{l \geqslant 3} y_l [F_l]_0 = y_2 + \sum_{\substack{l \geqslant 3 \\ l \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)}} y_l = \sum_{i \geqslant 1} y_{2i}. \end{aligned}$$

当 $m=3$ 时, 由式 (8.7.7), $F_{3,0}$ 已经确定, 讨论 $n \geqslant 1$ 时的情形. 由式 (8.7.4), 有

$$\begin{aligned} F_{3,1} &= \left[\frac{F_1}{1-y_2}\right]_1 + \left[\frac{y_1 F_2}{1-y_2}\right]_1 + \sum_{l \geqslant 4} \left[\frac{y_{l-1} F_l}{1-y_2}\right]_1 \\ &= [F_1]_1 + y_1 [F_2]_0 + \sum_{l \geqslant 4} y_{l-1} [F_l]_0 \\ &= \sum_{i \geqslant 1} y_{2i-1} + y_1 + \sum_{i \geqslant 2} y_{2i-1} = 2 \sum_{i \geqslant 1} y_{2i-1}. \end{aligned}$$

引理 8.7.2 对于任何整数 $m \geqslant 1$, 有

$$F_{m,1} = \begin{cases} \dfrac{m}{2} \displaystyle\sum_{i \geqslant 1} y_{2i}, & m \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2), \\ \dfrac{m+1}{2} \displaystyle\sum_{i \geqslant 1} y_{2i-1}, & m \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2). \end{cases} \tag{8.7.8}$$

证明　当 $m=1, 2, 3$ 时, 上面已经得到 $F_{m,1}$. 对于 $m\geqslant 4$, 用式 (8.7.4), 知

$$\begin{aligned}F_{m,1}&=\left[\frac{F_{m-2}}{1-y_2}\right]_1+\left[y_1F_{m-1}\right]_1+\sum_{l\geqslant m+1}\left[\frac{y_{l-m+2}F_l}{1-y_2}\right]_1\\&=F_{m-2,1}+y_2F_{m-2,0}+y_1F_{m-1,0}+\sum_{l\geqslant m+1}y_{m-l+2}F_{l,0}.\end{aligned}$$

由式 (8.7.7), 得

$$F_{m,1}=\begin{cases}\sum\limits_{i\geqslant 1}y_{2i-1}, & m=1,\\ \sum\limits_{i\geqslant 1}y_{2i}, & m=2,\\ 2\sum\limits_{i\geqslant 1}y_{2i-1}, & m=3,\\ F_{m-2,1}+y_2+\sum\limits_{i\geqslant 2}y_{2i}, \quad m\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2), & m\geqslant 4,\\ F_{m-2,1}+y_1+\sum\limits_{i\geqslant 2}y_{2i-1}, \quad m\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2), & m\geqslant 4.\end{cases}$$

在此基础上, 即可导出欲证的结论. □

然后, 由 $F_{m,0}$ 和 $F_{m,1}$, 即可导出 $F_{m,2}$. 例如

$$\begin{aligned}F_{1,2}&=\left[\frac{y_1}{1-y_2}\right]_2+\sum_{l\geqslant 2}\left[\frac{y_{l+1}}{1-y_2}F_l\right]_2=y_1y_2+\sum_{l\geqslant 2}y_{l+1}\left[\frac{F_l}{1-y_2}\right]_1\\&=y_1y_2+\sum_{l\geqslant 2}y_{l+1}(y_2[F_l]_0+[F_l]_1)\\&=y_1y_2+\sum_{\substack{l\geqslant 2\\ l\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)}}y_2y_{l+1}+\sum_{l\geqslant 3}y_{l+1}F_{l,1}\\&=y_1y_2+\sum_{\substack{l\geqslant 2\\ l\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)}}y_2y_{l+1}+\begin{cases}\dfrac{l}{2}\sum\limits_{l\geqslant 3}y_{l+1}\Big(\sum\limits_{i\geqslant 1}y_{2i}\Big), & l\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2),\\ \dfrac{l+1}{2}\sum\limits_{l\geqslant 3}y_{l+1}\Big(\sum\limits_{i\geqslant 1}y_{2i-1}\Big), & l\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2).\end{cases}\end{aligned}$$

利用介子泛函, 即得

$$F_{1,2}=y_1y_2+\sum_{\substack{l\geqslant 2\\ l\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)}}y_2y_{l+1}+\begin{cases}\dfrac{l}{2}\sum\limits_{l\geqslant 3}y_{l+1}\Big(\int_y\dfrac{y^2}{1-y^2}\Big), & l\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2),\\ \dfrac{l+1}{2}\sum\limits_{l\geqslant 3}y_{l+1}\Big(\int_y\dfrac{y}{1-y^2}\Big), & l\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2).\end{cases}\tag{8.7.9}$$

定理 8.7.1 方程式 8.7.1 在 $\mathcal{R}_+\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中有且仅有一个解.

证明 由方程式 8.7.1 的始条件得式 (8.7.7). 从式 (8.7.7) 和式 (8.7.4) 得式 (8.7.8). 这些是 $n=|\boldsymbol{n}|=0$, 1 时的情形. 对于 $n\geqslant 2$ 时的一般情形, 可以先假设 $F_{m,n-1}$ 对于任何 $m\geqslant 1$ 已经被确定, 往证 $F_{m,n}$ 对于任何 $m\geqslant 1$ 可以被确定. 由式 (8.7.3), 有

$$F_{m,n}=\Big[F_{m-2}+\sum_{l\geqslant m-1}y_{l-m+2}F_l\Big]_n=[F_{m-2}]_n+\sum_{l\geqslant m-1}y_{l-m+2}[F_l]_{n-1}.$$

再考虑到 F_m 已经可以由 F_l $(l\leqslant m-1)$ 确定, 即可得 $F_{m,n}$ 由 $F_{m,n-1}$ 和 $F_{m-2,n}$ 确定. 从而, 定理的结论得证. □

虽然这个定理的证明过程本身已经给出了一种求解方式, 但因为 F_m, 甚至 $F_{m,n}$ 都是无穷和, 这带来了实际操作上的麻烦, 故需要进一步考察只通过有限正项和的可能性. 为此, 通过引进一个新的参数, 提供 f 的一种新的表达式.

对于任何一个整向量 $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3,\cdots)$, 记

$$\pi(\boldsymbol{n})=\sum_{i\geqslant 1}in_i. \tag{8.7.10}$$

引理 8.7.3 令 $\mathcal{I}_m$ 为 $F_m(m\geqslant 1)$ 的项中所有幂向量的集合, 则对 $\forall\boldsymbol{n}\in\mathcal{I}_m$, 有 $\pi(\boldsymbol{n})\equiv m(\text{mod } 2)$.

证明 当 $n=0$ 时, 由式 (8.7.7), $F_{m,0}$ 对 $\forall m\geqslant 0$ 都是常数, 这不足道. 对于 $n=1$, 由式 (8.7.8), 可以看出 $m\equiv\pi(\boldsymbol{n})(\text{mod } 2)$. 对于任何整数 $n\geqslant 2$ 时的一般情形, 假若 $m=\pi(F_{m,n-1})(m\geqslant 1)$, $i\equiv\pi(F_{i,n})(\text{mod } 2)$ $(i\leqslant m-1)$, 往证 $m\equiv\pi(F_{m,n})(\text{mod } 2)$. 因为

$$\begin{aligned}F_{m,n}&=[F_{m-2}]_n+\sum_{l\geqslant m-1}y_{l-m+2}[F_l]_{n-1}\\&=F_{m-2,n}+\sum_{l\geqslant m-1}y_{l-m+2}F_{l,n-1},\end{aligned}$$

由归纳假设, 有 $\pi(F_{m-2,n})=m-2\equiv m(\text{mod } 2)$, $(l-m+2)+\pi(F_{l,n-1})=(l-m+2)+l\equiv m(\text{mod } 2)$. 从而, 即得欲证的结论. □

鉴于这个引理, 我们可令 $s=(m+\pi(\boldsymbol{n}))/2$, 使得对于整数 $m\geqslant 1$, s $(s\geqslant 1)$ 是整数. 若记 $H_s=\langle f\rangle_s=f|_{m+\pi(\boldsymbol{n})=2s}$, 则有

$$f=1+\sum_{s\geqslant 1}H_s. \tag{8.7.11}$$

从而, 只要求出所有 H_s $(s\geqslant 1)$, f 自然就被确定了.

由式 (8.7.3), 可以看出

$$H_s=\sum_{m=1}^{2s}x^m\langle F_m\rangle_{2s-m}. \tag{8.7.12}$$

因为对于任何 $\boldsymbol{n}\in\mathcal{I}(H_s)$, $\pi(\boldsymbol{n})\leqslant 2s-1$, 故有

$$H_s\in\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}_{2s-1}\}, \tag{8.7.13}$$

其中 $\boldsymbol{y}_{2s-1}=(y_1,y_2,\cdots,y_{2s-1})$ 是一个有限维向量.

引理 8.7.4　对于任何整数 $s\geqslant 1$, H_s 是 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}_{2s-1}\}$ 上的至多 $2s$ 次多项式.

证明　因为 $\boldsymbol{n}_{2s-1}\geqslant\boldsymbol{0}$, 故对于任何整数 $1\leqslant m\leqslant 2s$, 有

$$\max\{|\boldsymbol{n}|\,|\,\pi(\boldsymbol{n})=2s-m,\ \boldsymbol{n}\in\mathcal{I}(F_m)\}=|(2s-m,0,0,\cdots,0)_{2s-1}|=2s-m.$$

在式 (8.7.12) 中, 每一项 $x^m\langle F_m\rangle_{2s-m}$ 都是一个至多 $2s$ 次多项式. 从而, 即得欲证的结论. □

由式 (8.7.12) 和式 (8.7.3), 对于任何整数 $s\geqslant 1$, 有

$$\begin{aligned}H_s&=x\Big\langle\sum_{l\geqslant 0}y_{l+1}F_l\Big\rangle_{2s-1}+\sum_{m=2}^{2s}x^m\Big\langle F_{m-2}+\sum_{l\geqslant m-1}y_{l-m+2}F_l\Big\rangle_{2s-m}\\&=x\sum_{l=0}^{2s-2}y_{l+1}\langle F_l\rangle_{2s-l-2}+\sum_{m=2}^{2s}x^m\Big(\langle F_{m-2}\rangle_{2s-m}+\sum_{l=m-1}^{2s-2}y_{l-m+2}\langle F_l\rangle_{2s-l-2}\Big).\end{aligned}$$

用式 (8.7.7), 即得

$$\begin{aligned}H_s=&\,x\sum_{l=0}^{2s-2}y_{l+1}\langle F_l\rangle_{2s-l-2}\\&+\sum_{m=2}^{2s-1}x^m\Big(\langle F_{m-2}\rangle_{2s-m}+\sum_{l=m-1}^{2s-2}y_{l-m+2}\langle F_l\rangle_{2s-l-2}\Big)+x^{2s}.\end{aligned} \tag{8.7.14}$$

例如, 根据式 (8.7.14), 可以求得 H_s $(0\leqslant s\leqslant 2)$.

首先, 由方程式 (8.7.1) 的始条件, $H_0=1$. 对于 $s=1$, 有

$$H_1=xy_1\langle F_0\rangle_0+x^2=xy_1+x^2.$$

对于 $s=2$, 有

$$H_2=x\sum_{l=0}^{2}y_{l+1}\langle F_l\rangle_{2-l}+\sum_{m=2}^{3}x^m\Big(\langle F_{m-2}\rangle_{4-m}+\sum_{l=m-1}^{2}y_{l-m+2}\langle F_l\rangle_{2-l}\Big)+x^4$$

$$= x(y_1\langle F_0\rangle_2 + y_2\langle F_1\rangle_1 + y_3\langle F_2\rangle_0) + x^2\Big(\langle F_0\rangle_2 + \sum_{l=1}^{2} y_l\langle F_l\rangle_{2-l}\Big)$$

$$+ x^3\Big(\langle F_1\rangle_1 + \sum_{l=2}^{2} y_{l-1}\langle F_l\rangle_{2-l}\Big) + x^4$$

$$= x(y_2\langle F_1\rangle_1 + y_3\langle F_2\rangle_0) + x^2(y_1\langle F_1\rangle_1 + y_2\langle F_2\rangle_0) + x^3(y_1 + y_1\langle F_2\rangle_0) + x^4$$

$$= x(y_1y_2 + y_3) + x^2(y_1^2 + y_2) + 2x^3(y_1) + x^4.$$

这些结果, 将会在下面的实例中得到验证. 对于 $s \geqslant 3$ 时的一般情形, 从式 (8.7.14) 可以看出, 为了确定 H_s, 只需求出 $\langle F_m\rangle_t$ $(0 \leqslant m, t \leqslant 2(s-1))$. 由式 (8.7.3), 当 $m=1$ 时,

$$\langle F_1\rangle_t = \sum_{l\geqslant 0}\langle y_{l+1}F_l\rangle_t = \sum_{l\geqslant 0} y_{l+1}\langle F_l\rangle_{t-l-1} = \sum_{l=0}^{t-1} y_{l+1}\langle F_l\rangle_{t-l-1};$$

当 $m \geqslant 2$ 时,

$$\begin{aligned}\langle F_m\rangle_t &= \langle F_{m-2}\rangle_t + \sum_{l\geqslant m-1}\langle y_{l-m+2}F_l\rangle_t\\ &= \langle F_{m-2}\rangle_t + \sum_{l\geqslant m-1} y_{l-m+2}\langle F_l\rangle_{t-l+m-2}\\ &= \langle F_{m-2}\rangle_t + \sum_{l=m-1}^{t+m-2} y_{l-m+2}\langle F_l\rangle_{t-l+m-2}\\ &= \langle F_{m-2}\rangle_t + \sum_{i=0}^{t-1} y_{i+1}\langle F_l\rangle_{t-i-1}.\end{aligned}$$

从而, 对于任何整数 $m, t \geqslant 1$, 有

$$\langle F_m\rangle_t = \langle F_{m-2}\rangle_t + \sum_{l=0}^{t-1} y_{l+1}\langle F_l\rangle_{t-l-1}. \tag{8.7.15}$$

注意, 对任何整数 $m < 0$, $\langle F_m\rangle_t = 0$.

事实上, 所有 $\langle F_m\rangle_t$ $(m, t \geqslant 0)$, 都可用式 (8.7.15), 从 $\langle F_0\rangle_0 = 1$ 开始, 递推地导出. 因此我们在下面可将 $\langle F_m\rangle_t$ $(m, t \geqslant 0)$ 视为已知量.

定理 8.7.2 方程式 (8.7.1) 的解由如下的有限正项和形式确定:

$$H_s = \begin{cases} 1, & s = 0,\\ x^{2s} + \displaystyle\sum_{m=1}^{2s-1}\Big(\langle F_{m-2}\rangle_{2s-m} + \Sigma\Big)x^m, & s \geqslant 1,\end{cases} \tag{8.7.16}$$

其中

$$\Sigma = \sum_{i=0}^{2s-m-1} y_{i+1}\langle F_{i+m-1}\rangle_{2s-i-m-1}.$$

证明　由方程式 (8.7.1), 得式 (8.7.16) 中 $s=0$ 时的情形. 对于 $s\geqslant 1$, 因为

$$\begin{aligned}\sum_{l\geqslant m-1}\langle y_{l-m+2}F_l\rangle_{2s-m} &= \sum_{l\geqslant m-1} y_{l-m+2}\langle F_l\rangle_{2s-l-2}\\ &= \sum_{l=m-1}^{2s-2} y_{l-m+2}\langle F_l\rangle_{2s-l-2}\\ &= \sum_{i=0}^{2s-m-1} y_{i+1}\langle F_{i+m-1}\rangle_{2s-i-m-1},\end{aligned}$$

故由式 (8.7.12), 有

$$H_s = x^{2s} + \sum_{m=1}^{2s-1}\Big(\langle F_{m-2}\rangle_{2s-m} + \sum_{i=0}^{2s-m-1} y_{i+1}\langle F_{i+m-1}\rangle_{2s-i-m-1}\Big)x^m.$$

从而, 式 (8.7.16) 成立. □

例 8.7.1　受限外平面地图的点剖分根同构类. 一个外平面根地图称为受限的, 是指在根环的内部无自环, 而且收缩根棱也不会出现根环内有自环的情形 (根不在 s ($\geqslant 3$)− 重棱上).

由图 8.7.1, 可以看出: $H_1 = a+d = xy_1 + x^2$, $H_2 = (b+c)+(e+f)+(2g)+h = x(y_1y_2+y_3)+x^2(y_1^2+y_2)+2x^3(y_1)+x^4$.

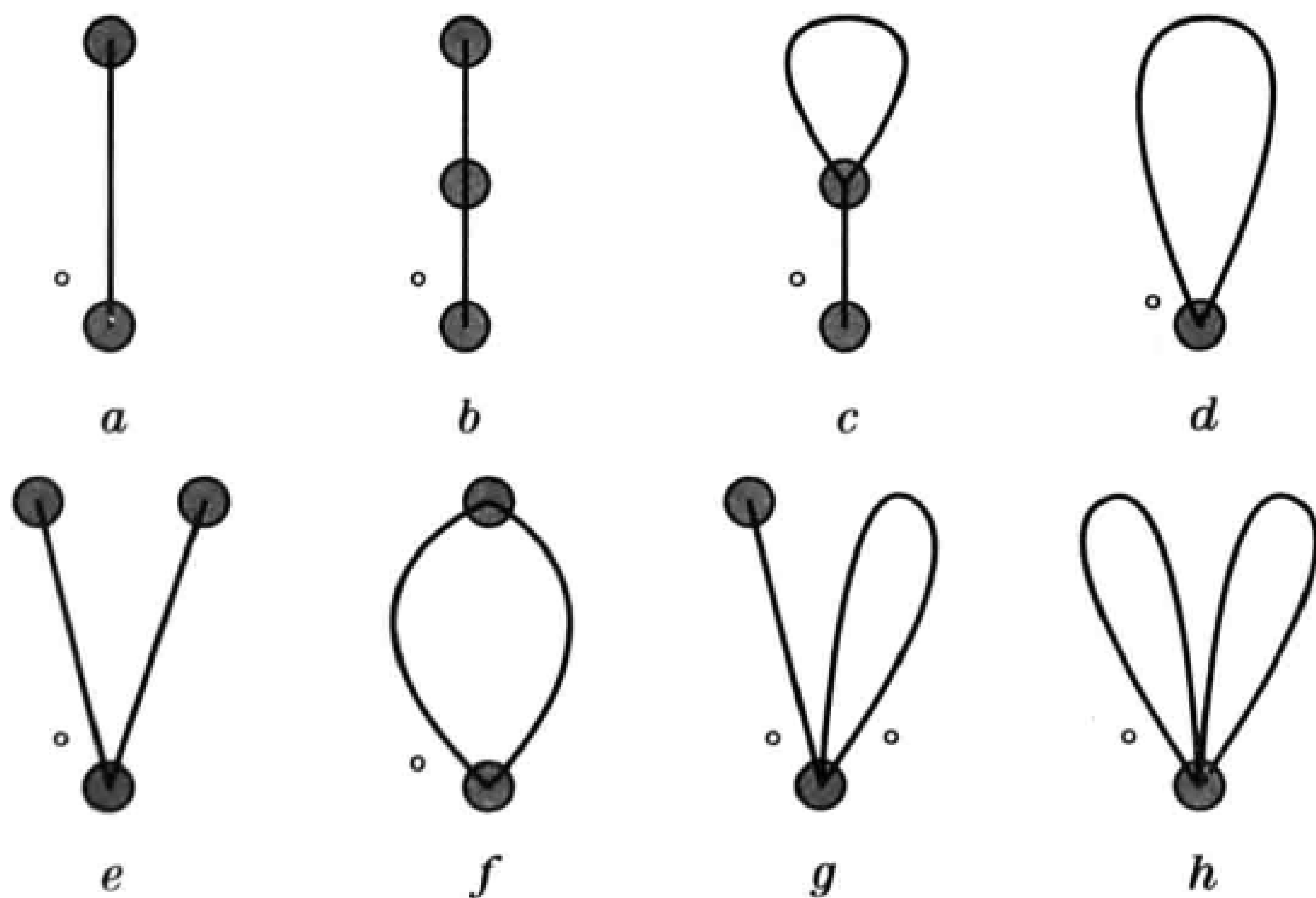


图 8.7.1　棱数不超过 2 的受限外平面地图的点剖分根同构类

8.8 普通外面型

现在, 考虑关于 g 的方程

$$\begin{cases} g = 1 + x^2\varphi(x)g + x\int_y \big(y\delta_{x,y}(ug|_{x=u})\big), \\ g|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = 1, \end{cases} \tag{8.8.1}$$

其中 $\varphi(x) \in \mathcal{R}_+\{x\}$ 使得对任何整数 $n \geqslant 0$, $\phi_m = \partial_x^m \varphi \in \mathcal{R}_+$ 且 $\phi_{2i+1} = 0(i \geqslant 0)$.

因为 $g \in \mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 由 $G_m = \partial_x^m g \in \mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}(m \geqslant 0)$ 确定, 所以

$$\begin{aligned} \delta_{x,y}(ug|_{x=u}) &= \sum_{m\geqslant 0} G_m\Big(\frac{x^{m+1}-y^{m+1}}{x-y}\Big) = \sum_{m\geqslant 0} G_m\Big(\sum_{l=0}^{m} x^l y^{m-l}\Big) \\ &= \sum_{l\geqslant 0} x^l \sum_{m\geqslant l} y^{m-l} G_m. \end{aligned}$$

方程 (8.8.1) 的第一式中带介子泛函的项为

$$\begin{aligned} x\int_y \big(y\delta_{x,y}(ug|_{x=u})\big) &= \sum_{l\geqslant 0} x^{l+1} \sum_{m\geqslant l} y_{m-l+1} G_m \\ &= \sum_{m\geqslant 1} x^m \sum_{l\geqslant m-1} y_{l-m+2} G_m. \end{aligned} \tag{8.8.2}$$

引理 8.8.1 方程式 (8.8.1) 与 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 上的方程组

$$G_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ \sum_{l\geqslant 0} y_{l+1} G_l, & m = 1, \\ \sum_{i=0}^{m-2} \phi_i G_{m-i-2} + \sum_{l\geqslant m-1} y_{l-m+2} G_l, & m \geqslant 2 \end{cases} \tag{8.8.3}$$

等价.

证明 将式 (8.8.2) 代入方程 (8.8.1) 的第一式, 比较两端 x 的同幂项, 即可得式 (8.8.3). 从而, 方程式 (8.8.1) 与方程组式 (8.8.3) 的解之间有一个一一对应. 这就是欲证的结论. □

在式 (8.8.3) 的基础上, 通过 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 中的等价变换, 可得

$$G_m = \begin{cases} 1, & m=0, \\ \dfrac{1}{1-y_2}\Big(y_1 + \sum\limits_{l\geqslant 2} y_{l+1}G_l\Big), & m=1, \\ \dfrac{1}{1-y_2}\Big(\sum\limits_{i=0}^{m-2}\phi_i G_{m-i-2} + y_1 G_{m-1} + \sum\limits_{l\geqslant m+1} y_{l-m+2}G_l\Big), & m\geqslant 2. \end{cases} \tag{8.8.4}$$

为方便, 令 $G_{m,n} = [G_m]_n = G_{m,|\boldsymbol{n}|=n}$, 即

$$G_{m,n} = \sum_{\substack{\boldsymbol{n}\geqslant 0\\ |\boldsymbol{n}|=n}} G_{m,\boldsymbol{n}}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}, \tag{8.8.5}$$

其中 $G_{m,\boldsymbol{n}} = \partial_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{n}} G_m \in \mathcal{R}_+$ $(m\geqslant 0,\ n\geqslant 0)$.

利用式 (8.8.4), 当 $m=0$ 时, 对于任何整数 $n\geqslant 0$, 有

$$G_{0,n} = \begin{cases} 1, & n=0, \\ 0, & n\geqslant 1, \end{cases} \tag{8.8.6}$$

即 $G_{0,n} = \delta_{0,n}$.

对于任何整数 $m\geqslant 0$, 有

$$G_{m,0} = \begin{cases} 1, & m=0, \\ 0, & m=1, \\ \sum\limits_{i=0}^{p-1}\phi_{2i}G_{2p-2-2i,0}, & m=2p, p\geqslant 1, m\geqslant 2, \\ 0, & m\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2), \\ m\geqslant 2. \end{cases} \tag{8.8.7}$$

因为对于任何整数 $m\geqslant 2$, $G_{m,0}$ 只依赖 $G_{l,0}$ $(l\leqslant m-1)$, 所以式 (8.8.7) 是适定的.

当 $m=1$ 时, 由式 (8.8.6), 只需讨论 $n\geqslant 1$ 时的情形. 由式 (8.8.4) 有

$$G_{1,n} = \left[\frac{y_1}{1-y_2}\right]_n + \sum_{l\geqslant 2}\left[\frac{y_{l+1}}{1-y_2}G_l\right]_n = y_1 y_2^{n-1} + \sum_{l\geqslant 2} y_{l+1}[G_l]_{n-1}.$$

由此即得

$$\begin{aligned} G_{1,1} &= \left[\frac{y_1}{1-y_2}\right]_1 + \sum_{l\geqslant 2}\left[\frac{y_{l+1}}{1-y_2}G_l\right]_1 \\ &= y_1 + \sum_{l\geqslant 2} y_{l+1}[G_l]_0 = y_1 + \sum_{\substack{l\geqslant 2\\ l\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)}} G_{l,0}y_{l+1}. \end{aligned}$$

为了求 $G_{1,2}$, 就需要先得到所有 $G_{m,1}$ $(m\geqslant 2)$.

当 $m=2$ 时, 由式 (8.8.7), 也需讨论 $n\geqslant 1$ 时的情形. 由式 (8.8.4), 有

$$\begin{aligned}G_{2,1}&=\left[\frac{\phi_0G_0}{1-y_2}\right]_1+\left[\frac{y_1G_1}{1-y_2}\right]_1+\sum_{l\geqslant 3}\left[\frac{y_lG_l}{1-y_2}\right]_1\\&=\phi_0y_2+y_1[G_1]_0+\sum_{l\geqslant 3}y_l[G_l]_0\\&=\phi_0y_2+\sum_{i\geqslant 2}G_{2i,0}y_{2i}.\end{aligned}$$

当 $m=3$ 时, 由式 (8.8.7), $G_{3,0}$ 已经确定, 讨论 $n\geqslant 1$ 时的情形. 由式 (8.8.4), 有

$$\begin{aligned}G_{3,1}&=\left[\sum_{i=0}^{1}\frac{\phi_iG_{1-i}}{1-y_2}\right]_1+\left[\frac{y_1G_2}{1-y_2}\right]_1+\sum_{l\geqslant 4}\left[\frac{y_{l-1}G_l}{1-y_2}\right]_1\\&=y_2(\phi_0G_{1,0}+\phi_1G_{0,0})+(\phi_0G_{1,1}+\phi_1G_{0,1})+y_1[G_2]_0+\sum_{l\geqslant 4}y_{l-1}[G_l]_0\\&=\phi_1y_2+\phi_0(y_1+\sum_{i\geqslant 1}G_{2i,0}y_{2i+1})+y_1[G_2]_0+\sum_{i\geqslant 2}G_{2i,0}y_{2i-1}\\&=2\phi_0y_1+\sum_{i\geqslant 1}(\phi_0G_{2i,0}+G_{2i+1})y_{2i+1}.\end{aligned}$$

引理 8.8.2 对于任何整数 $m\geqslant 1$, 有

$$G_{m,1}=\begin{cases}y_1+\sum\limits_{i\geqslant 1}G_{2i,0}y_{2i+1}, & m=1,\\ \phi_0y_2+\sum\limits_{i\geqslant 2}G_{2i,0}y_{2i}, & m=2,\\ 2\phi_0y_1+\sum\limits_{i\geqslant 1}(\phi_0G_{2i,0}+G_{2i+1})y_{2i+1}, & m=3,\\ y_1G_{m-1,0}+\sum\limits_{\substack{0\leqslant l\leqslant m-2\\ l\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)}}\phi_l(y_2G_{m-2-l,0}+G_{m-2-l,1}) & \\ \quad+\sum\limits_{\substack{l\geqslant m+1\\ l\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)}}y_{l-m+2}G_{l,0}, & m\geqslant 4.\end{cases}\tag{8.8.8}$$

证明 当 $m=1,\ 2,\ 3$ 时, 上面已经得到 $G_{m,1}$. 因为 $\phi_{2i-1}=0$ $(i\geqslant 1)$, 所以

$$\sum_{l=0}^{m-2}\phi_lG_{m-2-l}=\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{p-1}\phi_lG_{2p-2-2i}, & m=2p,\ p\geqslant 2,\\ 0, & m=2p+1,\ p\geqslant 2.\end{cases}$$

对于 $m \geqslant 4$, 用式 (8.8.4), 有

$$\begin{aligned}G_{m,1} &= \left[\sum_{l=0}^{m-2}\frac{\phi_l G_{m-2-l}}{1-y_2}\right]_1 + \left[y_1 G_{m-1}\right]_1 + \sum_{l\geqslant m+1}\left[\frac{y_{l-m+2}G_l}{1-y_2}\right]_1 \\ &= \sum_{\substack{0\leqslant l\leqslant m-2\\ l\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)}} \phi_l(y_2[G_{m-2-l}]_0 + [G_{m-2-l}]_1) + y_1[G_{m-1}]_0 + \sum_{l\geqslant m+1} y_{l-m+2}[G_l]_0 \\ &= \sum_{\substack{0\leqslant l\leqslant m-2\\ l\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)}} \phi_l(y_2 G_{m-2-l,0} + G_{m-2-l,1}) + y_1 G_{m-1,0} + \sum_{l\geqslant m+1} y_{l-m+2}G_{l,0}.\end{aligned}$$

再考虑到式 (8.8.7), $G_{l,0}=0$, $l\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$, 即得式 (8.8.8) 的第四式.

假若对于任何整数 $s\leqslant m-1$, $G_{s,1}$ 已经得到. 在此基础上, 往求 $G_{m,1}$. 因为上式右端的所有项都只与 $G_{s,1}$ $(s\leqslant m-1)$ 和 $G_{m,0}$ $(m\geqslant 1)$ 有关, 所以由归纳的前提条件, 利用式 (8.8.7), 可求出 $G_{m,1}$.

从而, 根据归纳法原理, 即得欲证的结论. □

然后, 由 $G_{m,0}$ 和 $G_{m,1}$, 还可导出 $G_{m,2}$. 例如

$$\begin{aligned}G_{1,2} &= \left[\frac{y_1}{1-y_2}\right]_2 + \sum_{l\geqslant 2}\left[\frac{y_{l+1}G_l}{1-y_2}\right]_2 \\ &= y_1y_2 + \sum_{l\geqslant 2} y_{l+1}\left[\frac{G_l}{1-y_2}\right]_1 \\ &= y_1y_2 + \sum_{l\geqslant 2} y_{l+1}(y_2[G_l]_0 + [G_l]_1) \\ &= y_1y_2 + \sum_{l\geqslant 2} y_{l+1}(y_2G_{l,0} + G_{l,1}).\end{aligned}$$

利用式 (8.8.7), 得

$$G_{1,2} = y_1y_2 + \sum_{p\geqslant 1} G_{2p,0}y_2y_{l+1} + \sum_{l\geqslant 2} G_{l,1}y_{l+1}. \tag{8.8.9}$$

进一步, 用式 (8.8.7) 和式 (8.8.8), 即可求出 $G_{1,2}$.

定理 8.8.1 方程式 (8.8.1) 在式 $\mathcal{R}_+\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中有且仅有一个解.

证明 由方程式 (8.8.1) 的始条件, 得式 (8.8.6). 从式 (8.8.7) 和式 (8.8.4) 得式 (8.8.8). 这些是 $n=|\boldsymbol{n}|=0$ 和 1 时的情形. 对于 $n\geqslant 2$ 时的一般情形, 可以先假设 $G_{m,n-1}$ 对于任何 $m\geqslant 1$ 已经被确定, 往证 $G_{m,n}$ 对于任何 $m\geqslant 1$ 可以被确

定. 由式 (8.8.3), 有

$$G_{m,n}=\left[\sum_{i=1}^{m-2}\phi_iG_{m-i-2}+\sum_{l\geqslant m-1}y_{l-m+2}G_l\right]_n$$
$$=\left[\sum_{i=1}^{m-2}\phi_iG_{m-i-2}\right]_n+\sum_{l\geqslant m-1}y_{l-m+2}[G_l]_{n-1}.$$

再考虑到 G_m 已经可以由 G_l $(l\leqslant m-1)$ 确定, 即可得 $G_{m,n}$ 由 $G_{m,n-1}$ 和 $G_{m-i-2,n}$ $(1\leqslant i\leqslant m-2)$ 确定. 从而, 定理的结论得证. □

虽然这个定理的证明过程本身已经暗示了一种求解方式, 但因为 G_m, 甚至 $G_{m,n}$ 都是无穷和, 这带来了实际操作上的麻烦, 需要进一步考察如何通过有限正项和实现. 为此, 引进一个新的参数, 以提供 g 的一种新的表达式.

对于任何一个整向量 $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3,\cdots)$, 记

$$\pi(\boldsymbol{n})=\sum_{i\geqslant1}in_i. \tag{8.8.10}$$

引理 8.8.3 令 $\mathcal{I}_m$ 为在 G_m $(m\geqslant1)$ 的项中所有幂向量的集合, 则对于任何 $\boldsymbol{n}\in\mathcal{I}_m$, 有 $\pi(\boldsymbol{n})\equiv m(\text{mod }2)$.

证明 当 $n=0$ 时, 由式 (8.8.7), 对于任何 $m\geqslant0$, $G_{m,0}$ 都是常数, 不足道. 对于 $n=1$, 从式 (8.8.8), 可以看出 $m\equiv\pi(\boldsymbol{n})(\text{mod }2)$. 对于任何整数 $n\geqslant2$ 时的一般情形, 假设 $m\equiv\pi(G_{m,n-1})(\text{mod }2)(m\geqslant1)$, $i\equiv\pi(G_{i,n})(\text{mod }2)(i\leqslant m-1)$, 往证 $m\equiv\pi(G_{m,n})(\text{mod }2)$. 因为

$$G_{m,n}=\Big[\sum_{l=0}^{m-2}\frac{\phi_lG_{m-2-l}}{1-y_2}\Big]_n+\sum_{m\neq l\geqslant m-1}y_{l-m+2}[G_l]_{n-1}$$
$$=\sum_{\substack{0\leqslant l\leqslant m-2\\ l\equiv0(\text{mod }2)}}\phi_l\Big(\sum_{i=0}^{n}y_2^i[G_{m-2-l}]_{n-i}\Big)+\sum_{l\geqslant m-1}y_{l-m+2}G_{l,n-1}$$
$$=\sum_{\substack{0\leqslant l\leqslant m-2\\ l\equiv0(\text{mod }2)}}\phi_l\Big(\sum_{i=0}^{n}y_2^iG_{m-2-l,n-i}\Big)+\sum_{l\geqslant m-1}y_{l-m+2}G_{l,n-1},$$

由归纳假设, 有

$$\pi(2^iG_{m-2-l})=2i+\pi(G_{m-2-l})=\pi(G_{m-2-l})=m-l\equiv m(\text{mod }2),$$
$$\pi(y_{l-m+2}G_{l,n-1})=(l-m+2)+\pi(G_{l,n-1})=(l-m+2)+l\equiv m(\text{mod }2).$$

从而, 即得欲证的结论. □

鉴于这个引理, 我们可令 $s=(m+\pi(\boldsymbol{n}))/2$, 使得对于整数 $m\geqslant 1$, s $(s\geqslant 1)$ 是整数. 若记 $H_s=\langle g\rangle_s=g|_{m+\pi(\boldsymbol{n})=2s}$, 则有

$$g=1+\sum_{s\geqslant 1}H_s. \tag{8.8.11}$$

从而, 只要求出所有 H_s $(s\geqslant 1)$, g 自然就被确定了.

由式 (8.8.3), 可以看出

$$H_s=\sum_{m=1}^{2s}x^m\langle G_m\rangle_{2s-m}. \tag{8.8.12}$$

因为对于任何 $\boldsymbol{n}\in\mathcal{I}(H_s)$, $\pi(\boldsymbol{n})\leqslant 2s-1$, 故有

$$H_s\in\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}_{2s-1}\}, \tag{8.8.13}$$

其中 $\boldsymbol{y}_{2s-1}=(y_1,y_2,\cdots,y_{2s-1})$ 是一个有限维的向量.

引理 8.8.4　对于任何整数 $s\geqslant 1$, H_s 是 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}_{2s-1}\}$ 上至多 $2s$ 次的一个多项式.

证明　由 $\boldsymbol{n}_{2s-1}\geqslant\boldsymbol{0}$, 对于任何整数 $1\leqslant m\leqslant 2s$, 有

$$\max\{|\boldsymbol{n}|\,|\,\pi(\boldsymbol{n})=2s-m,\ \boldsymbol{n}\in\mathcal{I}(G_m)\}=|(2s-m,0,0,\cdots,0)_{2s-1}|=2s-m.$$

在式 (8.8.12) 中, 每一项 $x^m\langle G_m\rangle_{2s-m}$ 都是一个至多 $2s$ 次多项式. 从而, 即得欲证的结论. □

为了在下面的叙述中简便, 令

$$G_{m-2}(\varphi)=\sum_{l=0}^{m-2}\phi_lG_{m-2-l}=\sum_{\substack{0\leqslant l\leqslant m-2\\ l\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)}}\phi_lG_{m-2-l}.$$

由式 (8.8.12) 和式 (8.8.3), 对于任何整数 $s\geqslant 1$, 有

$$\begin{aligned}H_s&=x\Big\langle\sum_{l\geqslant 0}y_{l+1}G_l\Big\rangle_{2s-1}+\sum_{m=2}^{2s}x^m\Big\langle G_{m-2}(\varphi)+\sum_{l\geqslant m-1}y_{l-m+2}G_l\Big\rangle_{2s-m}\\&=x\sum_{l=0}^{2s-2}y_{l+1}\langle G_l\rangle_{2s-l-2}+\sum_{m=2}^{2s}x^m\Big(\langle G_{m-2}(\varphi)\rangle_{2s-m}+\sum_{l=m-1}^{2s-2}y_{l-m+2}\langle G_l\rangle_{2s-l-2}\Big).\end{aligned}$$

用式 (8.8.7), 令 $K_{2s}=\sum\limits_{0\leqslant i\leqslant s-1}\phi_{2i}G_{2s-2-2i,0}$, 即得

$$H_s=x\sum_{l=0}^{2s-2}y_{l+1}\langle G_l\rangle_{2s-l-2}$$

$$+\sum_{m=2}^{2s-1} x^m \left(\langle G_{m-2}(\varphi) \rangle_{2s-m} + \sum_{l=m-1}^{2s-2} y_{l-m+2} \langle G_l \rangle_{2s-l-2} \right) + x^{2s} K_{2s}. \quad (8.8.14)$$

例如, 根据式 (8.8.14), 可以求得 H_s $(0 \leqslant s \leqslant 2)$.

首先, 由方程式 (8.8.1) 的始条件, $H_0 = 1$. 对于 $s = 1$, 由 $[G_0]_0 = G_{0,0} = 1$, $K_2 = G_{0,0} = 1$, 有

$$H_1 = xy_1 \langle G_0 \rangle_0 + x^2 = xy_1 + x^2.$$

对于 $s = 2$, 由 $G_{2,0} = \phi_0$, $K_4 = \phi_0 G_{2,0} + \phi_2 G_{0,0} = \phi_0^2 + \phi_2$, 有

$$\begin{aligned} H_2 = {} & x \sum_{l=0}^{2} y_{l+1} \langle G_l \rangle_{2-l} + \sum_{m=2}^{3} x^m \left(\langle G_{m-2}(\varphi) \rangle_{4-m} + \sum_{l=m-1}^{2} y_{l-m+2} \langle G_l \rangle_{2-l} \right) \\ & + x^4 (\phi_0^2 + \phi_2) \\ = {} & x (y_1 \langle G_0 \rangle_2 + y_2 \langle G_1 \rangle_1 + y_3 \langle G_2 \rangle_0) + x^2 \left(\langle G_0(\varphi) \rangle_2 + \sum_{l=1}^{2} y_l \langle G_l \rangle_{2-l} \right) \\ & + x^3 \left(\langle G_1(\varphi) \rangle_1 + \sum_{l=2}^{2} y_{l-1} \langle G_l \rangle_{2-l} \right) + x^4 (\phi_0^2 + \phi_2). \end{aligned}$$

考虑到 $\langle G_0 \rangle_2 = G_{0,2} = 0$, 有

$$\begin{aligned} H_2 &= x (y_2 \langle G_1 \rangle_1 + y_3 \langle G_2 \rangle_0) + x^2 (\langle G_0(\varphi) \rangle_2 + y_1 \langle G_1 \rangle_1 + y_2 \langle G_2 \rangle_0) \\ &\quad + x^3 (\langle G_1(\varphi) \rangle_1 + y_1 \langle G_2 \rangle_0) + x^4 (\phi_0^2 + \phi_2) \\ &= x (y_1 y_2 + \phi_0 y_3) + x^2 (\langle G_0(\varphi) \rangle_2 + y_1^2 + \phi_0 y_2) \\ &\quad + x^3 (\langle G_1(\varphi) \rangle_1 + \phi_0 y_1) + x^4 (\phi_0^2 + \phi_2). \end{aligned}$$

再考虑到 $\langle G_0(\varphi) \rangle_2 = 0$ 和 $\langle G_1(\varphi) \rangle_1 = \phi_0 y_1$, 有

$$H_2 = x (y_1 y_2 + \phi_0 y_3) + x^2 (y_1^2 + \phi_0 y_2) + x^3 (2\phi_0 y_1) + x^4 (\phi_0^2 + \phi_2).$$

这些结果将会在下面的实例中得到验证. 对 $s \geqslant 3$ 时的一般情形, 从式 (8.8.14) 可以看出, 为了确定 H_s, 只需求出 $\langle G_m \rangle_t$ $(0 \leqslant m, t \leqslant 2(s-1))$. 由式 (8.8.3), 当 $m = 1$ 时,

$$\langle G_1 \rangle_t = \sum_{l \geqslant 0} \langle y_{l+1} G_l \rangle_t = \sum_{l \geqslant 0} y_{l+1} \langle G_l \rangle_{t-l-1} = \sum_{l=0}^{t-1} y_{l+1} \langle G_l \rangle_{t-l-1},$$

当 $m\geqslant 2$ 时,

$$\begin{aligned}\langle G_m\rangle_t&=\langle G_{m-2}(\varphi)\rangle_t+\sum_{l\geqslant m-1}\langle y_{l-m+2}G_l\rangle_t\\&=\langle G_{m-2}(\varphi)\rangle_t+\sum_{l\geqslant m-1}y_{l-m+2}\langle G_l\rangle_{t-l+m-2}\\&=\langle G_{m-2}(\varphi)\rangle_t+\sum_{l=m-1}^{t+m-2}y_{l-m+2}\langle G_l\rangle_{t-l+m-2}\\&=\langle G_{m-2}(\varphi)\rangle_t+\sum_{i=0}^{t-1}y_{i+1}\langle G_l\rangle_{t-i-1}.\end{aligned}$$

从而, 对于任何整数 $m,t\geqslant 1$, 有

$$\langle G_m\rangle_t=\langle G_{m-2}(\varphi)\rangle_t+\sum_{l=0}^{t-1}y_{l+1}\langle G_l\rangle_{t-l-1}. \tag{8.8.15}$$

注意, 对任何整数 $m<0$, $\langle G_m\rangle_t=0$.

事实上, 所有 $\langle G_m\rangle_t$ $(m,t\geqslant 0)$ 都可用式 (8.8.15), 从 $\langle G_0\rangle_0=1$ 开始, 递推地导出. 因此, 我们在下面可将 $\langle G_m\rangle_t$ $(m,t\geqslant 0)$ 视为已知量.

定理 8.8.2 方程式 (8.8.1) 的解由如下的有限正项和形式确定：

$$H_s=\begin{cases}1, & s=0,\\ x^{2s}+\displaystyle\sum_{m=1}^{2s-1}\big(\langle G_{m-2}(\varphi)\rangle_{2s-m}+\varSigma\big)x^m, & s\geqslant 1,\end{cases} \tag{8.8.16}$$

其中

$$\varSigma=\sum_{i=0}^{2s-m-1}y_{i+1}\langle G_{i+m-1}\rangle_{2s-i-m-1}.$$

证明 由方程式 (8.8.1), 得式 (8.8.16) 中 $s=0$ 时的情形. 对于 $s\geqslant 1$, 因为

$$\begin{aligned}\sum_{l\geqslant m-1}\langle y_{l-m+2}G_l\rangle_{2s-m}&=\sum_{l\geqslant m-1}y_{l-m+2}\langle G_l\rangle_{2s-l-2}\\&=\sum_{l=m-1}^{2s-2}y_{l-m+2}\langle G_l\rangle_{2s-l-2}\\&=\sum_{i=0}^{2s-m-1}y_{i+1}\langle G_{i+m-1}\rangle_{2s-i-m-1},\end{aligned}$$

故由式 (8.8.12), 有

$$H_s=x^{2s}+\sum_{m=1}^{2s-1}\Big(\langle G_{m-2}(\varphi)\rangle_{2s-m}+\sum_{i=0}^{2s-m-1}y_{i+1}\langle G_{i+m-1}\rangle_{2s-i-m-1}\Big)x^m.$$

从而, 式 (8.8.16) 成立. □

例 8.8.1 一般外平面地图的点剖分. 考虑方程式 (8.8.1) 中的

$$\varphi(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x^2}.$$

我们有

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x^2}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(2n)!}{(n+1)!n!}x^{2n}\in\mathcal{R}_+\{x\},\tag{8.8.17}$$

可见这是方程式 (8.8.1) 的一种特殊情形, 即

$$\begin{cases} f=1+x^2\varphi(x)f+x\int_y\big(y\delta_{x,y}(uf|_{x=u})\big),\\ f|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=1,\end{cases}\tag{8.8.18}$$

其中 $\phi_{2n}=\partial_x^{2n}\varphi=(2n)!/((n+1)!n!)(n\geqslant 0)$, 如文献 [55] 中所述. 它的解就给出了一般外平面地图以非根点剖分和根面次为参数的根同构类. 这时, 因为 $\phi_0=1$ 和 $\phi_2=1$, 前面求出的 H_2 即变为

$$H_2=x(y_1y_2+y_3)+x^2(y_1^2+y_2)+x^3(2y_1)+x^4(2),$$

即提供了棱数为 2 的一般外平面地图以非根点剖分和根面次为参数的根同构类. 如在图 8.8.1 中, 可见

$$\begin{aligned}&x(a+b)+x^2(c+d)+x^3(e)+x^4(f+h)\\&\quad=x(y_1y_2+y_3)+x^2(y_1^2+y_2)+x^3(2y_1)+x^4(1+1)\end{aligned}$$

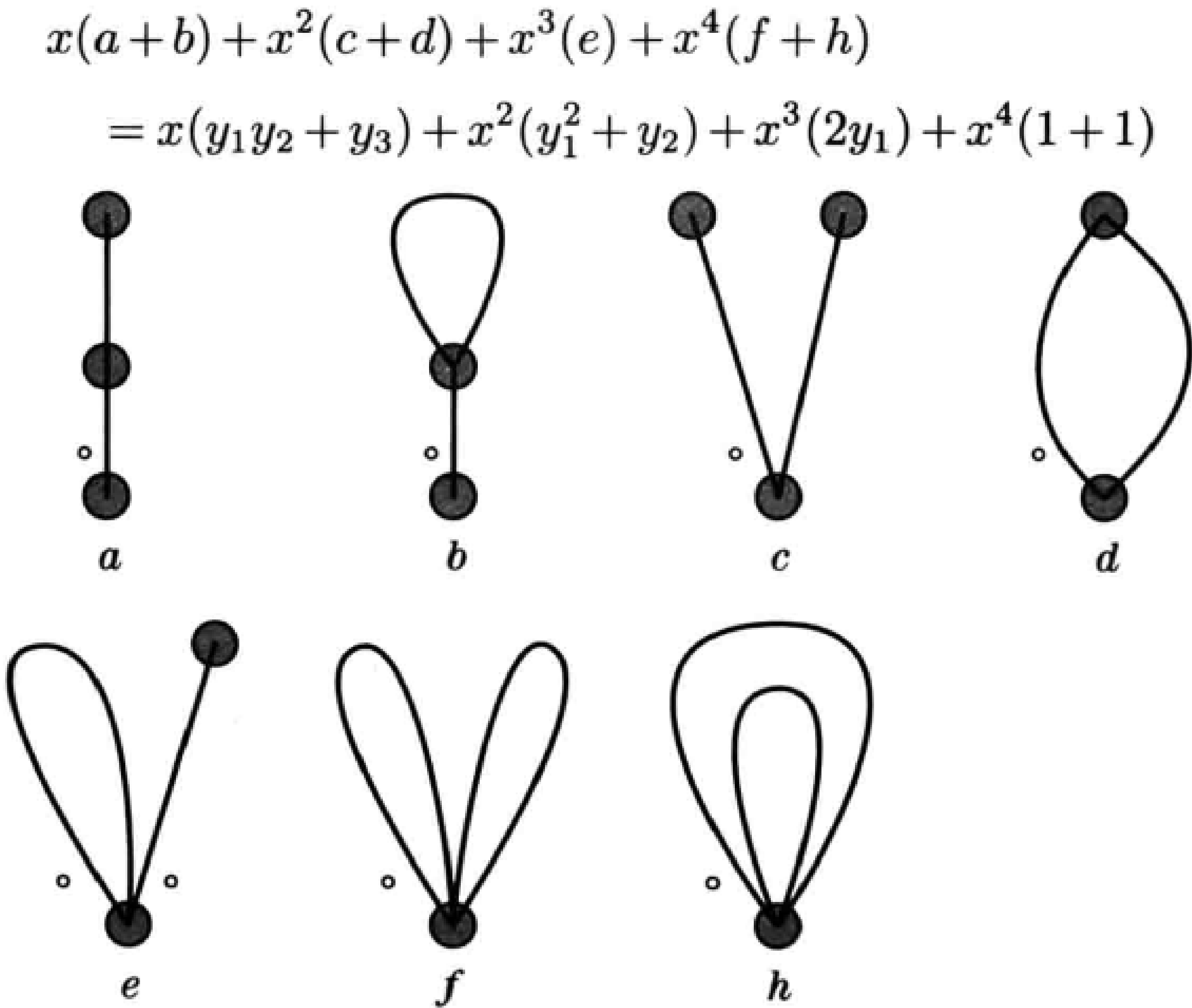


图 8.8.1 棱数为 2 的一般外平面地图的根同构类

与方程式 (8.8.18) 的解一致.

例 8.8.2 在方程式 (8.8.18) 中, 若 $\varphi(x)=1$, 就变成了方程式 (8.7.1). 方程式 (8.8.18) 又是方程式 (8.7.1) 的一个推广.

8.9 注 记

1. 在方程式 (8.2.1) 中, 令 $f=1+\boldsymbol{x}\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{x}=(x,x^2,x^3,\cdots)$, $\boldsymbol{\tau}=(F_1,F_2,F_3,\cdots)$, $F_i=\partial_x f\ (i\geqslant 1)$. 因为这个方程与方程组

$$\begin{cases} F_m=\sum\limits_{i\geqslant m-1} y_{i-m+2}F_i, \\ F_0=1 \end{cases} \tag{8.9.1}$$

在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上等价, 所以有

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Y}_{\mathrm{tre}}\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}+y_1\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}, \tag{8.9.2}$$

其中 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0,\cdots)$, 对于整数 $i,j\geqslant 1$, $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{tre}}=(y_{i,j})$,

$$y_{i,j}=\begin{cases} y_{j-i+2}, & j-i\geqslant -1, \\ 0, & j-i\leqslant -2. \end{cases} \tag{8.9.3}$$

定理 8.9.1 方程式 (8.2.1) 的解 f_{tre} 有如下所有系数皆单项的显式:

$$f_{\mathrm{tre}}=1+\boldsymbol{x}\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}=1+y_1\boldsymbol{x}\Big(\sum_{i\geqslant 0}\boldsymbol{T}_{\mathrm{tre}}^{i}\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\Big). \tag{8.9.4}$$

证明 由方程组式 (8.9.2) 的解

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}=y_1\sum_{i\geqslant 0}\boldsymbol{Y}_{\mathrm{tre}}^{i}\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}, \tag{8.9.5}$$

即可导出式 (8.9.4). □

2. 根据方程式 (8.1.1) 和方程式 (8.2.1) 在组合地图中的意义, 从它们的定性理论可以看出, 方程式 (8.1.1) 的解就是方程式 (8.2.1) 的解中 x 项的系数, 即 $\tau_1=F_1$.

定理 8.9.2 方程式 (8.1.1) 的解 $f_{\rm ppt}$ 有如下所有系数皆单项的显式:

$$f_{\rm ppt}=\tau_1=y_1\Big(\sum_{i\geqslant 0}\boldsymbol{t}_1^{[i]}\Big)\boldsymbol{e}_1^{\rm T}, \tag{8.9.6}$$

其中 $\boldsymbol{t}_1^{[i]}$ 是 $\boldsymbol{Y}_{\rm tre}^i$ 的第一行 $(i\geqslant 0)$.

证明 由式 (8.9.4), 即可得欲证的结论. □

3. 因为方程式 (8.3.1) 与方程组式 (8.3.5) 在 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 上等价, 故我们可以建立无穷维向量方程

$$\boldsymbol{\mu}^{\rm T}=\boldsymbol{c}_{\rm uc}^{\rm T}+\boldsymbol{Y}_{\rm uc}\boldsymbol{\mu}^{\rm T}, \tag{8.9.7}$$

其中 $\boldsymbol{c}_{\rm uc}=(1,\tau)$ 已经由式 (8.9.5) 给出, 对于整数 $i,j\geqslant 0$, $Y_{\rm uc}=(y_{i,j})$,

$$y_{i,j}=\begin{cases} y_{j-i+2}, & j-i\geqslant 0,\\ 0, & j-i\leqslant -1.\end{cases} \tag{8.9.8}$$

定理 8.9.3 方程式 (8.3.1) 的解 $f_{\rm uc}$ 有如下所有系数皆单项的显式:

$$f_{\rm uc}=\boldsymbol{x}\boldsymbol{\mu}^{\rm T}=\Big(\sum_{i\geqslant 0}\boldsymbol{Y}_{\rm uc}^i\Big)\boldsymbol{c}_{\rm uc}^{\rm T}, \tag{8.9.9}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x^2,x^3,x^4,\cdots)$ 和 $\boldsymbol{c}_{\rm uc}$ 如式 (8.9.7) 所示.

证明 由方程组式 (8.9.7) 的解

$$\boldsymbol{\mu}^{\rm T}=\sum_{i\geqslant 0}\boldsymbol{Y}_{\rm uc}^i\boldsymbol{c}_{\rm uc}^{\rm T}, \tag{8.9.10}$$

即可导出式 (8.9.9). □

4. 虽然超轮型方程式 (8.4.1) 与植树型方程式 (8.4.1) 在形式上十分接近, 即在方程右端只差因子 x^2, 却不能直接将它们变换成等价的向量方程, 以求得解的一个所有项系数皆单项矩阵显式. 不过在8.4 节中, 的确提供了解的更简单的显式.

5. 从冬梅型方程式 (8.5.1) 的等价形式, 即式 (8.5.4), 可直接导出它的等价方程组:

$$F_m=\begin{cases} 1, & m=0,\\ \Big(y_1+\dfrac{y_3}{1-y_2}\Big)F_{m-1}+\displaystyle\sum_{l\geqslant m}y_{l-m+2}F_l, & m\geqslant 1.\end{cases} \tag{8.9.11}$$

定理 8.9.4 令 $\boldsymbol{x}=(x^2,x^3,x^4,\cdots)$, $\nu=(F_2,F_3,F_4,\cdots)$. 方程式 (8.5.1) 的解 $f_{\rm wnt}$ 有如下的所有项系数皆单项显式:

$$f_{\rm wnt}=1+\left(y_1+\frac{y_3}{1-y_2}\right)\boldsymbol{x}\sum_{i\geqslant 0}\boldsymbol{T}_{\rm wnt}^i\boldsymbol{e}_1^{\rm T}, \tag{8.9.12}$$

其中对于整数 $i,j\geqslant 0$, $T_{\rm wnt}=(y_{i,j})$, 使得

$$y_{i,j}=\begin{cases} y_1+\dfrac{y_3}{1-y_2}, & j-i=-1,\\ y_{j-i+2}, & j-i\geqslant 0,\\ 0, & j-i\leqslant -2.\end{cases} \tag{8.9.13}$$

证明　由式 (8.9.11), 有

$$\boldsymbol{\nu}^{\rm T}=\boldsymbol{Y}_{\rm wnt}\boldsymbol{\nu}^{\rm T}+\left(y_1+\frac{y_3}{1-y_2}\right)\boldsymbol{e}_1^{\rm T}. \tag{8.9.14}$$

从而, 有

$$\boldsymbol{\nu}^{\rm T}=\left(y_1+\frac{y_3}{1-y_2}\right)\sum_{i\geqslant 0}\boldsymbol{T}_{\rm wnt}^i\boldsymbol{e}_1^{\rm T}. \tag{8.9.15}$$

由 $f_{\rm wnt}=1+\boldsymbol{x}\boldsymbol{\nu}^{\rm T}$, 即得欲证的结论. □

6. 从无裂外面型方程式 (8.6.2) 的等价方程组

$$F_m=\begin{cases} 0, & m=0,1,\\ 1+\displaystyle\sum_{l\geqslant 2}y_lF_l, & m=2,\\ \left(\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant j-2\\ 2\leqslant j\leqslant m}}+\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant m-2\\ j\geqslant m+1}}\right)y_{m+j-2k-2}F_j, & m\geqslant 3,\end{cases} \tag{8.9.16}$$

即可得方程组

$$\boldsymbol{\xi}^{\rm T}=\boldsymbol{T}_{\rm ncr}\boldsymbol{\xi}^{\rm T}+\boldsymbol{e}_1^{\rm T}, \tag{8.9.17}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}=(F_2,F_3,F_4,\cdots)$, $\boldsymbol{T}_{\rm ncr}=(y_{i,j})$, 对于整数 $i,j\geqslant 1$, 因为 $y_{i,j}=y_{j,i}$, 只需考虑 $j\geqslant i$,

$$y_{i,j}=\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{t-1}y_{t+1+2k}, & t\geqslant 1,(i,j)=(1,t)+k,\\ y_{j,i}, & j\leqslant i.\end{cases} \tag{8.9.18}$$

定理 8.9.5 令 $\boldsymbol{x}=(x^2,x^3,x^4,\cdots)$, $\xi=(F_2,F_3,F_4,\cdots)$. 方程式 (8.6.1) 的解 $f_{\rm ncr}$ 有如下的所有项系数皆单项的显式:

$$f_{\rm ncr}=\boldsymbol{x}\sum_{i\geqslant 0}\boldsymbol{T}_{\rm ncr}^{i}\boldsymbol{e}_1^{\rm T}, \tag{8.9.19}$$

其中 $\boldsymbol{T}_{\rm ncr}$ 已由式 (8.9.18) 给出.

证明 因为 $f_{\rm ncr}=\boldsymbol{x}\boldsymbol{\xi}^{\rm T}$, 方程组式 (8.9.17) 的解为

$$\boldsymbol{\xi}^{\rm T}=\sum_{i\geqslant 0}\boldsymbol{T}_{\rm ncr}^{i}\boldsymbol{e}_1^{\rm T}, \tag{8.9.20}$$

从方程式 (8.6.1) 与方程组式 (8.9.17) 等价, 即导出欲证的结论. □

7. 从式 (8.7.3), 即得方程组

$$\boldsymbol{\zeta}^{\rm T}=\boldsymbol{T}_{\rm rst}\boldsymbol{\zeta}^{\rm T}+y_1\boldsymbol{e}_1^{\rm T}+\boldsymbol{e}_2^{\rm T}, \tag{8.9.21}$$

其中 $\boldsymbol{\zeta}=(F_1,F_2,F_3,\cdots)$, $\boldsymbol{T}_{\rm rst}=(y_{i,j})(i,j\geqslant 1)$,

$$y_{i,j}=\begin{cases}1, & j-i=-2,\\ y_{j-i+2}, & j-i\geqslant -1,\\ 0, & j-i\leqslant -3,\end{cases} \tag{8.9.22}$$

$F_i=\partial_x^i f\ (i\geqslant 1)$ 由 8.7 节给出.

定理 8.9.6 令 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,\cdots)$, 则受限外平面型方程式 (8.7.1) 的解 $f_{\rm rst}$ 有如下的所有项系数皆单项的显式:

$$f_{\rm rst}=\boldsymbol{x}\sum_{i\geqslant 0}\boldsymbol{T}_{\rm rst}^{i}\big(y_1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\big)^{\rm T}, \tag{8.9.23}$$

其中 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 都是单位向量.

证明 因为 $f_{\rm rst}=\boldsymbol{x}\boldsymbol{\zeta}^{\rm T}$, 方程组式 (8.9.21) 的解

$$\boldsymbol{\zeta}^{\rm T}=\sum_{i\geqslant 0}\boldsymbol{T}_{\rm rst}^{i}\big(y_1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\big)^{\rm T}, \tag{8.9.24}$$

又方程式 (8.7.1) 与方程组式 (8.9.21) 等价, 所以定理成立. □

8. 由方程式 (8.8.1) 的等价形式, 即式 (8.8.3), 得

$$\boldsymbol{\gamma}^{\rm T}=\boldsymbol{T}_{\rm gop}\boldsymbol{\gamma}^{\rm T}+y_1\boldsymbol{e}^{\rm T}+\boldsymbol{\phi}_{\rm ev}^{\rm T}, \tag{8.9.25}$$

其中 $\boldsymbol{\gamma}=(G_1,G_2,G_3,\cdots)$, $\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{ev}}=(0,\phi_0,0,\phi_2,0,\phi_4,\cdots)$, $\boldsymbol{T}_{\mathrm{gop}}=(y_{i,j})$, 对于整数 $i,j\geqslant 1$,

$$y_{i,j}=\begin{cases} y_{j-i+2}, & j-i\geqslant -1, \\ \phi_{2k}, & j-i=-2(k+1),k\geqslant 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{8.9.26}$$

定理 8.9.7 令 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,\cdots)$, 则方程式 (8.8.1) 的解 f_{gop} 有如下的所有项系数皆单项的显式:

$$f_{\mathrm{gop}}=\boldsymbol{x}\sum_{i\geqslant 0}\boldsymbol{T}^i_{\mathrm{gop}}\big(y_1\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{ev}}^{\mathrm{T}}\big), \tag{8.9.27}$$

其中 ϕ_{ev} 已由式 (8.9.25) 给出.

证明 因为 $f_{\mathrm{gop}}=\boldsymbol{x}\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}$, 方程组式 (8.9.25) 的解为

$$\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}=\sum_{i\geqslant 0}\boldsymbol{T}^i_{\mathrm{gop}}\big(y_1\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{ev}}^{\mathrm{T}}\big), \tag{8.9.28}$$

所以由方程式 (8.8.1) 与方程组式 (8.9.25) 的等价性, 即导出欲证的结论. □

第 9 章　内面型介子方程

9.1　内面 Halin 型

在文献[65](41 页, 式 (2.2.6)) 中, 可以看到方程

$$\begin{cases} \left(1 - x\int_y \frac{y^2}{x - yg}\right)g = x^2 y_3, \\ g|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = 0, \quad \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = 0, \end{cases} \tag{9.1.1}$$

其中 $g \in \mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$.

先看一看这个方程与植树型方程式 (8.1.1) 有哪些不同. 由方程式 (9.1.1), 可见 $x\,|\,g$. 我们可引进函数变换

$$f = \frac{g}{x} \quad \text{或} \quad g = xf. \tag{9.1.2}$$

由此, 方程式 (9.1.1) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上等价地变为

$$\begin{cases} \left(1 - \int_y \frac{y^2}{1 - yf}\right)f = xy_3, \\ f|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = 0. \end{cases} \tag{9.1.3}$$

乍一看, 此方程与植树型方程式 (8.1.1) 十分相像. 但注意到: 除始条件外, 这里的 f 是在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上的, 而那里的 f 却在 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 上. 因此, 两者不等价.

因为式 (9.1.3) 比式 (9.1.1) 在形式上要简单得多, 所以前者在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上运算方便, 下面只讨论前者.

在方程式 (9.1.3) 中, 将介子泛函下的部分展开为

$$\frac{y^2}{1 - yf} = y^2\sum_{i\geqslant 0}(yf)^i = \sum_{i\geqslant 2} y^i f^{i-2}. \tag{9.1.4}$$

由此导致

$$\int_y \frac{y^2}{1-yf} = \int_y \sum_{i\geqslant 2} y^i f^{i-2} = \sum_{i\geqslant 2} y_i f^{i-2}. \tag{9.1.5}$$

方程式 (9.1.3) 等价地变为

$$f = xy_3 + \left(\int_y \frac{y^2}{1-yf}\right) f = xy_3 + \sum_{i\geqslant 2} y_i f^{i-1}. \tag{9.1.6}$$

对于任何整数 $m \geqslant 0$, 令 $F_m = \partial_x^m f = [f]_m$, 则由式 (9.1.6), 有

$$[f]_m = y_3 \delta_{m,1} + \sum_{i\geqslant 2} y_i [f^{i-1}]_m. \tag{9.1.7}$$

引理 9.1.1　方程式 (9.1.3) 与如下的方程组在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上等价:

$$F_m = \begin{cases} 0, & m=0, \\ y_3 + \sum\limits_{i\geqslant 2} y_i F_1^{[i-1]}, & m=1, \\ \sum\limits_{i\geqslant 2} y_i F_m^{[i-1]}, & m\geqslant 2, \end{cases} \tag{9.1.8}$$

其中对于整数 $l \geqslant 1$, $F_m^{[l]} = \partial_x^m f^l = [f^l]_m$, 以及

$$F_m^{[l]} = \begin{cases} F_m, & l=1, \\ \sum\limits_{j=0}^{m} F_{m-j}^{[l-1]} F_j = \sum\limits_{j=1}^{m-1} F_{m-j}^{[l-1]} F_j, & l\geqslant 2. \end{cases} \tag{9.1.9}$$

证明　由方程式 (9.1.3) 的始条件, 得式 (9.1.8) 中 $m=0$ 时的情形. 因为从式 (9.1.4) ~ 式 (9.1.6) 可知, 式 (9.1.7) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上与方程 (9.1.3) 的第一式等价, 故由对于 $m\geqslant 1$ 时的情形与式 (9.1.7) 的等价性, 即得欲证的结论. □

因为 $F_0 = 0$, 所以由式 (9.1.9), 有 $F_1^{[i-1]} = 0\ (i\geqslant 3)$. 由式 (9.1.8) 的第二式, 得

$$F_1 = y_3 + y_2 F_1 \quad \Rightarrow \quad F_1 = \frac{y_3}{1-y_2}. \tag{9.1.10}$$

定理 9.1.1　方程式 (9.1.3) 在 $\mathcal{R}_+\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中有且仅有一个解.

证明　由方程式 (9.1.3) 的始条件 (即式 (9.1.8) 的第一式), 当 $m=0$ 时, $F_0 = 0 \in \mathcal{R}_+\{x,\boldsymbol{y}\}$. 由于 $F_0 = 0$, 由式 (9.1.10), 求得 $F_1 \in \mathcal{R}_+\{x,\boldsymbol{y}\}$, 即 $m=1$ 时

的情形. 对于 $m \geqslant 2$, 假设 $F_l \in \mathcal{R}_+\{x,\boldsymbol{y}\}(l \leqslant m-1)$ 都已经求出. 往求 F_m. 从式 (9.1.9) 可以看出, 对于任何整数 $i \geqslant 1$, $F_m^{[i]} \in \mathcal{R}_+\{x,\boldsymbol{y}\}$ 都只由 F_l $(l \leqslant m-1)$ 确定. 由式 (9.1.8) 的第三式和归纳假设, 即可求出 $F_m \in \mathcal{R}_+\{x,\boldsymbol{y}\}$. 用引理 9.1.1, 即导出欲证的第一个结论.

注意到用引理 9.1.1 求 $F_m \in \mathcal{R}_+\{x,\boldsymbol{y}\}$ 的过程对于 F_0 的唯一性, 故所得的这个解是仅有的. 这就得欲证的第二个结论. □

在式 (9.1.9) 中, 每一个 F_m 都关联着所有其他未定元, 不便从小的 m 开始运行, 需要引进一个新的参数 n, 使得对任何给定的整数 m 和 n, $F_m(n)$ 都是一个多项式.

令 $\mathcal{J}_m = \{\boldsymbol{n} \geqslant \boldsymbol{0} | \boldsymbol{n}$ 是 F_m 某项中 $\boldsymbol{y}$ 的幂向量$\}$. 对于任何 $\boldsymbol{n} \in \mathcal{J}_m$, 记 $n = |\boldsymbol{n}|$, 则对于任何整数 $m,n \geqslant 0$,

$$F_{m,n} = \sum_{\substack{|\boldsymbol{n}|=n\\ \boldsymbol{n}\in\mathcal{J}_m}} \phi_{m,\boldsymbol{n}}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}, \tag{9.1.11}$$

其中 $\phi_{m,\boldsymbol{n}} \in \mathbb{Z}_+$, 即非负整数集.

引理 9.1.2 假若 f 是方程式 (9.1.3) 的一个解, 则对于任何一个给定整数 $m \geqslant 1$, 都有 $F_{m,n} = 0$ $(n \leqslant m-1)$.

证明 由方程式 (9.1.3) 的始条件, 从 $F_0 = 0$, 知对 $\forall m \geqslant 1$, $F_{m,0}^{[i]} = 0$ $(i \geqslant 1)$. 这就是 $n = 0$ 时的情形, 即 $F_{m,0} = 0$ $(m \geqslant 0)$, 且有 $F_{m,0}^{[i]} = 0 (i \geqslant 1)$. 对于 $n \geqslant 1$, 假设所有 $l \leqslant n-1$, $F_{m,l} = 0$ $(l \leqslant m-1)$ 已经被证实, 且有 $F_{m,l}^{[i]} = 0$ $(i \geqslant 1)$. 往证 $l = n$ 时的情形. 当 $m = 1$ 时, 由式 (9.1.8) 的第二式, 知

$$F_{1,n} = y_3 + \sum_{i\geqslant 2}\langle y_i F_1^{[i-1]}\rangle_n = y_3\delta_{1,n-1} + \sum_{i\geqslant 2} y_i F_{1,n-1}^{[i-1]}.$$

用归纳假设, 即可得 $m = 1$ 时的结论.

当 $m \geqslant 2$ 时, 由式 (9.1.8) 的第三式, 知

$$F_{m,n} = \sum_{i\geqslant 2}\langle y_i F_m^{[i-1]}\rangle_n = \sum_{i\geqslant 2} y_i F_{m,n-1}^{[i-1]}.$$

用归纳假设, 即可得 $m \geqslant 2$ 时的结论.

综上所述, 引理的结论得证. □

对于 $m = 0$, 由式 (9.1.8), 可知 $F_{0,n} = 0$ $(n \geqslant 0)$. 当 $m = 1$ 时, 由式 (9.1.10)

给出. 从而, 对于任何整数 $n \geqslant 0$, 有

$$F_{1,n} = \begin{cases} 0, & n=0, \\ y_3, & n=1, \\ y_2^{n-1}y_3, & n \geqslant 2. \end{cases} \tag{9.1.12}$$

对于任何整数 $m \geqslant 1$, 有

$$F_{m,1} = \begin{cases} 0, & m \neq 1, \\ y_3, & m=1, \end{cases} \tag{9.1.13}$$

对于任何整数 $m \geqslant 2,\ n \leqslant m$, 有

$$F_{m,n} = \begin{cases} 0, & n \leqslant m-1, m=n=2, \\ y_m y_3^{m-1}, & n=m. \end{cases} \tag{9.1.14}$$

进而, 对于任何 $m \geqslant 2,\ n \geqslant m+1$, 由式 (9.1.8) 的第三式, 有

$$\begin{aligned} F_{m,n} &= \sum_{i \geqslant 2} y_i F_{m,n-1}^{[i-1]} \quad (F_{1,0}=0 \ \Rightarrow \ i \leqslant n) \\ &= \sum_{i=2}^{n} y_i F_{m,n-1}^{[i-1]}, \end{aligned} \tag{9.1.15}$$

其中

$$F_{m,n-1}^{[i-1]} = \begin{cases} F_{m,n-1}, & i=2, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m-1} \langle F_{m-j}^{[i-2]} F_j \rangle_{n-1} = \sum_{j=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{n-2} \langle F_{m-j}^{[i-2]} \rangle_{n-l-1} \langle F_j \rangle_l & \\ \displaystyle\qquad = \sum_{j=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{n-2} F_{m-j,n-l-1}^{[i-2]} F_{j,l}, & i \geqslant 3. \end{cases} \tag{9.1.16}$$

引理 9.1.3 给定整数 $n > m \geqslant 2$. 对于任何整数 $i \geqslant n$, $F_{m,n}^{[i]} = 0$.

证明 由于 $F_0^{[i]} = 0\ (i \geqslant 1)$, 所以

$$\begin{aligned} F_{m,n}^{[i]} &= \left\langle \sum_{l_1=1}^{m-l} F_{m-l_1}^{[i-1]} F_{l_1} \right\rangle_n \quad (\text{若 } i-1 \geqslant 2, \text{继续施行}) \\ &= \left\langle \sum_{\substack{|\boldsymbol{l}_i|=m \\ \boldsymbol{1}_i \leqslant \boldsymbol{l}_i \leqslant (m-1)\boldsymbol{1}_i}} \prod_{j=1}^{i} F_{l_j} \right\rangle_n = 0. \end{aligned}$$

这就是欲证的结论. □

在此基础上, 式 (9.1.15) 变为

$$F_{m,n} = \sum_{i=2}^{\min\{m,n\}} y_i F_{m,n-1}^{[i-1]} \quad (m \geqslant 2, n \geqslant m+1). \tag{9.1.17}$$

这就使我们能够继续求 F_m $(m \geqslant 2)$. 例如, 当 $m=2$ 时, 由式 (9.1.14) 知 $F_{2,n} = 0$ $(0 \leqslant n \leqslant 2)$, 并且有

$$\begin{aligned}
F_{2,3} &= \sum_{i=2}^{3} y_i F_{2,2}^{[i-1]} = y_2 F_{2,2} + y_3 F_{2,2}^{[2]} \\
&= y_3 F_{2,2}^{[2]} = y_3 F_{1,1}^2 = y_3^3, \\
F_{2,4} &= \sum_{i=2}^{4} y_i F_{2,3}^{[i-1]} = y_2 F_{2,3} + y_3 F_{2,3}^{[2]} + y_4 F_{2,3}^{[3]} \\
&= y_2 y_3^3 + y_3 (2F_{1,1}F_{1,2}) = y_2 y_3^3 + 2y_2 y_3^3 = 3y_2 y_3^3, \\
F_{2,5} &= \sum_{i=2}^{3} y_i F_{2,4}^{[i-1]} = y_2 F_{2,4} + y_3 F_{2,4}^{[2]} \\
&= 3y_2^2 y_3^3 + y_3 (2F_{1,1}F_{1,3} + F_{1,4}^2) \\
&= 3y_2^2 y_3^3 + y_3 (2y_2^2 y_3^2 + y_2^2 y_3^2) \\
&= 6y_2^2 y_3^3, \\
F_{2,6} &= \sum_{i=2}^{3} y_i F_{2,5}^{[i-1]} = y_2 F_{2,5} + y_3 F_{2,5}^{[2]} \\
&= 6y_2^3 y_3^3 + 2y_3 (F_{1,1}F_{1,4} + F_{1,2}F_{1,3}) \\
&= 6y_2^3 y_3^3 + 2y_3 (y_3^2 y_2^3 y_3 + y_2 y_3 y_2^2 y_3) \\
&= 6y_2^3 y_3^3 + 4y_2^3 y_3^3 = 10y_2^3 y_3^3.
\end{aligned}$$

进一步, 归纳地求出 $n \geqslant 7$ 时的情形, 即得

$$F_{2,n} = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant n \leqslant 2, \\ y_3^3, & n=3, \\ 3y_2 y_3^3, & n=4, \\ 6y_2^2 y_3^3, & n=5, \\ 10y_2^3 y_3^3, & n=6, \\ \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} y_2^{n-3} y_3^3, & n \geqslant 7. \end{cases} \tag{9.1.18}$$

引理 9.1.4 对于任何整数 $n \geqslant m \geqslant 2$, $F_{m,n}$ 与 y_1 和 y_l $(l \geqslant m+2)$ 无关.

证明 当 $m=2$ 时, 由式 (9.1.18), $F_{2,n}$ 只与 y_2 和 y_3 有关. 因为 $3=m+1$, 故欲证的结论成立. 对于 $m \geqslant 3$, 假若对任何整数 l $(3 \leqslant l \leqslant m_1)$, $F_{l,n}$ 都与 y_1 和 y_l $(l \geqslant l+2)$ 无关, 往证 $F_{m,n}$ 与 y_1 和 y_l $(l \geqslant m+2)$ 无关.

从式 (9.1.16) 知 $F^{i-1}_{m,n-1}$ 仅与 $F_{l,s}$ $(2 \leqslant l \leqslant m-1,\ 2 \leqslant s \leqslant n-1)$ 有关, 再由归纳假定, $F^{i-1}_{m,n-1}$ 仅与 y_l $(2 \leqslant l \leqslant (m-1)+1=m)$ 有关. 利用式 (9.1.16), 从 $n \geqslant m$ 即可得 $F_{m,n}$ 至多与 y_l $(2 \leqslant l \leqslant m+1)$ 有关. 或者说, $F_{m,n}$ 与 y_1 和 y_l $(l \geqslant m+1)$ 无关. □

由这个引理, 对于任何给定整数 $m,n \geqslant 2$, 我们可在 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}_{m+1}\}$ 中讨论 $F_{m,n}$.

引理 9.1.5 对于任何整数 m, $n \geqslant 2$, $F_{m,n}$ 是 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}_{m+1}\}$ 上的一个 n 次齐多项式.

证明 由引理 9.1.4, 知 $F_{m,n} \in \mathcal{R}\{\boldsymbol{y}_{m+1}\}$. 由式 (9.1.17), 知 $F_{m,n}$ 是 $\{y_2, y_3, \cdots, y_{m+1}\}$ 的一个 n 次齐多项式. □

注意 从引理 9.1.4 的证明中可以看出, 实际上, $F_{m,n} \in \mathcal{R}\{\boldsymbol{y}_m\} (m \geqslant 3)$.

定理 9.1.2 令 $f=f_{\text{inH}}$ 为方程式 (9.1.3) 的解, 则对于任何整数 $m,n \geqslant 0$, $F_{m,n}=\langle \partial_x^m f_{\text{inH}} \rangle_n$ 由如下正项和递推式确定:

$$F_{m,n}=\begin{cases} 0, & n=0,\ m \geqslant 0 \text{ 或 } n \geqslant 1,\ m \leqslant n-1, \\ y_3, & n=1,\ m=1, \\ \displaystyle\sum_{i=2}^{n} y_i F^{[i-1]}_{m,n-1}, & \text{其他}, \end{cases} \tag{9.1.19}$$

其中

$$F^{[i-1]}_{m,n-1}=\sum_{\boldsymbol{s}_{i-1} \in \mathcal{I}^{(m-1)}_{i-1}} \left(\sum_{\boldsymbol{t}_{i-1} \in \mathcal{I}^{(n-2)}_{i-1}} \prod_{j=1}^{i-1} F_{s_j,t_j} \right), \tag{9.1.20}$$

这里对于整数 $k=m-1$, $n-2$, 采用记号

$$\mathcal{I}^k_{i-1}=\left\{ \boldsymbol{l}_{i-1} \middle| \sum_{j=1}^{i-1} l_j = k+1,\ \mathbf{1}_{i-1} \leqslant \boldsymbol{l}_{i-1} \leqslant k\mathbf{1}_{i-1} \right\}.$$

证明 由引理 9.1.4 和引理 9.1.5 直接导出. □

在下面实例的基础上, 还可进一步地看出, 定理 9.1.2 中的 $F_{m,n}$ 还有更简单的无和显式.

例 9.1.1 平面 Halin 地图依根面次与非根节点剖分向量的根同构类. 从文献[65](§2.2) 中可知, 平面 Halin 地图依根面次与非根节点剖分向量的根同构类的计数函数满足关于 g 的方程式 (9.1.1). 就是说, $G_n = \partial_x^m g$ 是根面次为 m、以非根节点剖分向量为参数的计数函数. 因为方程式 (9.1.1) 与方程式 (9.1.3) 等价, 由式 (9.1.2), $G_{m,n} = F_{m-1,n}$ 为 G_m 中非根节点数 n 的剖分.

从前面的讨论, 已经看出 $G_{2,2} = F_{1,2} = y_2y_3$, $G_{2,3} = F_{1,3} = y_2^2y_3$, $G_{2,4} = F_{1,4} = y_2^3y_3$, $G_{2,5} = F_{1,5} = y_2^4y_3$, $G_{2,6} = F_{1,6} = y_2^5y_3$, $G_{3,3} = F_{2,3} = y_3^3$, $G_{3,4} = F_{2,4} = 3y_2y_3^3$, $G_{3,5} = F_{2,5} = 6y_2^2y_3^3$, $G_{3,6} = F_{2,6} = 10y_2^3y_3^3$.

在图 9.1.1 中, $a \sim e$ 提供了根面次为 2、非根顶点数为 $2 \sim 6$ 的平面 Halin 地图依节点剖分的根同构类数. 这就是

$$
\begin{aligned}
(a)+(b)+(c)+(d)+(e) &= (y_2y_3)+(y_2^2y_3)+(y_2^3y_3)+(y_2^4y_3)+(y_2^5y_3) \\
&= G_{2,2}+G_{2,3}+G_{2,4}+G_{2,5}+G_{2,6},
\end{aligned}
$$

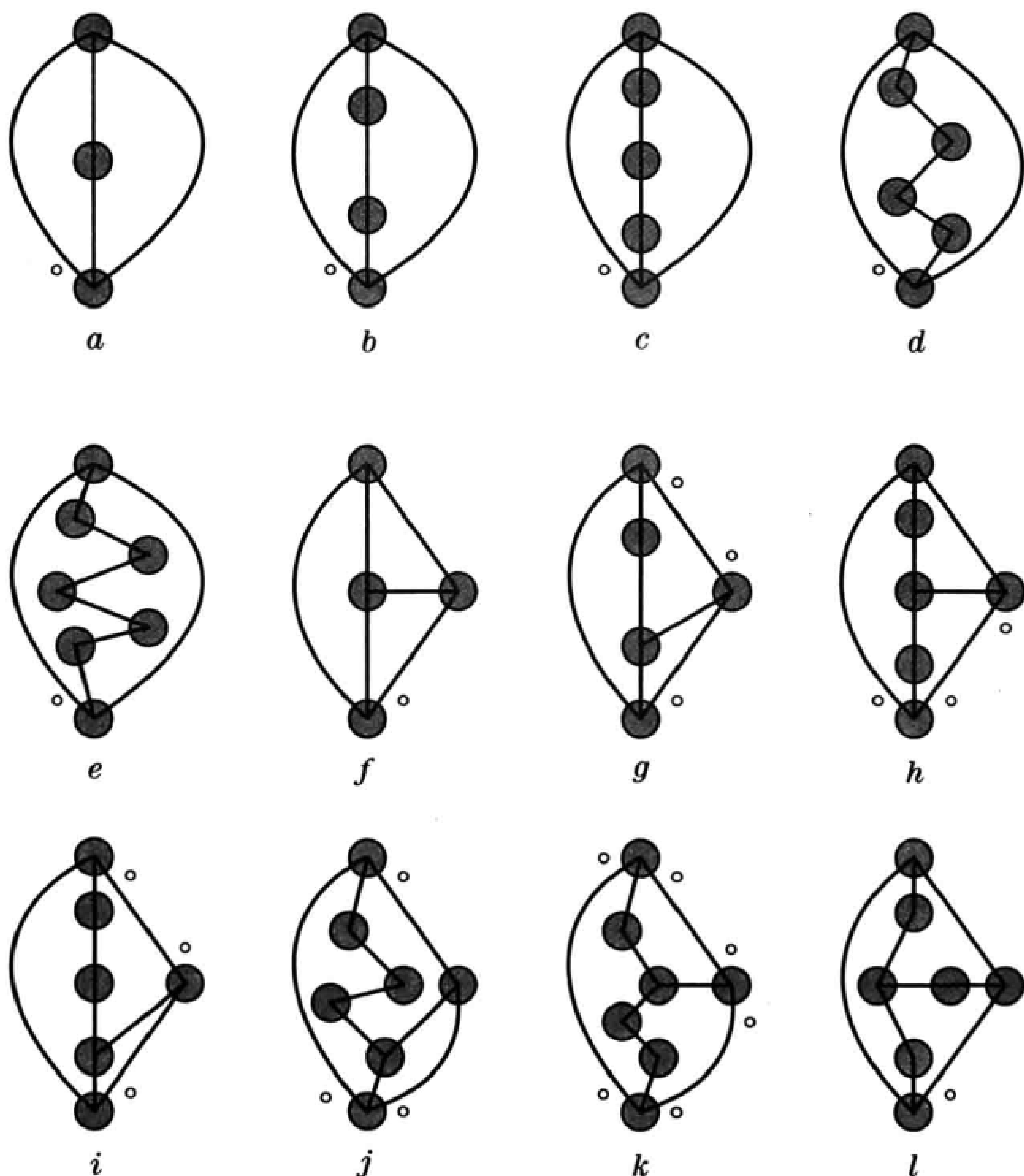


图 9.1.1 平面 Halin 地图依根面次与非根节点剖分向量的根同构类

即为 $2\sim6$ 时的情形. 其余 (即 $f\sim l$) 则是根面次为 3、非根顶点数为 $3\sim6$ 时的情形. 这就是

$$\begin{aligned}(f)+(g)+(h+i)&=(y_3^3)+(3y_2y_3^3)+(3y_2^2y_3^3+3y_2^2y_3^3)\\&=(y_3^3)+(3y_2y_3^3)+(6y_2^2y_3^3)\\&=G_{3,3}+G_{3,4}+G_{3,5},\\(j+k+l)&=(3y_2^3y_3^3+6y_2^3y_3^3+y_2^3y_3^3)=10y_2^3y_3^3=G_{3,6}.\end{aligned}$$

例 9.1.2 从方程式 (8.1.1) 的解导出方程式 (9.1.1) 的解. 从这两个方程在组合地图上的意义, 看一看植树与平面 Halin 地图的关系. 注意到 Halin 地图根面边界上的顶点的次都是 3, 且删去这个边界上的棱后, 所得的是一个植树, 这就促使我们寻求它们之间的映射.

对于整数 $m\geqslant1$, 令 $\boldsymbol{s}_m=(s_1,s_2,s_3,\cdots,s_m)\in\mathcal{J}_m$, 即多项式 $F_{m,n}$ 中一项的幂向量 (由引理 9.1.4, $s_1=0$). 由例 9.1.1 知, $\boldsymbol{s}_m$ 是根面次为 $m+1$ 的平面 Halin 地图的一个非根顶点剖分向量. 根面次为 $m+1$ 的平面 Halin 地图与带 m 个非根悬挂点的植树有如下的一一对应关系:

$$\boldsymbol{s}_{m-1}\ \leftrightarrow\ \boldsymbol{t}_{m-1},\tag{9.1.21}$$

其中

$$t_i=\begin{cases}m, & i=1,\\ s_2, & i=2,\\ s_3-m, & i=3,\\ s_i, & 4\leqslant i\leqslant m-1.\end{cases}\tag{9.1.22}$$

定理 9.1.3 对于任何整数 $n\geqslant m\geqslant2$, 多项式 $F_{m-1,n}$ 有如下所有系数都无和的显式:

$$F_{m-1,n}=\sum_{\substack{\boldsymbol{s}_m\in\mathcal{J}_{m-1}\\|\boldsymbol{s}_m|=n}}\frac{(n-1)!}{(s_3-m+1)!(m-1)!\prod\limits_{\substack{2\leqslant i\leqslant m\\i\neq3}}s_i!}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{s}_m},\tag{9.1.23}$$

其中 $n\geqslant m\geqslant2$.

证明　由式 (9.1.21) 和定理 8.1.4, 有

$$\partial_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{s}_m}F_{m-1,n}=\sum_{\substack{\boldsymbol{s}_m\in\mathcal{J}_m\\|\boldsymbol{s}_m|=n}}\frac{(|\boldsymbol{t}_m|-1)!}{(s_3-m+1)!(m-1)!\prod\limits_{\substack{2\leqslant i\leqslant m\\i\neq3}}s_i!}\quad(\text{用 }|\boldsymbol{t}_m|=|\boldsymbol{s}_m|=n)\tag{9.1.24}$$

$$= \sum_{\substack{s_m \in \mathcal{J}_{m-1} \\ |s_m|=n}} \frac{(n-1)!}{(s_3-m+1)!(m-1)! \prod_{\substack{2\leqslant i\leqslant m \\ i\neq 3}} s_i!}. \tag{9.1.25}$$

这就是欲证的结论. □

例如, $G_{3,5}=F_{2,5}$, 由图9.1.1 中的 h 和 i 给出, 即 $G_{3,5}=6y_2^2y_3^3$. 由于 $\boldsymbol{s}_3=(0,2,3)$, 故有

$$\partial_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{s}_3} F_{2,5} = \frac{(5-1)!}{(s_3-3+1)(3-1)!s_2!} = \frac{4!}{(3-3+1)2!2!} = 6.$$

9.2 普通内面型

在文献[58](204 页) 中, 可以看到方程

$$\begin{cases} g = 1 + x^2g^2 + x\int_y \Big(y\delta_{x,y}(ug|_{x=u})\Big), \\ g|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}\Rightarrow x=0} = 1, \end{cases} \tag{9.2.1}$$

其中 $g\in\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$.

因为 $g\in\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 由 $G_m=\partial_x^m g\in\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}(m\geqslant 0)$ 确定, 所以

$$\begin{aligned}\delta_{x,y}(ug|_{x=u}) &= \sum_{m\geqslant 0} G_m\Big(\frac{x^{m+1}-y^{m+1}}{x-y}\Big) = \sum_{m\geqslant 0} G_m\Big(\sum_{l=0}^{m} x^l y^{m-l}\Big) \\ &= \sum_{l\geqslant 0} x^l \sum_{m\geqslant l} y^{m-l} G_m.\end{aligned}$$

从而, 得

$$\int_y \Big(y\delta_{x,y}(zg)\Big) = \sum_{l\geqslant 0} x^l \int_y \sum_{m\geqslant l} y^{m-l+1} G_m = \sum_{l\geqslant 0} x^l \sum_{m\geqslant l} y_{m-l+1} G_m.$$

因为 g^2 由 $G_m^{[2]}$ $(m\geqslant 0)$ 确定, 且 $G_m^{[2]}=\partial_x^m g^2$, 所以有

$$G_m^{[2]} = \sum_{j=0}^{m} G_{m-j}G_j. \tag{9.2.2}$$

由方程 (9.2.1) 的第一式, 有

$$g = 1 + x^2\sum_{l\geqslant 0} G_l^{[2]} x^l + x\sum_{l\geqslant 0} x^l \sum_{m\geqslant l} y_{m-l+1} G_m$$

$$=1+\sum_{l\geqslant 0} G_l^{[2]} x^{l+2}+\sum_{l\geqslant 0} x^{l+1}\sum_{m\geqslant l} y_{m-l+1}G_m \quad (令\ k=l+1)$$

$$=1+\sum_{l\geqslant 0} G_l^{[2]} x^{l+2}+\sum_{k\geqslant 1} x^{k}\sum_{m\geqslant k-1} y_{m-k+2}G_m$$

$$=1+\sum_{m\geqslant 2} G_{m-2}^{[2]} x^{m}+\sum_{m\geqslant 1}\Big(\sum_{k\geqslant m-1} y_{k-m+2}G_k\Big)x^m. \tag{9.2.3}$$

定理 9.2.1　方程式 (9.2.1) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上与如下的方程组等价:

$$G_m=\begin{cases} 1, & m=0, \\ \sum_{k\geqslant 0} y_{k+1}G_k, & m=1, \\ G_{m-2}^{[2]}+\sum_{k\geqslant m-1} y_{k-m+2}G_k, & m\geqslant 2, \end{cases} \tag{9.2.4}$$

其中 $G_{m-2}^{[2]}$ 已由式 (9.2.2) 给出.

证明　根据式 (9.2.3) 两端 x^m $(m\geqslant 0)$ 的系数相等, 注意到当 $m=0$ 时的情形就是方程式 (9.2.1) 的始条件, 以及 $y_0=0$, 即可导出欲证的结论. □

因为不便直接解方程组式 (9.2.4), 需要先看一看函数 $G_m\in\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 在结构上哪些是可以利用的.

令 $\mathcal{J}_m$ 为在 G_m 中所有出现过未定向量 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3,\cdots)$ 的幂向量 $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3,\cdots)$ 的集合. 对于任何一个幂向量 $\boldsymbol{n}$, 记 $\pi(\boldsymbol{n})=\boldsymbol{i}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}$, 称为半度, 其中 $\boldsymbol{i}$ 就是 $\boldsymbol{n}$ 的所有分量 $n_i=i$ $(i\geqslant 1)$ 时的情形. 记

$$G_{m,s}=\partial_{\boldsymbol{y}}^{\boldsymbol{n}}G_m\big|_{\pi(\boldsymbol{n})=s} \quad \big(=\langle G_m\rangle_s\big), \tag{9.2.5}$$

则由式 (9.2.4), 对于任何整数 $s\geqslant 0$, 当 $m=0$ 时, 有

$$G_{0,s}=\begin{cases} 1, & s=0, \\ 0, & s\geqslant 1. \end{cases} \tag{9.2.6}$$

当 $m=1$ 时,

$$G_{1,s}=\begin{cases} 0, & s=0, \\ \sum_{k\geqslant 0} y_{k+1}G_{k,s-k-1}, & s\geqslant 1. \end{cases}$$

因为 $s-k-1\geqslant 0$, 即 $k\leqslant s-1$, 所以有

$$G_{1,s}=\begin{cases} 0, & s=0, \\ \sum_{k=0}^{s-1} y_{k+1}G_{k,s-k-1}, & s\geqslant 1. \end{cases} \tag{9.2.7}$$

当 $m=2$ 时,

$$G_{2,s}=\begin{cases}1, & s=0,\\ \sum_{k=1}^{s}y_kG_{k,s-k}, & s\geqslant 1.\end{cases}$$

因为 $s-k\geqslant 0$, 即 $k\leqslant s$, 所以有

$$G_{2,s}=\begin{cases}1, & s=0,\\ \sum_{k=1}^{s}y_kG_{k,s-k}, & s\geqslant 1.\end{cases} \tag{9.2.8}$$

当 $m\geqslant 3$ 时, 对于整数 $s\geqslant 0$, 有

$$G_{m,s}=G_{m-2,s}^{[2]}+\sum_{k\geqslant m-1}y_{k-m+2}G_{k,s-k+m-2}.$$

因为 $s-k+m-2\geqslant 0$, 即 $k\leqslant s+m-2$, 所以有

$$G_{m,s}=G_{m-2,s}^{[2]}+\sum_{k=m-1}^{s+m-2}y_{k-m+2}G_{k,s-k+m-2}. \tag{9.2.9}$$

考虑到当 $m\leqslant 1$ 时, $G_{m-2,s}^{[2]}=0$, 对于整数 $m\geqslant 0$ 和整数 $s\geqslant 0$, 有

$$G_{m,s}=\begin{cases}0, & m=0,\\ G_{m-2,s}^{[2]}+\sum_{l=0}^{s-1}y_{l+1}G_{l+m-1,s-l-1}, & m\geqslant 1.\end{cases} \tag{9.2.10}$$

引理 9.2.1 对于任何整数 $m\geqslant 0$, 有

$$G_{m,0}=\begin{cases}1, & m=0,\\ 0, & m\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2),\\ \dfrac{(2t)!}{t!(t+1)!}, & m=2t,\ t\geqslant 0.\end{cases} \tag{9.2.11}$$

证明 首先, 注意已经知道 $G_{0,0}=1$ 由式 (9.2.6) 确定. 然后, 用式 (9.2.9), 对于 $0\leqslant m\leqslant 1$, 即得

$$G_{m,0}=\begin{cases}1, & m=0,\\ 0, & m=1.\end{cases}$$

对于 $m\geqslant 2$, 因为当 $s=0$ 时, 第二个式子中的求和不存在, 由式 (9.2.10) 有

$$G_{m,0}=G_{m-2,0}^{[2]}=\sum_{i=0}^{m-2}\left\langle G_iG_{m-2-i}\right\rangle_0=\sum_{i=0}^{m-2}G_{i,0}G_{m-2-i,0}.$$

在此基础上，我们可以导出下面两个结论.

结论 1　对于 $m\geqslant 1$, 只要 $m\equiv 1 \pmod 2$, 就有 $G_{m,0}=0$.

证明　因为已经得到 $G_{1,0}=0$, 我们可归纳地假设对于整数 l $(0\leqslant l\leqslant m-1)$, 只要 $l\equiv 1 \pmod 2$, 就有 $G_{l,0}=0$. 不妨令 $m=2t+1$. 往证 $G_{m,0}=0$. 因为在上式求和号内 $i+(m-2-i)=m-2=m=2t+1\equiv 1 \pmod 2$, 故 i 和 $m-2-i$ 中必有一个为奇数. 由 i, $m-2-i\leqslant m-2\leqslant m-1$, 从归纳假设知这个求和号内的每一项均为 0. 从而, $G_{m,0}=G_{2t+1,0}=0$, 即得结论 1.

结论 2　对于 $m=2t$, $t\geqslant 1$, 有

$$G_{2t,0}=\sum_{j=0}^{t-1}G_{2j,0}G_{2(t-1-j),0}.$$

证明　由结论 1, 即得

$$G_{2t,0}=\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant 2(t-1)\\ 2|i}}G_{i,0}G_{m-2-i,0}=\sum_{j=0}^{t-1}G_{2j,0}G_{2(t-1-j),0}.$$

这就完成了结论 2 的证明.

由结论 1 可给出式 (9.2.11) 中 $m\equiv 1 \pmod 2$ 时的情形. 由式 (3.1.7) (留意 $C_t=G_{2t,0}$) 和结论 2, 即得 (9.2.11) 式中 $m\equiv 0 \pmod 2$ 时的情形. □

注意　对于整数 $t\geqslant 0$, $G_{2t,0}=\dfrac{(2t)!}{t!(t+1)!}$, 即式 (9.2.11) 中 $m\equiv 0 \pmod 2$ 情形的证明, 也可直接对于 t 用数学归纳法.

引理 9.2.2　对于任何整数 $m,s\geqslant 0$, $G_{m,s}$ 是 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 上的一个至多 s 次多项式, 而且, $G_{m,s}$ 与 y_l $(l\geqslant s+1)$ 无关.

证明　先证第一个结论. 令 $\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}_{m,s}$. 由 $\pi(\boldsymbol{n})=s$, 有

$$s=\sum_{i\geqslant 1}in_i=\boldsymbol{i}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}.$$

从而, $G_{m,s}$ 的次

$$d(G_{m,s})\leqslant\max\left\{|\boldsymbol{n}|\big|\boldsymbol{i}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{n}\geqslant\boldsymbol{0}\right\}=|s\boldsymbol{1}_1|=s|\boldsymbol{1}_1|=s.$$

这就是第一个结论.

再证第二个结论. 当 $s=0$ 时, 由式 (9.2.11) 知, 对任何整数 $m\geqslant 0$, $G_{m,0}$ 与 y_l $(l\geqslant 1=s+1)$ 无关. 当 $s\geqslant 1$ 时, 假设对于任何整数 l $(0\leqslant l\leqslant s-1)$, $G_{m,l}$ $(m\geqslant 0)$ 都与 y_i $(i\geqslant l+1)$ 无关.

当 $m=0$ 时, 因为 $G_{0,s}=0$ $(s\geqslant 1)$, 自然 $G_{0,s}$ 与 y_l $(l\geqslant s+1)$ 无关. 假设对于任何整数 k $(0\leqslant k\leqslant m-1)$, $G_{k,s}$ $(m\geqslant 0)$ 都与 y_l $(l\geqslant s+1)$ 无关. 往证 $G_{m,s}$ $(m\geqslant 0)$ 与 y_l $(l\geqslant s+1)$ 无关.

由于对于任何整数 k $(0\leqslant k\leqslant m-1)$, $G_{k,s}$ $(m\geqslant 0)$ 都与 y_i $(i\geqslant s+1)$ 无关, 所以

$$G^{[2]}_{m-2,s}=\sum_{i=0}^{m-2}\Big(\sum_{j=0}^{s}G_{i,j}G_{m-2-i,s-j}\Big)$$

与 y_l $(l\geqslant s+1)$ 无关. 由于对于任何整数 l $(0\leqslant l\leqslant s-1)$, $G_{m,l}$ $(m\geqslant 0)$ 都与 y_i $(i\geqslant l+1)$ 无关, 所以

$$\sum_{l=0}^{s-1}y_{l+1}G_{l+m-1,s-l-1}$$

与 y_l $(l\geqslant s+1)$ 无关. 从而, 由式 (9.2.10), 即得欲证的结论. □

由这个引理, 我们可按 m,s 由小到大的次序, 在 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}_s\}$ 中逐步确定 $G_{m,s}$, 以求得方程式 (9.2.1) 的一个解.

引理 9.2.3 对于任何整数 $m\geqslant 1$, 关于 $G_{m,s}$, 有 $\pi(\boldsymbol{n})\equiv m(\text{mod }2)$, $\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}_m$.

证明 当 $m+s=0$ 时, $G_{0,0}=1$. 从而, $s=\pi(\boldsymbol{n})=0=m$, $\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}_{0,0}$. 当 $m+s=1$, 有 $G_{0,1}=G_{1,0}=0$, $s=\pi(\boldsymbol{n})\not\equiv m(\text{mod }2)$, $\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}_{0,1}\cup\mathcal{J}_{1,0}$.

对于任何整数 $m,s\geqslant 0$, $m+s=t\geqslant 1$, 假设只要整数 $i,j\geqslant 0$, $i+j\leqslant t-1$, 就有 $G_{i,j}=0$, $i+j\equiv 1(\text{mod }2)$, 即满足引理的结论. 用数学归纳法, 往证对于 $m+s=t$, 引理的结论也成立.

用反证法. 如果 $\pi(\boldsymbol{n})\not\equiv m(\text{mod }2)$, 则 $m+s\equiv 1(\text{mod }2)$. 在 $G_{m,s}$ 中, 利用式 (9.2.10), 因为 $m+s\equiv 1(\text{mod }2)$, m 和 s 中必有一个是奇数, 另一个是偶数, 所以 $G^{[2]}_{m-2,s}$ 只与 $G_{i,j}$ $(i+j\leqslant m+s-1,\ i+j\equiv 1(\text{mod }2))$ 有关. 从而, 由 $G_{i,j}=0$, 得 $G^{[2]}_{m-2,s}=0$. 相仿地, 也可得

$$\Sigma_{s-1}=\sum_{l=0}^{s-1}y_{l+1}G_{l+m-1,s-l-1}=0.$$

从而, 只能 $s=\pi(\boldsymbol{n})\equiv m(\text{mod }2)$.

根据对于 $m+s$ 的数学归纳原理, 即得欲证的结论. □

因为对 $\forall\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}_{m,s}$, 有 $\pi(\boldsymbol{n})=s$, 我们可记 $s=\pi(G_{m,s})$. 从这个定理的证明中可以看出, 只要 $m+s\equiv 1(\text{mod }2)$, 就有 $G_{m,s}=0$.

引理 9.2.4 对于任何整数 m, $s\geqslant 1$, 若 $m\not\equiv s(\text{mod }2)$, 则有 $G_{m,s}=0$.

证明　因为 $m+s\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$ 当且仅当 $m\not\equiv s (\mathrm{mod}\ 2)$, 故由引理 9.2.3 即可直接导出欲证的结论. □

由这个引理, 我们可只考虑 $G_{m,s}$ 当 $m\equiv s (\mathrm{mod}\ 2)$ 时的情形.

下面, 在引理 9.2.1 的基础上, 求 $G_{m,1}$ 和 $G_{m,2}$ $(m\geqslant 1)$.

先求 $G_{m,1}$. 根据式 (9.2.10), 对于整数 $m\geqslant 1$, 有

$$G_{m,1}=\begin{cases} y_1 G_{0,0}, & m=1, \\ G^{[2]}_{m-2,1}+\sum\limits_{k=m-1}^{m-1} y_{k-m+2}G_{k,m-k-1}, & m\geqslant 2. \end{cases} \tag{9.2.12}$$

由式 (9.2.10), 知 $G_{0,0}=1$. 从而, $G_{1,1}=y_1$. 由

$$\sum_{k=m-1}^{m-1} y_{k-m+2}G_{k,k+m-1}=y_1 G_{m-1,0},$$

对于 $m\geqslant 2$, 有 $G_{m,1}=y_1 G_{m-1,0}$. 由式 (9.2.11), 可知

$$G_{m,1}=\begin{cases} 0, & m\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2), \\ \dfrac{(2t)!}{t!(t+1)!}, & m=2t+1, t\geqslant 1. \end{cases}$$

由引理 9.2.4, 导出 $G^{[2]}_{m-2,1}=0$ $(m\geqslant 1)$. 从而得

$$G_{m,1}=\begin{cases} G^{[2]}_{m-2,1}, & m\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2), \\ 0, & m\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2). \end{cases} \tag{9.2.13}$$

引理 9.2.5　对于任何整数 t, 有

$$G_{t,t}=\begin{cases} 1, & t=0, \\ y_1, & t=1, \\ G^{[2]}_{t-2,t}+\sum\limits_{k=0}^{t-1} y_{k+1}G_{t+k-1,t-k-1}, & t\geqslant 2. \end{cases}$$

证明　当 $t=0$ 时, 由式 (9.2.6) 得出. 当 $t=1$ 时, 由式 (9.2.13) 中 $t=0$ 时的情形得出. 对于任何整数 $t\geqslant 2$, 在式 (9.2.10) 中, 取 $t=m=s$ 即可得到. □

继而, 求 $G_{m,2}$. 根据式 (9.2.10), 对于整数 $m\geqslant 2$, 有

$$G_{m,2}=\begin{cases} \sum\limits_{k\geqslant 0}^{1} y_{k+1}G_{k,1-k}, & m=1, \\ G^{[2]}_{m-2,2}+\sum\limits_{k=m-1}^{m} y_{k-m+2}G_{k,m-k}, & m\geqslant 2. \end{cases} \tag{9.2.14}$$

因为 $G_{0,1}=G_{1,0}=0$, 所以 $G_{1,2}=0$. 这就是 $m=1$ 时的情形. 当 $m=2$ 时, 由于 $G_{0,2}^{[2]}=2G_{0,0}G_{0,2}+G_{0,1}^2=0$, 所以

$$G_{2,2}=\sum_{k\geqslant 1}^{2}y_kG_{k,2-k}=y_1G_{1,1}+y_2G_{2,0}=y_1^2+y_2.$$

对于整数 $m\geqslant 3$,

$$G_{m-2,2}^{[2]}=\Big\langle\sum_{i=0}^{m-2}G_iG_{m-2-i}\Big\rangle_2=\sum_{i=0}^{m-2}\langle G_iG_{m-2-i}\rangle_2=\sum_{i=0}^{m-2}\sum_{j=0}^{2}G_{i,j}G_{m-2-i,2-j}$$

只由 $G_{l,k}$ $(0\leqslant l\leqslant m-3\leqslant m-1,\ 0\leqslant l\leqslant k\leqslant 2)$ 确定, 从而对于 $m\geqslant 1$, 可得

$$G_{m,2}=\begin{cases}0, & m=2t+1,\ t\geqslant 1,\\ y_1^2+y_2, & m=2t,\ t=1,\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{m-2}\sum_{j=0}^{2}G_{i,j}G_{m-2-i,2-j}+y_1G_{m-1,1}+y_2G_{m,0}, & m=2t,\ t\geqslant 2,\end{cases}\tag{9.2.15}$$

其中 $G_{m,0}$ 和 $G_{m-1,1}$ 分别由式 (9.2.11) 和式 (9.2.13) 给出.

进一步, 可以看出, 对于任何整数 $m,\ s\geqslant 1$, $G_{m,s}$ 只由 $G_{p,q}$ $(q\leqslant s-1,\ p\geqslant 0,\ q=s,\ 0\leqslant p\leqslant m-1)$, 依 s 从 1 开始逐一增加的次序所确定.

定理 9.2.2 方程式 (9.2.1) 在 $\mathcal{R}_+\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中有且仅有一个解.

证明 首先, 从上面提供的求 $G_{m,s}$ 的过程, 可以看出由此所得的 G_m 为方程组式 (9.2.4) 的一组解. 根据定理 9.2.1, 即得方程式 (9.2.1) 的一个解. 然后, 由上述求解过程对于始值的唯一性知, 这个解是仅有的. □

从式 (9.2.10), 可以看出对任何整数 $m,\ s\geqslant 1$, $G_{m,s}$ 只由 $G_{r,l}$ $(r+l\leqslant m+s-1)$ 确定. 所以我们可按照 $m+s$ 由小到大的次序, 然后在式 (9.2.11) 和式 (9.2.13) 的基础上, 按 m 由大到小的次序, 用式 (9.2.10) 逐一确定 $G_{m,s}$.

例如, 当 $m+s=0$ 时, $G_{0,0}=1$(始条件). 当 $m+s=1$ 时, $G_{1,0}=G_{0,1}=0$(由引理 9.2.4). 之后, 仅考虑 $m+s=2l$ $(l\geqslant 1)$.

当 $m+s=2$ 时, $G_{2,0}=\dfrac{2!}{1!2!}=1$(由式 (9.2.11)), $G_{1,1}=y_1G_{0,0}=y_1$.

当 $m+s=4$ 时, 由式 (9.2.11) 中 $t=2$ 时的情形,

$$G_{4,0}=\frac{4!}{2!3!}=2;$$

由式 (9.2.10),

$$G_{3,1}=G_{1,1}^{[2]}+\sum_{k=0}^{1-1}y_{k+1}G_{k+2,-k}=2G_{1,1}+y_1G_{2,0}=2y_1+y_1=3y_1;$$

由式 (9.2.15),

$$\begin{aligned}G_{2,2}&=G_{0,0}G_{0,2}+G_{0,1}G_{0,1}+G_{0,2}G_{0,0}+y_1G_{1,1}+y_2G_{2,0}\\&=y_1G_{1,1}+y_2G_{2,0}=y_1^2+y_2;\end{aligned}$$

由式 (9.2.10),

$$G_{1,3}=\sum_{l=0}^{2}y_{l+1}G_{l,2-l}=y_2G_{1,1}+y_3G_{2,0}=y_1y_2+y_3.$$

当 $m+s=6$ 时, 因为已经知道 $G_{6,0}=5$, $G_{0,6}=0$, 只需计算 $G_{5,1}$, $G_{4,2}$, $G_{3,3}$, $G_{2,4}$ 和 $G_{1,5}$. 对于 $m=5$ 和 $s=1$, 用式 (9.2.10), 有

$$\begin{aligned}G_{5,1}&=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{1}G_{i,j}G_{3-i,1-j}+y_1G_{4,0}=2G_{0,0}G_{3,1}+2G_{1,1}G_{2,0}+2y_1\\&=2G_{3,1}+2G_{1,1}+y_1G_{4,0}=6y_1+2y_1+2y_1=10y_1;\end{aligned}$$

对于 $m=4$ 和 $s=2$, 用式 (9.2.10), 有

$$\begin{aligned}G_{4,2}&=\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}G_{i,j}G_{2-i,2-j}+\sum_{l=0}^{1}y_{l+1}G_{l+3,1-l}\\&=2G_{0,0}G_{2,2}+G_{1,1}^2+2G_{2,0}G_{0,2}+y_1G_{3,1}+y_2G_{4,0}\\&=2(y_1^2+y_2)+y_1^2+3y_1^2+2y_2\\&=6y_1^2+4y_2;\end{aligned}$$

对于 $m=s=3$, 用式 (9.2.10), 有

$$\begin{aligned}G_{3,3}&=G_{1,3}^{[2]}+\sum_{k=0}^{2}y_{k+1}G_{k+2,2-k}=2G_{1,3}+y_1G_{2,2}+y_2G_{3,1}+y_3G_{4,0}\\&=2(y_1y_2+y_3)+y_1(y_1^2+y_2)+y_2(3y_1)+y_3(2)\\&=y_1^3+6y_1y_2+4y_3;\end{aligned}$$

对于 $m=2$ 和 $s=4$, 用式 (9.2.10), 有

$$G_{2,4}=G_{0,4}^{[2]}+\sum_{l=0}^{3}y_{l+1}G_{l+1,3-l}=y_1G_{1,3}+y_2G_{2,2}+y_3G_{3,1}+y_4G_{4,0}$$

$$= y_1(y_1y_2+y_3)+y_2(y_1^2+y_2)+y_3(3y_1)+2y_4$$
$$= 2y_1^2y_2+4y_1y_3+y_2^2+2y_4;$$

对于 $m=1$ 和 $s=5$, 用式 (9.2.10), 有

$$G_{1,5}=\sum_{l=0}^{4} y+l+1G_{l,4-l}=y_2G_{1,3}+y_3G_{2,2}+y_4G_{3,1}+y_5G_{4,0}$$
$$= y_2(y_1y_2+y_3)+y_3(y_1^2+y_2)+y_4(3y_1)+2y_5$$
$$= y_1y_2^2++3y_1y_4+y_1^2y_3+2y_2y_3+2y_5.$$

若对于整数 $m,s\geqslant 0$, 记 $l=m+s$,

$$\Gamma_l=\sum_{\substack{m+s=l\\ m,s\geqslant 0}} G_{m,s}x^m, \tag{9.2.16}$$

则容易验证 Γ_l $(l\geqslant 0)$ 都是 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上的多项式, 即 $\Gamma_l\in\mathcal{R}[x,\boldsymbol{y}]$. 上面的计算表明, 对于 $0\leqslant l\leqslant 6$, 有 $\Gamma_1=\Gamma_3=\Gamma_5=0$,

$$\Gamma_l=\begin{cases}1, & l=0,\\ x^2+y_1x, & l=2,\\ 2x^4+3y_1x^3+(y_1^2+y_2)x^2+(y_1y_2+y_3)x, & l=4,\\ 5x^6+(10y_1)x^5+(6y_1^2+4y_2)x^4+(y_1^3+6y_1y_2+4y_3)x^3 & \\ +(2y_1^2y_2+4y_1y_3+y_2^2+2y_4)x^2+(y_1y_2^2+3y_1y_4 & \\ +y_1^2y_3+2y_2y_3+2y_5)x, & l=6.\end{cases} \tag{9.2.17}$$

定理 9.2.3 方程式 (9.2.1) 的解由如下的有限正项和确定:

$$G_{m,s}=\begin{cases}1, & m+s=0,\ \text{即}\ m=s=0,\\ 0, & m+s\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2),\ \text{或}\ m=0,\ s\geqslant 1,\\ \displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant m-2,0\leqslant j\leqslant s\\ i+j\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)}} G_{i,j}G_{m-2-i,s-j}+\sum_{l=0}^{s-1} y_{l+1}G_{l+m-1,s-l-1}, & \text{其他},\end{cases} \tag{9.2.18}$$

当 $0\leqslant m\leqslant 1$ 时, $G_{i,j}=0$ $(0\leqslant i\leqslant m-2,\ 0\leqslant j\leqslant s)$.

证明 在定理 9.2.2 的基础上, 用式 (9.2.18), 按照 $l=m+s$ 由小到大的次序, 求出由式 (9.2.16) 定义的多项式 $\Gamma_l\in\mathcal{R}[x,\boldsymbol{y}]$, 使得

$$g=\sum_{l\geqslant 0}\Gamma_l$$

就是方程式 (9.2.1) 的那个解. □

例 9.2.1　普通平面地图依半度和顶点剖分根同构分类. 由文献[58](204 页), 可以看出 Γ_l $(l=2t=m+s\geqslant 0)$ 在组合地图中的意义. 这就是 Γ_l 中 $x^m\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}$, $\pi(\boldsymbol{n})=s$ 项的系数为根点次 m 和非根端半序 s, 非根节点剖分向量 $\boldsymbol{n}$ 的普通平面地图的根同构类数. 图 9.2.1 提供了 $1\leqslant t\leqslant 3$ 时的情形.

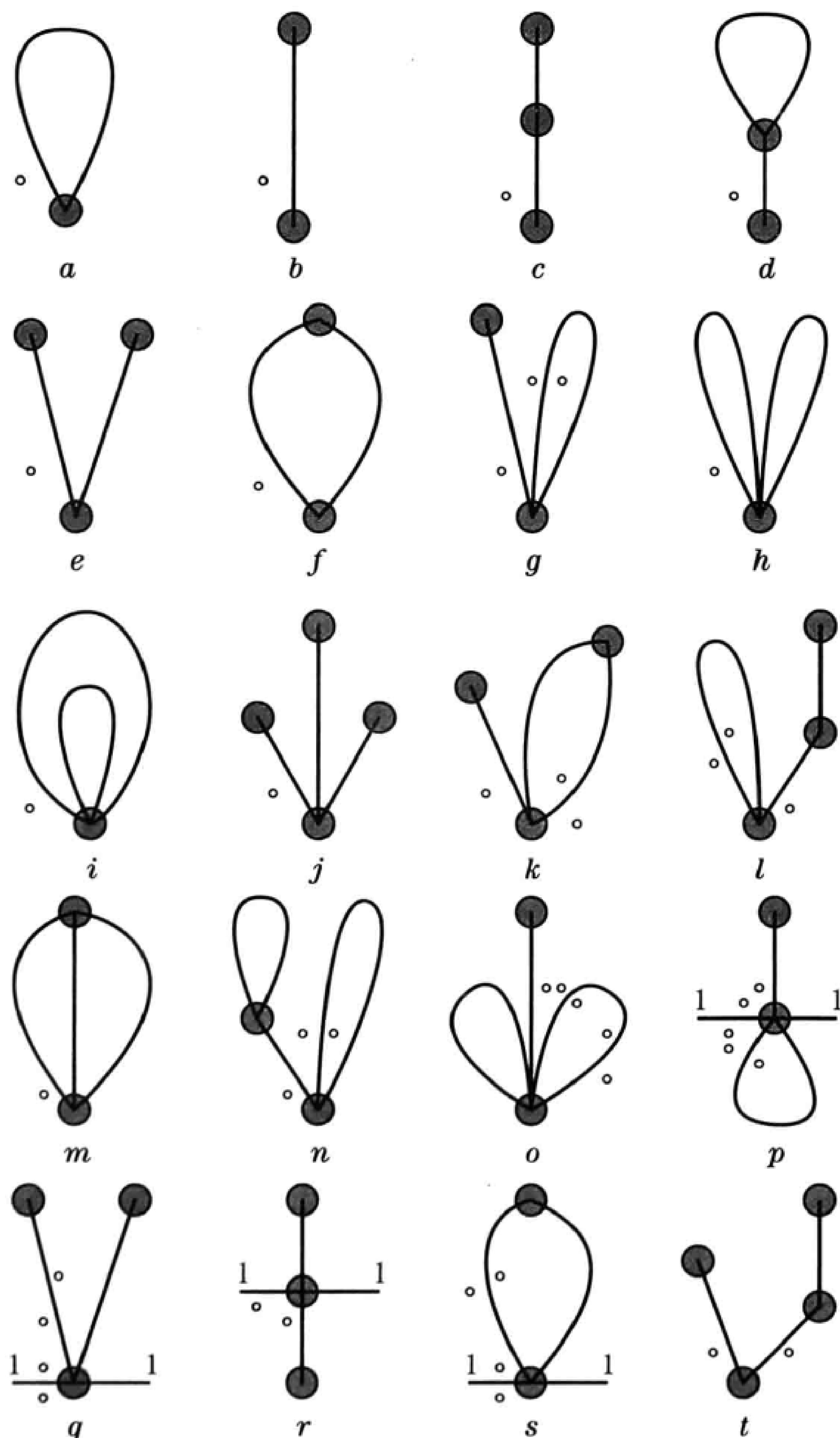
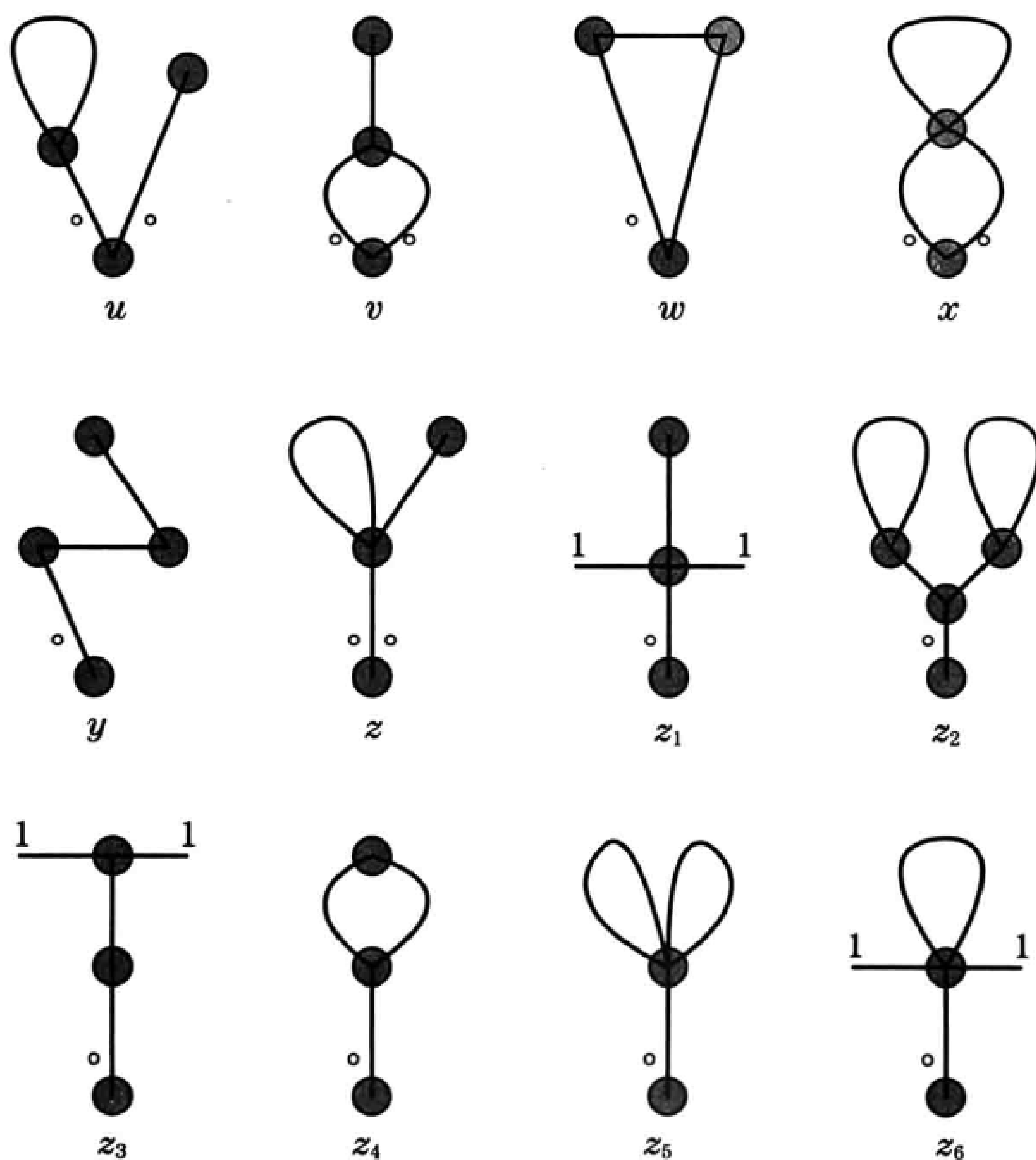


图 9.2.1　普通平面地图依半度和顶点剖分的根同构类



续图 9.2.1

例如

$$\begin{aligned}
\Gamma_2 &= (b)x + (a)x^2 = y_1x + x^2,\\
\Gamma_4 &= (c+d)x + (e+f)x^2 + (3g)x^3 + (h+i)x^4\\
&= (y_1y_2 + y_3)x + (y_1^2 + y_2)x^2 + 3y_1x^3 + 2x^4,\\
\Gamma_6 - 5x^6 &= (y + (2z + z1) + z2 + (z3 + z4) + (z5 + z5))x\\
&\quad + (2t + (2u + 2v) + w + 2x)x^2\\
&\quad + (j + (3k + 3l) + (m + 3n))x^3\\
&\quad + ((4q + 2r) + 4s)x^4 + (5o + 5p)x^5\\
&= (y_1y_2^2 + 3y_1y_4 + y_1^2y_3 + 2y_2y_3 + 2y_5)x\\
&\quad + (2y_1^2y_2 + 4y_1y_3 + y_2^2 + 2y_4)x^2 + (y_1^3 + 6y_1y_2 + 4y_3)x^3\\
&\quad + (6y_1^2 + 4y_2)x^4 + (10y_1)x^5.
\end{aligned}$$

9.3　无环内面型

在文献 [67](179 页) 中 (追源于 [29]), 可以看到介子方程

$$\begin{cases} g = \int_y \dfrac{1}{1-\partial_{x,y}(u^2 g|_{x=u})}, \\ g|_{x=0\Rightarrow \boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = 1. \end{cases} \tag{9.3.1}$$

式中 $g \in \mathcal{R}_+\{x,\boldsymbol{y}\}$, $\partial_{x,y}$ 为斜差分算子. 因为这个方程与无自环的平面地图有关, 所以称之为无环内面型的.

从 $g \in \mathcal{R}_+\{x,\boldsymbol{y}\}$, 可知 g 由 $G_m = \partial_x^m g \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}(m \geqslant 0)$ 确定.

首先, 需要导出 $\partial_{x,y}(u^2 g|_{x=u})$ 与 G_j $(j \geqslant 0)$ 的关系. 由

$$\begin{aligned}\partial_{x,y}(u^2 g|_{x=u}) &= \frac{yx^2 g - xy^2 g|_{x=y}}{x-y} = \sum_{m\geqslant 0} G_m\Big(\frac{yx^2x^m - xy^2y^m}{x-y}\Big) \\ &= xy\sum_{m\geqslant 0} G_m\Big(\frac{x^{m+1}-y^{m+1}}{x-y}\Big),\end{aligned}$$

$$x^{m+1}-y^{m+1} = (x-y)\sum_{i=0}^{m} x^i y^{m-i},$$

有

$$\begin{aligned}\partial_{x,y}(u^2 g|_{x=u}) &= \sum_{l\geqslant 0} G_l\Big(\sum_{i=0}^{l} y^{l-i+1}x^{i+1}\Big) = \sum_{l\geqslant 0} G_l\Big(\sum_{j=1}^{l+1} y^{l-j+2}x^j\Big) \\ &= \sum_{j\geqslant 1}\Big(\sum_{l\geqslant j-1} G_l y^{l-j+2}\Big)x^j.\end{aligned} \tag{9.3.2}$$

然后, 递推地导出 $\big(\partial_{x,y}(u^2 g|_{x=u})\big)^k$ $(k \geqslant 2)$ 与 G_j $(j \geqslant 0)$ 的关系. 记

$$P_j = \sum_{l\geqslant j-1} G_l y^{l-j+2} = \sum_{i\geqslant 1} G_{i+m-2} y^i, \tag{9.3.3}$$

则对于任何整数 $k \geqslant 2$, 有

$$P_j^{[k]} = \sum_{i=0}^{j} P_i^{[k-1]} P_{j-i} = \sum_{i=1}^{j-1} P_i^{[k-1]} P_{j-i}. \tag{9.3.4}$$

当 $k=2$ 时, 在式子中出现的 $P_i^{[1]}=P_i\ (0\leqslant i\leqslant j)$.

因为

$$\frac{1}{1-\partial_{x,y}(u^2 g|_{x=u})}=\sum_{k\geqslant 0}\left(\partial_{x,y}(u^2 g|_{x=u})\right)^k,$$

由方程式 (9.3.1), 对于整数 $m\geqslant 0$, 有

$$G_m=\sum_{k\geqslant 0}\int_y \partial_x^m\left(\left(\partial_{x,y}(u^2 g|_{x=u})\right)^k\right)=\sum_{k\geqslant 0}\int_y P_m^{[k]}. \tag{9.3.5}$$

对于整数 $m,\ k\geqslant 0$, 令

$$\Pi_m^{[k]}=\int_y P_m^{[k]}, \tag{9.3.6}$$

则由式 (9.3.3) 和式 (9.3.4), 有

$$\Pi_m^{[k]}=\begin{cases}\left.\begin{matrix}1, & m=0,\\ 0, & m\geqslant 1,\end{matrix}\right\} & \text{当 } k=0 \text{ 时},\\ \left.\begin{matrix}0, & m=0,\\ \displaystyle\sum_{i\geqslant 1}G_{i+m-2}y^i, & m\geqslant 1,\end{matrix}\right\} & \text{当 } k=1 \text{ 时},\\ \left.\begin{matrix}0, & 0\leqslant m\leqslant k-1,\\ \displaystyle\sum_{i=k-1}^{m-1}\Pi_i^{[k-1]}\otimes\Pi_{m-i}, & m\geqslant k,\end{matrix}\right\} & \text{当 } k\geqslant 2 \text{ 时}.\end{cases} \tag{9.3.7}$$

由式 (9.3.5), 即得

$$G_m=\sum_{k\geqslant 0}\Pi_m^{[k]}. \tag{9.3.8}$$

定理 9.3.1 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中, 方程式 (9.3.1) 与方程组

$$\begin{cases}G_m-\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\Pi_m^{[k]}=0 \quad (m\geqslant 1),\\ G_0=1\end{cases} \tag{9.3.9}$$

等价.

证明 首先, 由式 (9.3.3), 知 $P_0=0$, 所以 $\Pi_0=0$. 因为 $G_0=1+\Pi_0=1$, 可见方程组式 (9.3.9) 的始值与方程式 (9.3.1) 的相同. 然后, 对于任何整数 $m\geqslant 1$, 由方程式 (9.3.1) 得到式 (9.3.8). 从而, 由 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中的消去律, 即得欲证的结论. □

可惜的是, 在式 (9.3.8) 中的求和不是有限的. 这就使我们不得不寻找一个新的参数 s, 使得对于任何给定的 s, $G_{m,s}$ 总是有限的. 自然会想到, 将 s 选作 $\boldsymbol{y}$ 的次. 通过论证, 这时的 $G_{m,s}$ 仍然不是有限的.

由 $G_m \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$, 有

$$G_m = \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathcal{J}_m} G_{m,\boldsymbol{n}} \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}, \tag{9.3.10}$$

其中 $\mathcal{J}_m$ 为 G_m 中所有项中出现过的 $\boldsymbol{y}$ 的次向量 $\boldsymbol{n}$ 的集合. 当然, $G_{m,\boldsymbol{n}} \in \mathcal{R}_+^{|\boldsymbol{n}|}$.

对于任何 $\boldsymbol{n}$, 令 $\pi(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{i}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}$, 称为 $\boldsymbol{n}$ 的半度. 对于任何整数 m, $k \geqslant 0$, 记

$$G_{m,s} = \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathcal{J}_m} G_{m,\boldsymbol{n}} \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}} \Big|_{\pi(\boldsymbol{n})=s} = \big\langle G_m \big\rangle_s = \sum_{\substack{\boldsymbol{n} \in \mathcal{J}_m \\ \pi(\boldsymbol{n})=s}} G_{m,\boldsymbol{n}} \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}. \tag{9.3.11}$$

因此, 也可以称 $\pi(G_{m,s}) = s$ 为 $G_{m,s}$ 的半度和, 记 $\mathcal{J}_{m,s} = \{\boldsymbol{n} \in \mathcal{J}_m \big| \pi(\boldsymbol{n}) = s\}$.

因为从式 (9.3.9), $G_0 = 1$, 导致 $G_{0,s} = 0$ $(s \geqslant 1)$, 即对于整数 $s \geqslant 0$,

$$G_{0,s} = \begin{cases} 1, & s = 0, \\ 0, & s \geqslant 1. \end{cases} \tag{9.3.12}$$

只需考虑 $m \geqslant 1$ 时的情形. 对于 $k \geqslant 1$, 由式 (9.3.7),

$$\begin{aligned} \varPi_{m,s} &= \Big\langle \sum_{i \geqslant 1} G_{i+m-2} y^i \Big\rangle_s = \sum_{l \geqslant m-1} \big\langle G_{i+m-2} y^i \big\rangle_s \\ &= \sum_{l \geqslant m-1} y_i G_{i+m-2,s-i} = \sum_{i=1}^{s} y_i G_{i+m-2,s-i} \\ &= \sum_{j=0}^{s-1} y_{j+1} G_{j+m-1,s-j-1}. \end{aligned} \tag{9.3.13}$$

引理 9.3.1 对于任何整数 $m \geqslant 0$, 在方程组式 (9.3.9) 中, 有

$$G_{m,0} = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0, & m \geqslant 1. \end{cases} \tag{9.3.14}$$

证明 当 $m = 0$ 时, 就是方程组式 (9.3.9) 的始值条件. 当 $m \geqslant 1$ 时, 由式 (9.3.7) 和式 (9.3.8), 以及 $\varPi_{0,0}^{[k]} = 0$ $(k \geqslant 0)$, 即导出欲证的结论. □

下面, 再看一看 $G_{m,1}$, 即 $s = 1$ 时的情形如何在引理 9.3.1 的基础上导出.

引理 9.3.2 对于任何整数 $m\geqslant 0$, 在方程组式 (9.3.9) 中, 有

$$G_{m,1}=\begin{cases}0, & m=0,\\ y_1, & m=1,\\ 0, & m\geqslant 2.\end{cases} \tag{9.3.15}$$

证明 首先, 由式 (9.3.9), 知 $G_{0,0}=1$, 从而有 $G_{0,s}=0\ (s\geqslant 1)$. 这就是 $m=0$ 情形下的结论. 然后, 讨论 $m\geqslant 1$ 时的一般情形. 对于 $m=1$, 由式 (9.3.13), 知

$$\Pi_{1,1}^{[1]}=\Pi_{1,1}=\Big\langle\sum_{j=0}^{0}y_{j+1}G_{j,s-j-1}\Big\rangle_1=\big\langle y_1G_{0,0}\big\rangle_1=y_1.$$

由于 $\Pi_{0,1}^{[0]}=0$, 从式 (9.3.7) 和式 (9.3.13), 即得 $\Pi_{1,1}^{[k]}=0\ (k\geqslant 2)$. 从而, 由式 (9.3.8), 有 $G_{1,1}=y_1$. 进而, 由式 (9.3.7), 以及 $\Pi_{2,1}^{[0]}=0$ 和式 (9.3.7), 有

$$\Pi_{2,1}^{[1]}=\Pi_{2,1}=\sum_{j=0}^{1}y_{j+1}G_{j+1,-j}=y_1G_{1,0}=0.$$

由式 (9.3.7), 有

$$\Pi_{2,1}^{[2]}=\big\langle P_1^2\big\rangle_1=P_{1,1}^2=\big\langle y_1^2\big\rangle_1=0.$$

同理, 有 $\Pi_{2,1}^{[k]}=0\ (k\geqslant 3)$. 从而, 由式 (9.3.8), 得 $G_{2,1}=0$. 如此下去, 可得 $G_{m,1}=0(m\geqslant 3)$. □

由于 $G_{1,0}=G_{0,1}=0$, 这启示我们不能不想探究 $G_{m,s}\ (m,\ s\geqslant 0)$ 中 0 的分布, 以便在求它们时将这些 0 值忽略不计.

引理 9.3.3 对于任何整数 $m,\ s\geqslant 0$, 如果 $\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}_{m,s}$, 使得 $G_{m,s}\neq 0$, 则 $s=\pi(\boldsymbol{n})\equiv m(\text{mod }2)$.

证明 由上面的计算可以看出, 当 $m+s\leqslant 1$ 时, 只有 $G_{0,0}\neq 0$. 这时, $m\equiv s(\text{mod }2)$, 即欲证的结论成立. 对于 $m+s\geqslant 2$, 用数学归纳法. 假设 $G_{i,j}\neq 0$ $(i+j<m+s,\ i,\ j\geqslant 0)$, 都有 $i\equiv j(\text{mod }2)$. 往证, 对于 $G_{m,s}\neq 0$, 有 $s\equiv m(\text{mod }2)$. 由式 (9.3.7) 和式 (9.3.8), 知

$$G_{m,s}=\sum_{k=0}^{m}\Pi_{m,s}^{[k]}, \tag{9.3.16}$$

由式 (9.3.7), 知 $\Pi_{m,s}^{[k]}\ (k\geqslant 2)$ 都只与 $\Pi_{i,j}\ (i+j\leqslant m+s-1)$ 有关. 由归纳假设, 它们的项都满足欲证的结论. 只剩下 $k=1$ 时的情形. 考虑式 (9.3.13) 中的项

$$y_{j+1}G_{j+m-1,s-j-1}\quad (0\leqslant j\leqslant s-1).$$

因为 $(j+m-1)+(s-j-1)=m+s-2\leqslant m+s-1$, 由归纳假设, 知

$$j+m-1\equiv s-j-1(\text{mod } 2)\ \Rightarrow\ m-1\equiv s-1(\text{mod } 2)\ \Rightarrow\ m\equiv s(\text{mod } 2).$$

这就完成了预想结论的证明. □

由于 $m\equiv s(\text{mod } 2)$ 意味着 $m+s\equiv 0(\text{mod } 2)$, 这个引理提示我们, 对于任何 $\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}_{m,s}$, 都有 $m+\pi(\boldsymbol{n})\equiv 0(\text{mod } 2)$.

定理 9.3.2 方程式 (9.3.1) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中有且仅有一个解.

证明 对于任何整数 $m,s\geqslant 0$, 当 $m+s=0$, 即 $m=s=0$ 时, 由式 (9.3.14), 知 $G_{0,0}=1$. 这就是方程式 (9.3.1) 的始条件. 当 $m+s=1$ 时, 去确定 $G_{0,1}$ 和 $G_{1,0}$. 由引理 9.3.3 知, $G_{0,1}=G_{1,0}=0$ 满足方程式 (9.3.9), 从而由定理 9.3.1 知, 它们也适合方程式 (9.3.1). 在此基础上, 可以假设对于任何整数 l, $t\geqslant 0$, 只要 $l+t<m+s$, 用上面的方法所得的 $G_{l,t}$ 都满足方程式 (9.3.9). 往证 $G_{m,s}$ 满足方程式 (9.3.9).

由式 (9.3.13) 可以看出, $\Pi_{m,s}$ 仅依赖 $G_{j+m-1,s-j-1}$. 因为 $(j+m-1)+(s-j-1)=m+s-2<m+s$, 由归纳假设, $\Pi_{m,s}$ 可以被确定. 由式 (9.3.7) 可以看出, 对于所有 $2\leqslant k\leqslant m$, $\Pi^{k}_{m,s}$ 只由 $\Pi_{m,s}$ 的项确定. 从而, 由式 (9.3.16), $G_{m,s}$ 随之被确定. 这就意味着求出了方程组式 (9.3.9) 的一个解. 由定理 9.3.2, 即得方程式 (9.3.1) 的一个解.

进而, 由方程组式 (9.3.9) 解的唯一性, 可知方程式 (9.3.1) 的这个解是仅有的. □

为了求出这个解的尽量简单的系数均为正项和的表达式, 还必须进一步揭示它的有关结构上的性质.

引理 9.3.4 对于任何一个给定的整数 $s\geqslant 1$, 如果正整数 $s\leqslant m-1$, 则 $G_{m,s}=0$.

证明 当 $s=0,1$ 时, 分别由式 (9.3.14) 和式 (9.3.15) 可以看出, 如果正整数 $s\leqslant m-1$, 则 $G_{m,s}=0$. 当 $s\geqslant 2$ 时, 可以假设对于任何整数 $t\leqslant s-1$, 只要 $t\leqslant m-1$, 就有 $G_{m,t}=0$. 根据数学归纳法, 往证 $t=s$ 时引理的结论成立.

由式 (9.3.14) 可见, 对于 $s\geqslant 1$, 式 (9.3.16) 变为

$$G_{m,s}=\sum_{k=1}^{m}\Pi^{[k]}_{m,s}. \tag{9.3.17}$$

要想证明 $G_{m,s}=0$, 就必须先对于整数 $1\leqslant k\leqslant m$, 证明 $\Pi_{m,s}^{[k]}=0$. 当 $k=1$ 时, 在式 (9.3.13) 的基础上, 由 $s\leqslant m-1$, 有

$$s-j-1\leqslant m-1-j-1\leqslant (m+j-1)-1.$$

由于 $s-j-1\leqslant s-1$, 从归纳假设知对于所有整数 j $(s-1\geqslant j\geqslant 0)$, $G_{m+j-1,s-j-1}=0$. 由式 (9.3.13), 即得 $\Pi_{m,s}=\Pi_{m,s}^{[1]}=0$. 进而, 由式 (9.3.7), 就可得 $\Pi_{m,s}^{[k]}=0$ $(k\geqslant 2)$. □

这个引理使我们在求方程组式 (9.3.9) 解的过程中, 可以不用考虑在矩形区域 $m,\ s\geqslant 1$ 内, 射线 $m=s$ 下部的 $G_{m,s}$ 了.

引理 9.3.5 对于任何整数 $m,\ s\geqslant 1$, 如果 $m+s$ 是奇数, 则 $G_{m,s}=0$.

证明 实际上, 这是引理 9.3.3 的一个直接推论. □

前面的两个引理, 使我们求解方程组式 (9.3.9) 的工作量减少了 3/4.

引理 9.3.6 给定一个整数 $s\geqslant 1$. 对于任何整数 $m\geqslant 1$, $G_{m,s}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$ 与 y_l $(l\geqslant s+1)$ 无关.

证明 由式 (9.3.17), $G_{m,s}$ 由 $\Pi_{m,s}^{[k]}$ $(1\leqslant k\leqslant m)$ 确定. 由式 (9.3.7), $\Pi_{m,s}^{[k]}$ $(2\leqslant k\leqslant m)$ 仅由 $\Pi_{m,s}=\Pi_{m,s}^{[1]}$ 确定. 由式 (9.3.13), $\Pi_{m,s}$ 由 $G_{j+m-1,s-j-1}$ $(0\leqslant j\leqslant s-1)$ 和 y_l $(1\leqslant l\leqslant s)$ 确定.

当 $s=0,\ 1$ 时, 分别从式 (9.3.14) 和式 (9.3.15) 知引理的结论成立. 这就允许我们假设对于正整数 $t\leqslant s-1$, $G_{m,t}$ 只依赖 y_l $(1\leqslant l\leqslant s-1)$. 往证 $G_{m,s}$ 只依赖 y_l $(1\leqslant l\leqslant s)$. 因为 $s-j-1\leqslant s-1$, $0\leqslant j\leqslant s-1$, 由归纳假设, 即可得 $G_{m,s}$ 只与 $y_l(1\leqslant l\leqslant s)$ 有关. 这就得到欲证的结论. □

这个引理启示我们, 在求 $G_{m,s}$ $(m,\ s\geqslant 1)$ 时, 只需要考虑 $\boldsymbol{y}_s$ 中的 s 个变量就够了. 就是说, 对于给定的整数 $s\geqslant 1$, 将无限维空间中的方程式 (9.3.1) 的求解简化到在有限 s 维空间上进行.

引理 9.3.7 对于任何整数 $m,\ s\geqslant 1$, $G_{m,s}$ 是 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 中的最低次不小于 1 和最高次不超过 s 的一个多项式.

证明 由引理 9.3.6, 我们可考虑任何 $\boldsymbol{n}_s=(n_1,n_2,\cdots,n_s)\in\mathcal{J}_{m,s}$. 因幂向量为 $\boldsymbol{n}_s$ 的项是 $|\boldsymbol{n}_s|$ 次的, 令 $\mathcal{D}=\{|\boldsymbol{n}_s|\,|\,\boldsymbol{n}_s\in\mathcal{J}_{m,s}\}$, 即 $G_{m,s}$ 中项的所有次的集合. 因为

$$1=|\mathbf{1}_{[i]}|=\min_{\boldsymbol{n}_s\in\mathcal{D}}|\boldsymbol{n}_s|\quad (1\leqslant i\leqslant s),$$

其中 $|\mathbf{1}_{[i]}|$ 为 $n_j=\delta_{i,j}$ $(1\leqslant j\leqslant s)$ 的向量和,

$$s=\left|s\mathbf{1}_1\right|=\min_{\boldsymbol{n}_s\in\mathcal{D}}|\boldsymbol{n}_s|,$$

即得欲证的结论. □

由这个引理我们可以看到, 对于任何给定的整数 m, $s\geqslant 1$, 求 $G_{m,n}$ 是在有限的空间中寻找所要的多项式.

引理 9.3.8 方程式 (9.3.1) 的解由如下正系数多项式给出:

$$G_{m,s}=\begin{cases}1, & m+s=0,\ \text{即}\ m=s=0,\\ \sum\limits_{k=1}^{m}\Pi_{m,s}^{[k]}, & m+s\geqslant 1,\ m,\ s\geqslant 1,\ m\equiv s(\mathrm{mod}\ 2),\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\tag{9.3.18}$$

其中

$$\Pi_{m,s}^{[k]}=\begin{cases}\sum\limits_{j=0}^{s-1}y_{j+1}G_{j+m-1,s-j-1}\ (=\Pi_{m,s}), & k=1,\\ \sum\limits_{i=1}^{s-1}\sum\limits_{j=1}^{s-1}(\Pi_{s-i,s-j}^{[s-1]}\otimes\Pi_{i,j}), & k=m=s,\\ \sum\limits_{i=k-1}^{m-1}\sum\limits_{j=1}^{s-1}(\Pi_{m-i,s-j}^{[k-1]}\otimes\Pi_{i,j}), & k\geqslant 2.\end{cases}\tag{9.3.19}$$

证明 由引理 9.3.4、引理 9.3.5 和式 (9.3.17) 即得式 (9.3.18), 进而可得式 (9.3.19). □

在这个引理的基础上, 下面求 $m+s\leqslant 6$ 时的 $G_{m,s}$. 由式 (9.3.18), 只有 $m+s=0$, 2, 4 和 6 四种情形. 当 $m+s=0$ 时, 只有 $G_{0,0}=1$. 然后, 考虑 m, $s\geqslant 1$.

当 $m+s=2$ 时, 只需求 $G_{1,1}$. 因为 $G_{1,1}=\Pi_{1,1}$,

$$\Pi_{1,1}=\sum_{j=0}^{1-1}y_{j+1}G_{j,-j}=y_1G_{0,0}.$$

由 $G_{0,0}=1$, 有 $G_{1,1}=y_1$.

当 $m+s=4$ 时, 就是求 $G_{2,2}$ 和 $G_{1,3}$.

因为 $G_{2,2}=\Pi_{2,2}^{[1]}+\Pi_{2,2}^{[2]}$, $\Pi_{2,2}^{[1]}=\Pi_{2,2}$, $\Pi_{2,2}^{[2]}=\Pi_{1,1}\otimes\Pi_{1,1}$, 所以有

$$\left\{\begin{array}{l}\Pi_{2,2}^{[1]}=\sum_{j=0}^{1}y_{j+1}G_{j+1,1-j}=y_1G_{1,1}+y_2G_{2,0}=y_1G_{1,1},\\ \Pi_{2,2}^{[2]}=y_1G_{0,0}\otimes y_1G_{0,0}=y_2G_{0,0}^2.\end{array}\right.$$

由 $G_{0,0}=1$, $G_{1,1}=y_1$, 即得 $G_{2,2}=y_1^2+y_2$.

因为 $G_{1,3}=\Pi_{1,3}$,

$$\Pi_{1,3}=\sum_{j=0}^{2}y_{j+1}G_{j,2-j}=y_1G_{0,2}+y_2G_{1,1}+y_3G_{2,0}=y_2G_{1,1}=y_1y_2,$$

所以有 $G_{1,3}=y_1y_2$.

当 $m+s=6$ 时, 就是求 $G_{3,3}$, $G_{2,4}$ 和 $G_{1,5}$.

因为 $G_{3,3}=\Pi_{3,3}^{[1]}+\Pi_{3,3}^{[2]}+\Pi_{3,3}^{[3]}$, 以及

$$\begin{aligned}\Pi_{3,3}^{[1]}&=\sum_{j=0}^{2}y_{j+1}G_{j+2,2-j}=y_1G_{2,2}=y_1^3+y_1y_2,\\ \Pi_{3,3}^{[2]}&=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(\Pi_{3-i,3-j}\otimes\Pi_{i,j})=\sum_{i=1}^{2}(\Pi_{3-i,2}\otimes\Pi_{i,1}+\Pi_{3-i,1}\otimes\Pi_{i,2})\\ &=(\Pi_{2,2}\otimes\Pi_{1,1}+\Pi_{1,1}\otimes\Pi_{2,2})=2(\Pi_{2,2}\otimes\Pi_{1,1})\\ &=2(y_1G_{1,1}\otimes y_1G_{0,0})=2(y_2G_{1,1}G_{0,0})=2y_1y_2,\\ \Pi_{3,3}^{[3]}&=\Pi_{1,1}\otimes\Pi_{2,2}^{[2]}=y_1G_{0,0}\otimes y_2G_{0,0}^2=y_3G_{0,0}^3=y_3,\end{aligned}$$

所以有 $G_{3,3}=(y_1^3+y_1y_2)+(2y_1y_2)+y_3=y_1^3+3y_1y_2+y_3$.

因为 $G_{2,4}=\Pi_{2,4}[1]+\Pi_{2,4}[2]$, 以及

$$\begin{aligned}\Pi_{2,4}^{[1]}&=\sum_{j=0}^{3}y_{j+1}G_{j+1,3-j}=y_1G_{1,3}+y_2G_{2,2}=2y_1^2y_2+y_2^2,\\ \Pi_{2,4}^{[2]}&=\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=1}^{3}(\Pi_{2-i,4-j}\otimes\Pi_{i,j})=\sum_{j=1}^{3}(\Pi_{1,4-j}\otimes\Pi_{1,j})\\ &=2(\Pi_{1,1}\otimes\Pi_{1,3})=2y_3G_{0,0}G_{1,1}=2y_1y_3,\end{aligned}$$

所以有 $G_{2,4}=(2y_1^2y_2+y_2^2)+(2y_1y_3)=2y_1^2y_2+2y_1y_3+y_2^2$.

因为 $G_{1,5}=\Pi_{1,5}^{[1]}=\Pi_{1,5}$, 以及

$$\begin{aligned}\Pi_{1,5}&=\sum_{j=0}^{4}y_{j+1}G_{j,4-j}=y_1G_{0,4}+y_2G_{1,3}+y_3G_{2,2}\\ &=y_2G_{1,3}+y_3G_{2,2}=y_1y_2^2+y_1^2y_3+y_2y_3,\end{aligned}$$

所以有 $G_{1,5}=y_1y_2^2+y_1^2y_3+y_2y_3$.

推论 9.3.1　对任何一个整数 $s\geqslant 1$, 有 $\Pi_{s,s}^{[s]}=y_s$.

证明　根据式 (9.3.19), 当 $m=k=s$ 时,

$$\Pi_{s,s}^{[s]}=\sum_{i=1}^{s-1}\sum_{j=1}^{s-1}(\Pi_{s-i,s-j}^{[s-1]}\otimes\Pi_{i,j}).$$

如果 $i\neq j$, 则不是 $i>j$ 就是 $s-i>s-j$, 从而 $\Pi_{s-j,s-j}^{[s-1]}=0$. 这就意味着

$$\Pi_{s,s}^{[s]}=\Pi_{s-j,s-j}^{[s-1]}\otimes\Pi_{j,j}\quad(j\geqslant 1).$$

如果 $j\neq 1$, 即 $j\geqslant 2$, 则 $s-j\leqslant s-2<s-1$, 从而 $\Pi_{s-j,s-j}^{[s-1]}=0$. 这就意味着

$$\Pi_{s,s}^{[s]}=\Pi_{s-1,s-1}^{[s-1]}\otimes\Pi_{1,1}.$$

$\Pi_{1,1}=y_1$ 就是 $s=1$ 时的结论. 对于 $s\geqslant 2$, 可以假设 $\Pi_{s-1,s-1}^{[s-1]}=y_{s-1}$. 由数学归纳法,

$$\Pi_{s,s}^{[s]}=y_{s-1}\otimes\Pi_{1,1}=y_{s-1}\otimes y_1=y_s,$$

即得欲证的结论. □

至此, 对于方程式 (9.3.1) 的解, 我们可以完成所有系数多项式在 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 中的正项和表示.

定理 9.3.3　方程式 (9.3.1) 的解由如下系数为正项和的多项式给出:

$$G_{m,s}=\begin{cases}1, & m+s=0,\ \text{即}\ m=s=0,\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\Pi_{m,s}^{[k]}, & m+s\geqslant 1,\ s\geqslant m\geqslant 1,\ m\equiv s(\mathrm{mod}\ 2),\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\tag{9.3.20}$$

其中对于 $s\geqslant m\geqslant 1$, $m\equiv s(\mathrm{mod}\ 2)$,

$$\Pi_{m,s}^{[k]}=\begin{cases}y_s, & k=m=s,\\ \displaystyle\sum_{j=0}^{s-1}y_{j+1}G_{j+m-1,s-j-1}\quad(=\Pi_{m,s}), & \text{除}\ k=m=s\ \text{外},\ k=1,\\ \displaystyle\sum_{i=k-1}^{m-1}\sum_{j=1}^{s-1}(\Pi_{m-i,s-j}^{[k-1]}\otimes\Pi_{i,j}), & \text{除}\ k=m=s\ \text{外},\ k\geqslant 2.\end{cases}\tag{9.3.21}$$

证明 这是引理 9.3.8 和推论 9.3.1 的直接结果. □

例 9.3.1 无环平面地图依根点次和非根顶点剖分向量的根同构分类. 文献 [67] 已经提供了无环平面根地图以根点次 m (x 的幂) 和非根顶点剖分向量 $\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{y}$ 的幂向量) 为参数的同构类数的函数是方程式 (9.3.1) 的一个解的论证. 由定理 9.3.2 知, 上面所求出的 $G_{m,s}$ $(m+s \leqslant 6)$ 都有计数上的意义.

在图 9.3.1 中, 可以看出, 例如

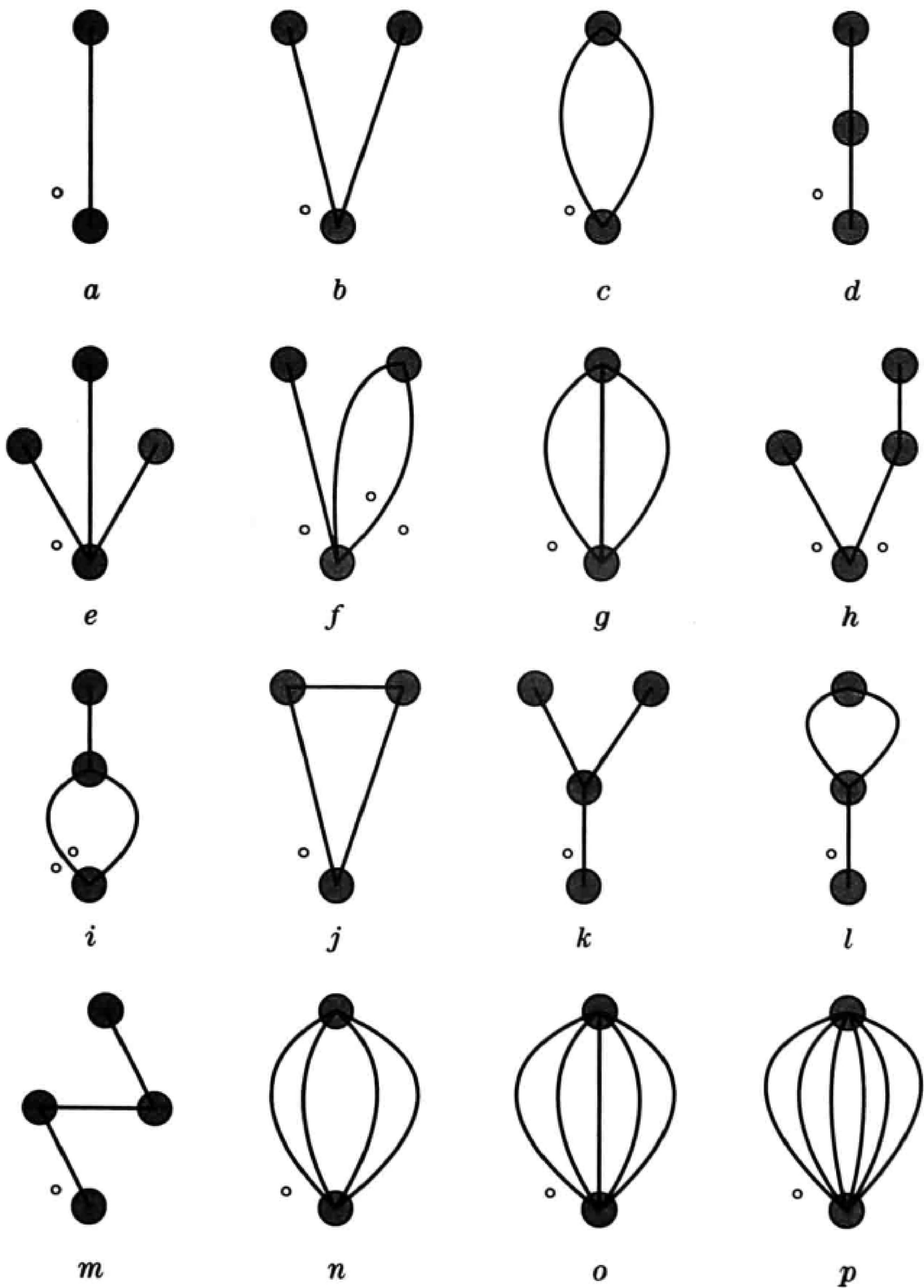


图 9.3.1 无环平面地图的根同构类

$$G_{1,1}=(a)=y_1,$$
$$G_{2,2}=(b)+(c)=y_1^2+y_2,$$
$$G_{1,3}=(d)=y_1y_2,$$
$$G_{3,3}=(e)+3(f)+(g)=y_1^3+3y_1y_2+y_3,$$
$$G_{2,4}=2(h)+2(i)+(j)=2y_1^2+2y_1y_3+y_2^2,$$
$$G_{1,5}=(m)+(k)+(l)=y_1y_2^2+y_1^2y_3+y_2y_3,$$

以及

$$\Pi_{4,4}^{[4]}=(n)=y_4,\quad \Pi_{5,5}^{[5]}=(o)=y_5,\quad \Pi_{6,6}^{[6]}=(p)=y_6.$$

9.4　无隔内面型

在文献[21] 和 [57](187 页) 中, 可以看到方程

$$\begin{cases} f=x^2+x\int_y \dfrac{y\partial_{x,y}f|_{u=x}}{1-\partial_{x,y}f|_{u=x}}, \\ f|_{x=0\Rightarrow \boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=0, \end{cases} \tag{9.4.1}$$

其中 $f\in\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3,\cdots)$.

这个方程是从研究不可分离平面地图的根同构类数的过程中发现的. 因为不可分离就是不存在一个顶点, 这使得将一个地图隔离为多个地图, 称方程式 (9.4.1) 是无隔内面型的.

从 $f\in\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 可知, f 由 $F_m=\partial_x^m f\in\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}(m\geqslant 0)$ 确定.

由

$$\partial_{x,y}f|_{u=x}=\sum_{l\geqslant 0}F_l\Big(\frac{yx^l-xy^l}{x-y}\Big)=xy\sum_{l\geqslant 0}F_l\Big(\frac{x^{l-1}-y^{l-1}}{x-y}\Big),$$

以及

$$x^{l-1}-y^{l-1}=(x-y)\Big(\sum_{i=0}^{l-2}y^ix^{l-2-i}\Big),$$

就有

$$\begin{aligned}\partial_{x,y}f|_{u=x} &= xy\sum_{l\geqslant 0}F_l\Big(\sum_{i=0}^{l-2}y^ix^{l-2-i}\Big)=\sum_{l\geqslant 0}F_l\Big(\sum_{i=0}^{l-2}y^{i+1}x^{l-1-i}\Big)\\ &=\sum_{l'\geqslant 1}F_{l'-1}\Big(\sum_{i=0}^{l'-1}y^{i+1}x^{l'-2-i}\Big)=\sum_{l'\geqslant 1}F_{l'-1}\Big(\sum_{i'=1}^{l'}y^{i'}x^{l'-1-i'}\Big)\\ &=\sum_{l\geqslant 1}F_{l-1}\Big(\sum_{i=1}^{l}y^{l-i-1}x^i\Big)=\sum_{i\geqslant 1}\Big(\sum_{l\geqslant i}F_{l-1}y^{l-i-1}\Big)x^i.\end{aligned}$$

由此即可得

$$y\partial_{x,y}f|_{u=x}=\sum_{i\geqslant 1}\Big(\sum_{l\geqslant i}F_{l-1}y^{l-i}\Big)x^i. \tag{9.4.2}$$

对于介子泛函下的部分, 由

$$\frac{1}{1-\partial_{x,y}f|_{u=x}}=\sum_{j\geqslant 0}(\partial_{x,y}f|_{u=x})^j,$$

可得

$$\frac{y\partial_{x,y}f|_{u=x}}{1-\partial_{x,y}f|_{u=x}}=\sum_{j\geqslant 1}y(\partial_{x,y}f|_{u=x})^j.$$

利用式 (9.4.2), 有

$$\frac{y\partial_{x,y}f|_{u=x}}{1-\partial_{x,y}f|_{u=x}}=\sum_{j\geqslant 1}y\Big(\sum_{i\geqslant 0}\Big(\sum_{l\geqslant i+1}F_{l-1}y^{l-i-1}\Big)x^i\Big)^j. \tag{9.4.3}$$

为叙述方便, 对于任何整数 $k\geqslant 1$ 和 $m\geqslant 0$, 记 $\varLambda_m=\partial_x^m(\partial_{x,y}f|_{u=x})$,

$$\varLambda_m^{[k]}=\begin{cases}0, & k=0,\\ \varLambda_m, & k=1,\\ \displaystyle\sum_{j=0}^{m}\varLambda_{m-j}^{[k-1]}\varLambda_j, & k\geqslant 2.\end{cases} \tag{9.4.4}$$

容易证明, 对于任何整数 $k\geqslant 1$ 和 $m\geqslant 0$, $\varLambda_m^{[k]}=\partial_x^m(\partial_{x,y}f|_{u=x})^k$. 由式 (9.4.2), 对于任何整数 $m\geqslant 1$, 即得

$$\begin{cases}\varLambda_m=\displaystyle\sum_{l\geqslant m+1}F_{l-1}y^{l-m-1}, & k=1,\\ \varLambda_m^{[k]}=\displaystyle\sum_{j=0}^{m}\varLambda_{m-j}^{[k-1]}\varLambda_j, & k\geqslant 2.\end{cases} \tag{9.4.5}$$

对于任何整数 $k \geqslant 1$, $m \geqslant 0$, 令

$$\Delta_m^{[k]} = \begin{cases} \int_y (y\Lambda_m), & k = 1, \\ \int_y (y\Lambda_m^{[k]}), & k \geqslant 2. \end{cases} \tag{9.4.6}$$

由此可见, 对任何整数 $k \geqslant 1$ 和 $m \geqslant 0$, $\Delta_m^{[k]} = 0 \Leftrightarrow \Lambda_m^{[k]} = 0$.

定理 9.4.1 方程式 (9.4.1) 与下面关于 F_m $(m \geqslant 0)$ 的无限方程组

$$F_m = \begin{cases} 0, & m = 0, \\ \sum_{k \geqslant 1} \Delta_0^{[k]}, & m = 1, \\ 1 + \sum_{k \geqslant 1} \Delta_1^{[k]}, & m = 2, \\ \sum_{k \geqslant 1} \Delta_{m-1}^{[k]}, & m \geqslant 3 \end{cases} \tag{9.4.7}$$

在 $\mathcal{R}\{x, \boldsymbol{y}\}$ 中等价.

证明 由式 (9.4.3) 和式 (9.4.4) 有

$$\begin{aligned} \frac{y\partial_{x,y} f|_{u=x}}{1 - \partial_{x,y} f|_{u=x}} &= \sum_{j \geqslant 1} y \left(\sum_{i \geqslant 0} \Lambda_i x^i \right)^j = y \sum_{j \geqslant 1} \sum_{i \geqslant 0} \Lambda_i^{[j]} x^i \\ &= \sum_{i \geqslant 0} \left(\sum_{j \geqslant 1} y \Delta_i^{[j]} \right) x^i; \end{aligned}$$

由式 (9.4.6), 有

$$\int_y \frac{y\partial_{x,y} f|_{u=x}}{1 - \partial_{x,y} f|_{u=x}} = \sum_{i \geqslant 0} \left(\sum_{j \geqslant 1} \int_y \left(y\Lambda_i^{[j]} \right) \right) x^i = \sum_{i \geqslant 0} \left(\sum_{j \geqslant 1} \Delta_i^{[j]} \right) x^i.$$

因此方程式 (9.4.1) 可变为

$$f = x^2 + x \sum_{i \geqslant 0} \left(\sum_{j \geqslant 1} \Delta_i^{[j]} \right) x^i = x^2 + \sum_{m \geqslant 0} \left(\sum_{j \geqslant 1} \Delta_{m-1}^{[j]} \right) x^m.$$

这就意味着, 对于任何整数 $m \geqslant 0$,

$$F_m = \begin{cases} \sum_{k \geqslant 1} \Delta_{-1}^{[k]}, & m = 0, \\ \sum_{k \geqslant 1} \Delta_0^{[k]}, & m = 1, \\ 1 + \sum_{k \geqslant 1} \Delta_1^{[k]}, & m = 2, \\ \sum_{k \geqslant 1} \Delta_{m-1}^{[k]}, & m \geqslant 3. \end{cases}$$

当 $m=0$ 时, 由 $\Delta_{-1}=0 \Rightarrow \Delta_{-1}^{[j]}=0\ (j\geqslant 2)$, 得 $F_0=0$. 这就是方程式 (9.4.1) 的始条件. 当 $m\geqslant 1$ 时, 与式 (9.4.7) 相同. 从而, 即得欲证的结论. □

这个定理使我们可以只研究方程组式 (9.4.7) 的定性理论与求解就够了. 因为每一个方程都与 $F_m\ (m\geqslant 1)$ 有关, 无从直接讨论其解的存在性以及唯一性, 更不用说如何求解了. 为了解决这些问题, 不能不先考虑如何对它进行简化.

引理 9.4.1 对于任何整数 $k\geqslant 1$, 有 $\Delta_m^{[k]}=0\ (0\leqslant m\leqslant k)$.

证明 当 $k=1$ 时, 由 $F_0=0 \Rightarrow \Delta_0^{[k]}=0(k\geqslant 1)$, 有 $F_1=0$. 当 $k\geqslant 2$ 时, 可以假设对于任何整数 $1\leqslant t\leqslant k-1$, $\Delta_m^{[t]}=0\ (0\leqslant m\leqslant t)$. 用归纳法, 往证对于 $t=k$, 引理的结论也成立. 在式 (9.4.5) 和式 (9.4.6) 的基础上, 利用归纳假设, 即可得欲证的结论. □

这个引理意味着, 在方程组式 (9.4.7) 中, 对于任何整数 $m\geqslant 1$, 第 m 个方程不含 $\Delta_m^{[k]}\ (k\geqslant m)$. 也就是, 方程组式 (9.4.7) 变为

$$F_m=\begin{cases}0, & m\leqslant 1,\\ 1+\Delta_1, & m=2,\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m-1}\Delta_{m-1}^{[k]}, & m\geqslant 3.\end{cases} \tag{9.4.8}$$

这就将方程组式 (9.4.7) 的每一个方程中的无限和变成了有限的.

因为 $F_m\in\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$, 令 $\mathcal{J}_m$ 为 F_m 中所有项的幂向量的集合. 对 $\forall\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}_m$, 记

$$\pi(\boldsymbol{n})=\Big(\sum_{i\geqslant 1} i\boldsymbol{n}_{[i]}\Big)\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}},$$

其中 $\boldsymbol{n}_{[i]}$ 是只有第 i 个分量为 1、其他所有分量为 0 的向量. 由 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3,\cdots)$, 就有

$$\pi(\boldsymbol{n})=\sum_{i\geqslant 1} in_i. \tag{9.4.9}$$

考虑式 (9.4.8) 中 $m=2$ 时的情形. 由式 (9.4.5) 和式 (9.4.6), 得

$$\Delta_1=\int_y\Big(\sum_{l\geqslant 2}F_{l-1}y^{l-2}\Big)=\sum_{l\geqslant 2}F_{l-1}y_{l-2}. \tag{9.4.10}$$

由此可见, 这时的方程是无限的. 从而, 方程组式 (9.4.8) 形式上仍然是无限的. 不过, 因为所有 $F_m\ (m\geqslant 0)$ 都与 y_0 无关, 所以有

$$\Delta_1=\sum_{l\geqslant 3}F_{l-1}y_{l-1}. \tag{9.4.11}$$

因此, 式 (9.4.8) 变为

$$F_m=\begin{cases}0, & m\leqslant 1,\\ 1+\sum\limits_{l\geqslant 3}F_{l-1}y_{l-2}, & m=2,\\ \sum\limits_{k=1}^{m-1}\varDelta_{m-1}^{[k]}, & m\geqslant 3.\end{cases} \tag{9.4.12}$$

对于任何整数 $s\geqslant 0$, 记 $F_{m,s}=\left\langle F_m\right\rangle_s$. 由 $F_m\in\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$, 有

$$F_{m,s}=\sum_{\substack{\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}_m\\ \pi(\boldsymbol{n})=s}}F_{m,\boldsymbol{n}}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}, \tag{9.4.13}$$

其中 $F_{m,\boldsymbol{n}}\in\mathcal{R}$.

先考虑 $F_{2,s}$. 由式 (9.4.12) 中 $m=2$ 时的情形, 有

$$F_{2,s}=\begin{cases}1, & s=0,\\ \sum\limits_{l=2}^{s+1}F_{l-1,s-l+1}y_{l-1}=\sum\limits_{l=1}^{s}F_{l,s-l}y_l, & s\geqslant 1.\end{cases} \tag{9.4.14}$$

要想求 $F_{m,s}$ $(m\geqslant 3)$, 由式 (9.4.7), 必得求 $\varDelta_{m-1,s}^{[k]}$. 由式 (9.4.6), 先看一看 $\varLambda_m^{[k]}$. 由式 (9.4.5), 有

$$\varLambda_m^{[k]}=\sum_{j=0}^{m}\varLambda_{m-j}^{[k-1]}\varLambda_j=\sum_{j=0}^{m}\varLambda_{m-j}^{[k-1]}\Big(\sum_{l\geqslant j+1}F_{l-1}y^{l-j-1}\Big). \tag{9.4.15}$$

为叙述简便, 对于整数 $k\geqslant 1$ 和 $m\geqslant 0$, 令

$$\varPi_m^{[k]}=\int_y\varLambda_m^{[k]}. \tag{9.4.16}$$

记 $\varPi_m=\varPi_m^{[1]}$. 由式 (9.4.5), 有

$$\varPi_m^{[k]}=\begin{cases}\sum\limits_{l\geqslant m+1}F_{l-1}y_{l-m-1}, & k=1,\\ \sum\limits_{j=0}^{m}\varPi_{m-j}^{[k-1]}\otimes\varPi_j, & k\geqslant 2.\end{cases} \tag{9.4.17}$$

由式 (9.4.6), 可知 $\varDelta_m^{[k]}=y_1\otimes\varPi_m$. 在式 (9.4.17) 的基础上, 利用卷积的性质, 可得

$$\varDelta_m^{[k]}=\begin{cases}\sum\limits_{l\geqslant m+1}F_{l-1}y_{l-m}=\sum\limits_{l\geqslant 1}F_{l+m-1}y_l, & k=1,\\ y_1\otimes\sum\limits_{j=0}^{m}\varPi_{m-j}^{[k-1]}\otimes\varPi_j=\sum\limits_{j=0}^{m}\varPi_{m-j}^{[k-1]}\otimes\Big(y_1\otimes\varPi_j\Big) & \\ \qquad=\sum\limits_{j=0}^{m}\varPi_{m-j}^{[k-1]}\otimes\Big(\sum\limits_{l\geqslant j+1}F_{l-j-1}y_l\Big), & k\geqslant 2.\end{cases}$$

从 $l-m-1\geqslant 0$, $\Lambda_0=0\Rightarrow \Pi_0=0$, $\Pi_0^{[k]}=0$ $(k\geqslant 1)$, 可得

$$\Delta_m^{[k]}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{l\geqslant 1}F_{l+m-1}y_l, & k=1,\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m-1}\Pi_{m-j}^{[k-1]}\otimes\Big(\sum_{l=j+1}F_{l-j-1}y_l\Big), & k\geqslant 2.\end{cases}\tag{9.4.18}$$

在此基础上, 当 $k=1$ 时, 对于任何整数 $m\geqslant 2$ 和 $s\geqslant 0$,

$$\Delta_{m,s}=\Big\langle\sum_{l=1}^{s}F_{l+m-1}y_l\Big\rangle_s=\sum_{l=1}^{s}F_{l+m-1,s-l}y_l.$$

当 $k\geqslant 2$ 时, 对于任何整数 $m\geqslant 2$ 和 $s\geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned}\Delta_{m,s}^{[k]}&=\Big\langle\sum_{j=1}^{m-1}\Big(\Pi_{m-j}^{[k-1]}\otimes\sum_{l\geqslant 1}F_{l+j-1}y_l\Big)\Big\rangle_s\\&=\sum_{j=1}^{m-1}\Big\langle\Big(\Pi_{m-j}^{[k-1]}\otimes\sum_{l\geqslant 1}F_{l+j-1}y_l\Big)\Big\rangle_s\\&=\sum_{j=1}^{m-1}\left(\Big\langle\Pi_{m-j}^{[k-1]}\otimes\sum_{l\geqslant 1}F_{l+j-1}y_l\Big\rangle_s\right)\\&=\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{r=0}^{s}\left(\Pi_{m-j,s-r}^{[k-1]}\otimes\Big\langle\sum_{l\geqslant 1}F_{l+j-1}y_l\Big\rangle_r\right)\\&=\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{r=0}^{s}\Big(\Pi_{m-j,s-r}^{[k-1]}\otimes\sum_{l=1}^{r}F_{l+j-1,r-l}y_l\Big)\\&=\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{r=1}^{s-1}\Big(\Pi_{m-j,s-r}^{[k-1]}\otimes\sum_{l=1}^{r}F_{l+j-1,r-l}y_l\Big).\end{aligned}$$

综合以上两个式子, 即得

$$\Delta_{m,s}^{[k]}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=m+1}^{s}F_{l-m-1,s-l}y_l, & k=1,\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{r=1}^{s-1}\Big(\Pi_{m-j,s-r}^{[k-1]}\otimes\sum_{l=1}^{r}F_{l+j-1,r-l}y_l\Big), & k\geqslant 2.\end{cases}\tag{9.4.19}$$

定理 9.4.2　方程式 (9.4.1) 与方程组

$$F_{m,s}=\begin{cases}1, & m=2,s=0,\\ \sum\limits_{l=2}^{s}F_{l,s-l}y_l, & m=2,s\geqslant 1,\\ \sum\limits_{\substack{1\leqslant r\leqslant s-1\\ 1\leqslant j\leqslant m-2}}\left(\left(\sum\limits_{k=2}^{m-1}\Pi_{m-j-1,s-r}^{[k-1]}\right)\otimes\sum\limits_{l=1}^{r}F_{l+j-1,r-l}y_l\right), & m\geqslant 3\end{cases}\tag{9.4.20}$$

在 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}\subseteq\mathcal{R}\{x;\boldsymbol{y}\}$ 上等价.

证明　由定理 9.4.1, 只需讨论式 (9.4.20) 与式 (9.4.7), 即式 (9.4.12) 等价.

首先, 在式 (9.4.12) 中 $m=2$ 时的情形基础上, 由式 (9.4.14), 即可得式 (9.4.20) 中 $m=2$ 时的情形.

然后, 在式 (9.4.12) 中 $m\geqslant 3$ 时的情形基础上, 由式 (9.4.19) (注意, $F_{m,s}$ 由 $\Delta_{m-1,s}^{[k]}$ 确定), 有

$$\begin{aligned}F_{m,s}&=\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{\substack{1\leqslant r\leqslant s-1\\ 1\leqslant j\leqslant m-1}}\left(\Pi_{m-j-1,s-r}^{[k-1]}\otimes\sum_{l=1}^{r}F_{l+j-1,r-l}y_l\right)\\ &=\sum_{\substack{1\leqslant r\leqslant s-1\\ 1\leqslant j\leqslant m-1}}\left(\sum_{k=1}^{m-1}\Pi_{m-j-1,s-r}^{[k-1]}\right)\otimes\sum_{l=1}^{r}F_{l+j-1,r-l}y_l\\ &=\sum_{\substack{1\leqslant r\leqslant s-1\\ 1\leqslant j\leqslant m-1}}\left(\sum_{k=2}^{m-1}\Pi_{m-j-1,s-r}^{[k-1]}\right)\otimes\sum_{l=1}^{r}F_{l+j-1,r-l}y_l\\ &=\sum_{\substack{1\leqslant r\leqslant s-1\\ 1\leqslant j\leqslant m-2}}\left(\sum_{k=2}^{m-1}\Pi_{m-j-1,s-r}^{[k-1]}\right)\otimes\sum_{l=1}^{r}F_{l+j-1,r-l}y_l.\end{aligned}$$

这就是所要证明的.　□

在式 (9.4.20) 的基础上, 对于所有 $m\geqslant 2$ 和 $s\geqslant 0$, $F_{m,s}$ 还有哪些为 0 项而可以被忽略?

引理 9.4.2　对于任何整数 $m\geqslant 2$ 和 $s\geqslant 0$, 只要 $F_{m,s}\neq 0$, 就有 $m\equiv s(\mathrm{mod}\ 2)$.

证明　因为 $m+s\geqslant 2$, 且只有当 $m=2$, $s=0$ 时满足 $m+s=2$, 故由式 (9.4.14), 知 $F_{2,0}=1\neq 0$.

对于 $n=m+s$ 用归纳法. 假设对任何整数 $i\geqslant 2$, $j\geqslant 0$, 当 $i+j\leqslant n-1$ 时, 只要 $F_{i,j}\neq 0$, 就有 $i\equiv j(\mathrm{mod}\ 2)$, 即 $i+j\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$. 往证, 当 $m+s=n$ 时, 只要 $F_{m,s}\neq 0$, 就有 $m+s\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$.

在式 (9.4.19) 的基础上, 因为

$$
\begin{aligned}
&(m-j-1)+(s-r)=m+s-j-r-1\\
&\qquad\qquad\qquad\leqslant m+s-3<m+s-1=n-1,\\
&(l+j-1)+r-l=r+j-2\leqslant(s-1)+j-2\\
&\qquad\qquad\qquad\leqslant m+s-3<m+s-1=n-1,\\
&\big((m-j-1)+(l+j-1)\big)+\big((s-r)+(r-l)\big)\\
&\quad=(m+l-2)+(s-l)=m+s-2<m+s-1=n-1,
\end{aligned}
$$

由归纳假设, $(m-j-1)+(s-r)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$, $(l+j-1)+(r-l)=r+j-1\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$, 因此

$$
0=\big((m-j-1)+(s-r)\big)+(r+j-1)=m+s-2\equiv m+s(\mathrm{mod}\ 2).
$$

从而引理的结论得证. □

进而, 还要讨论对于任何给定的整数 m, $s\geqslant 0$, $F_{m,s}$ 只可能与 $\boldsymbol{y}$ 中的哪些变量有关.

引理 9.4.3 对于任何整数 $m\geqslant 2$ 和 $s\geqslant 0$, $F_{m,s}\neq 0$ 与所有 y_l $(l\geqslant s+1)$ 无关.

证明 对于任何 $\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}_{m,s}$, $\pi(\boldsymbol{n})=s$, 即

$$
s=\sum_{i\geqslant 1} iy_i.
$$

如果在 $F_{m,s}$ 中存在 $y_l(l\geqslant s+1)$, 则存在 $\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}_{m,s}$ 使得 $n_{s+1}\geqslant 1$. 从而

$$
\sum_{i\geqslant 1} iy_i\geqslant (s+1)n_{i+1}\geqslant s+1,
$$

即 $\pi(\boldsymbol{n})\geqslant s+1$. 这与 $\pi(\boldsymbol{n})=s$ 矛盾. □

由这个引理, 对于任何整数 $m\geqslant 2$ 和 $s\geqslant 1$, 我们可以将 $F_{m,s}$ 限制在 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_s=(y_1,y_2,\cdots,y_s)$ 的范围内.

定理 9.4.3 方程式 (9.4.1) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中有且仅有一个解.

证明 由定理 9.4.2, 只需讨论方程组式 (9.4.20). 先看一看整数 $m\geqslant 2$ 和 $s\geqslant 0$, $m+s\leqslant 4$ 时的情形. 因为 $m+s\geqslant 2$, 故从 $m+s=2$ 开始, 已知 $F_{2,0}=1$.

由引理 9.4.3, 只需考虑 $m+s$ 为偶数时的情形. 当 $m+s=4$ 时, 只有 $F_{4,0}=0$, $F_{3,1}=0$ 和 $F_{2,2}=F_{2,0}y_2=y_2$.

当 $m+s\geqslant 6$ 时, 假设对于任何整数 $p\geqslant 2$ 和 $q\geqslant 0$, $F_{p,q}$ 都已经由式 (9.4.20) 求出. 用归纳法, 往证 $F_{m,s}$ 由这些 $F_{p,q}$ 确定.

事实上, 在式 (9.4.20) 中, 所有 $\varPi^{[k-1]}_{m-j-1,s-r}$ 只由所有 $F_{l+j-1,r-l}$ 确定. 因为

$$(l+j-1)+(r-l)=r+j-1\leqslant m+s-3<m+s,$$

由归纳假设, 即得 $F_{m,s}$. 从而, 方程式 (9.4.1) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中有一个解.

考虑到用式 (9.4.20) 在 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 中求解过程的唯一性, 方程式 (9.4.1) 的这个解是仅有的. □

剩下的问题, 就是如何使方程式 (9.4.1) 的求解过程更简捷. 为此, 不能不进一步地了解这个解本身的结构.

引理 9.4.4　令 $f_{\text{ncv}}\in\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 是方程式 (9.4.1) 的解. 记

$$S_{m,s}=\sum_{\substack{\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}_m\\ \pi(\boldsymbol{n})=s}}\partial^{(m,\boldsymbol{n})}_{(x,\boldsymbol{y})}f_{\text{ncv}},\tag{9.4.21}$$

则有 $S_{m,s}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$.

证明　由定理 9.4.3, 可知 $S_{m,s}=F_{m,s}$ 满足式 (9.4.20). 从定理 9.4.3 的证明过程对于始值的唯一性, 以及对于始值的非负整数不变性, 即可导出欲证的结论. □

进一步地, 还可寻找新的 0 值项, 以便将它们忽略不计.

引理 9.4.5　对于任何整数 $m\geqslant 1$ 和 $s\geqslant 0$, 如果 $m\geqslant s+1$, 则对任何整数 $k\geqslant 1$, $\varPi^{[k]}_{m,s}=0$.

证明　首先, 考虑 $k=1$ 时的情形. 由式 (9.4.17), 有

$$\begin{aligned}\varPi_{m,s}&=\sum_{l=m}^{s+m+1}F_{l-1,s+m+1-l}y_{l-m-1}\quad(\text{因为 } y_{-1}\text{ 不存在})\\&=\sum_{l=m+1}^{s+m+1}F_{l-1,s+m+1-l}y_{l-m-1}=\sum_{t=0}^{s}F_{t+m,s-t}y_t.\end{aligned}$$

当 $s=0$ 时, 由于对任何整数 $m\geqslant 2$, $\varPi_{m,0}=F_{m,0}y_0$, 所以这里只考虑 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots)$. 因为 y_0 不存在, 只能是 $\varPi_{m,0}=0$. 由式 (9.4.12), $F_{2,0}=1$, 且对

于所有 $m \geqslant s+1=1$, 因为 $\Pi_{m,0} \in \mathcal{V}$, 故除 $m=2$ 外, 都有 $F_{m,0}=0$. 当 $s=1$ 时, 因为 $\Pi_{m,1}=F_{m,1}y_0+F_{m+1,0}y_1=F_{m+1,0}y_1$, 所以有

$$\Pi_{m,1}=\begin{cases} 1, & m=1, \\ 0, & m \geqslant 2, \end{cases}$$

即对于 $m \geqslant s+1=2$, $\Pi_{m,1}=0$.

对于任何整数 $s \geqslant 2$, 假设对任何整数 $m \geqslant s$, 以及任何整数 $1 \leqslant r \leqslant s-1$, 已经得到 $\Pi_{m,r}=0$, 所以 $F_{m,r}=0$. 用数学归纳法, 往证 $\Pi_{m,s}=0$. 由

$$\Pi_{m,s}=\sum_{t=0}^{s} F_{t+m,s-t}y_t=F_{m,s}y_0=0,$$

得 $F_{m,s}=0$.

对于 $k \geqslant 2$, 假设对于任何整数 $1 \leqslant l \leqslant k-1$, 已经得到 $\Pi^{[l]}_{m,s}=0$ $(m \geqslant s+1)$. 用数学归纳法, 往证 $\Pi^{[k]}_{m,s}=0$. 由式 (9.4.17), 有

$$\Pi^{[k]}_{m,s}=\left[\sum_{j=0}^{m} \Pi^{[k-1]}_{m-j} \otimes \Pi_j\right]_s=\sum_{j=0}^{m}\left[\Pi^{[k-1]}_{m-j} \otimes \Pi_j\right]_s,$$

其中

$$\left[\Pi^{[k-1]}_{m-j} \otimes \Pi_j\right]_s=\sum_{r=0}^{s} \Pi^{[k-1]}_{m-j,s-r} \otimes \Pi_{j,r}.$$

因为 $m \geqslant s+1$, 故对任意 $0 \leqslant r \leqslant s$,

$$m-j \leqslant s-r \quad \Rightarrow \quad -j \leqslant -(r+1) \quad \Rightarrow \quad j \geqslant r+1.$$

用归纳法假设, 对任意 $0 \leqslant r \leqslant s$, 不是 $\Pi^{[k-1]}_{m-j}=0$, 就是 $\Pi^{[k-1]}_{m-j}=0$. 从而, 只能 $\Pi^{[k]}_{m,s}=0$. □

在式 (9.4.12) 和式 (9.4.18) 的基础上, 从引理 9.4.5, 直接可得:

推论 9.4.1 对于任何整数 $m \geqslant 2$ 和 $s \geqslant 0$, 如果 $m \geqslant s+1$, 则除 $F_{2,0}=1$ 外, 其他 $F_{m,s}=0$. □

在上面两个结论的基础上, 就可以推演出方程式 (9.4.1) 解的一种简捷形式.

为此, 先看一看 $m+s \leqslant 8$ 时的情况. 由引理 9.4.2, 只需考虑 $m \equiv s(\mathrm{mod}\ 2)$. 由式 (9.4.17), 当 $k=1$ 时, 若 $m=1$ 和 $0 \leqslant s \leqslant 7$, 则由

$$\Pi_{1,s}=\sum_{l=2}^{s+2} F_{l-1,s+2-l}y_{l-2}=\sum_{l=2}^{\lfloor (s+3)/2 \rfloor} F_{l-1,s+2-l}y_{l-2},$$

有

$$\Pi_{1,s}=\begin{cases}F_{2,0}y_1, & s=1,\\ F_{2,2}y_1, & s=3,\\ F_{2,4}y_1+F_{3,3}y_2, & s=5,\\ F_{2,6}y_1+F_{3,5}y_2+F_{4,4}y_3, & s=7.\end{cases}$$

若 $m=2,\ 0\leqslant s\leqslant 7$, 则由

$$\Pi_{2,s}=\sum_{l=3}^{s+3}F_{l-1,s+3-l}y_{l-3}=\sum_{l=3}^{\lfloor (s+4)/2\rfloor}F_{l-1,s+3-l}y_{l-3},$$

有

$$\Pi_{2,s}=\begin{cases}F_{2,0}y_0, & s=0,\\ F_{2,2}y_0, & s=2,\\ F_{2,4}y_0+F_{3,3}y_1, & s=4,\\ F_{2,6}y_0+F_{3,5}y_1+F_{4,4}y_2, & s=6.\end{cases}$$

若 $m=3,\ 0\leqslant s\leqslant 7$, 则由

$$\Pi_{3,s}=\sum_{l=4}^{s+4}F_{l-1,s+4-l}y_{l-4}=\sum_{l=4}^{\lfloor (s+5)/2\rfloor}F_{l-1,s+4-l}y_{l-4},$$

有

$$\Pi_{3,s}=\begin{cases}0, & s=1,\\ F_{3,3}y_0, & s=3,\\ F_{3,5}y_0+F_{4,4}y_1, & s=5,\\ F_{3,7}y_0+F_{4,6}y_1+F_{5,5}y_2, & s=7.\end{cases}$$

若 $m=4,\ 0\leqslant s\leqslant 7$, 则由

$$\Pi_{4,s}=\sum_{l=5}^{s+6}F_{l-1,s+5-l}y_{l-5}=\sum_{l=5}^{\lfloor (s+6)/2\rfloor}F_{l-1,s+5-l}y_{l-5},$$

有

$$\Pi_{4,0}=\begin{cases}0, & s=0,2,\\ F_{4,4}y_0, & s=4,\\ F_{4,6}y_0+F_{5,5}y_1, & s=6.\end{cases}$$

若 $m=5,\ 0\leqslant s\leqslant 7$, 则由

$$\Pi_{5,s}=\sum_{l=6}^{s+7}F_{l-1,s+6-l}y_{l-6}=\sum_{l=6}^{\lfloor(s+7)/2\rfloor}F_{l-1,s+6-l}y_{l-6},$$

有

$$\Pi_{5,s}=\begin{cases}0, & s=1,3,\\ F_{5,5}y_0, & s=5,\\ F_{5,7}y_0+F_{6,6}y_1, & s=7.\end{cases}$$

若 $m=6,\ 0\leqslant s\leqslant 7$, 则由

$$\Pi_{6,s}=\sum_{l=7}^{s+8}F_{l-1,s+7-l}y_{l-7}=\sum_{l=7}^{\lfloor(s+8)/2\rfloor}F_{l-1,s+7-l}y_{l-7},$$

有

$$\Pi_{6,s}=\begin{cases}0, & s=0,2,4,5,\\ F_{6,6}y_0, & s=6.\end{cases}$$

若 $m=7,\ 0\leqslant s\leqslant 7$, 则由

$$\Pi_{7,s}=\sum_{l=8}^{s+9}F_{l-1,s+8-l}y_{l-8}=\sum_{l=8}^{\lfloor(s+9)/2\rfloor}F_{l-1,s+8-l}y_{l-8},$$

有

$$\Pi_{7,s}=\begin{cases}0, & s=1,3,5,\\ F_{7,7}y_0, & s=7.\end{cases}$$

在这些计算的基础上, 即可以求 $F_{m,s}$ $(m+s\leqslant 8,\ m\geqslant 2,\ s\geqslant 0)$.

当 $m+s=2$ 时, 只有 $F_{2,0}$. 由始条件, 有 $F_{2,0}=1$.

当 $m+s=4$ 时, 只有 $F_{4,0}$ 和 $F_{2,2}$. 由推论 9.4.1, 知 $F_{4,0}=0$. 由 $\Pi_{1,1}=F_{2,0}y_1=y_1$, 有 $F_{2,2}=\Pi_{1,1}\otimes y_1=y_1\otimes y_1=y_2$.

当 $m+s=6$ 时, 只有 $F_{6,0}=0$, $F_{3,3}$ 和 $F_{2,4}$. 由 $\Pi_{2,2}^{[1]}=F_{2,2}y_0=0$, $\Pi_{2,2}^{[2]}=\Pi_{1,1}\otimes\Pi_{1,1}=y_1\otimes y_1=y_2$, 有

$$F_{3,3}=\sum_{k=1}^{2}\Pi_{2,2}^{[k]}\otimes y_1=\Pi_{2,2}^{[2]}\otimes y_1=y_2\otimes y_1=y_3.$$

由 $\Pi_{1,3}=F_{2,2}y_1$, 有

$$F_{2,4}=\Pi_{1,3}\otimes y_1=F_{2,2}y_2=y_2^2.$$

当 $m+s=8$ 时, 由推论 9.4.1, 只需要考虑 $F_{4,4}$, $F_{3,5}$ 和 $F_{2,6}$. 由 $\Pi_{3,3}^{[1]}=F_{3,3}y_0=0$,

$$\Pi_{3,3}^{[2]}=2\sum_{r=0}^{3}\Pi_{1,3-r}\otimes\Pi_{2,r}=\Pi_{1,1}\otimes\Pi_{2,2}=0,$$

$$\Pi_{3,3}^{[3]}=\Pi_{1,1}\otimes\Pi_{1,1}\otimes\Pi_{1,1}=y_1\otimes y_1\otimes y_1=y_3,$$

即可得

$$F_{4,4}=\sum_{k=1}^{3}\Pi_{3,3}^{[k]}\otimes y_1=y_4\otimes y_1=y_4.$$

为了求 $F_{3,5}$, 需要 $\Pi_{2,4}^{[1]}=\Pi_{2,4}$ 和 $\Pi_{2,4}^{[2]}$. 由 $\Pi_{2,4}=F_{2,4}y_0+F_{3,3}y_1=F_{3,3}y_1$, $\Pi_{2,4}^{[2]}=\Pi_{1,3}\otimes\Pi_{1,1}+\Pi_{1,1}\otimes\Pi_{1,3}=2(\Pi_{1,3}\otimes\Pi_{1,1})=2F_{2,2}F_{2,0}y_2$, 有

$$F_{3,5}=\Pi_{2,4}^{[1]}+\Pi_{2,4}^{[2]}=(F_{3,3}y_1+2F_{2,2}F_{2,0}y_2)\otimes y_1=F_{3,3}y_2+2F_{2,2}F_{2,0}y_3=3y_3y_2.$$

为了求 $F_{2,6}$, 只需要 $\Pi_{1,5}=F_{2,4}y_1+F_{3,3}y_2$. 所以有

$$F_{2,6}=(F_{2,4}y_1+F_{3,3}y_2)\otimes y_1=F_{2,4}y_2+F_{3,3}y_3=y_2^3+y_3^2.$$

引理 9.4.6 对于任何整数 $m\geqslant 3$, $\Pi_{m-1,m-1}^{[m-1]}=\Pi_{m-2,m-2}^{[m-2]}\otimes\Pi_{1,1}$.

证明 对任何整数 $m\geqslant 3$, 有

$$\begin{aligned}\Pi_{m-1,m-1}^{[m-1]}&=\sum_{i=0}^{m-1}\left[\Pi_{m-1-i}^{[m-2]}\otimes\Pi_i\right]_{m-1}\quad(\text{将 } m-1 \text{ 分配到 } \Pi_{m-1-i}^{[m-2]} \text{ 和 } \Pi_i \text{ 上})\\&=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1}\Pi_{m-1-i,m-1-j}^{[m-2]}\otimes\Pi_{i,j}=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=i}^{m-1}\Pi_{m-1-i,m-1-j}^{[m-2]}\otimes\Pi_{i,j}\\&=\Pi_{m-2,m-2}^{[m-2]}\otimes\Pi_{1,1}.\end{aligned}$$

从而, 即得欲证的结论. □

推论 9.4.2 对于任何整数 $m\geqslant 2$, $F_{m,m}=y_m$.

证明 先证: 对于任何整数 $1\leqslant k\leqslant m-2$, 有 $\pi_{m-1,m-1}^{[k]}=0$. 若 $k=1$, 则由

$$\begin{aligned}\Pi_{m-1,m-1}&=\sum_{t=0}^{m-1}F_{t+m-1,m-1-t}y_t\\&=\sum_{\substack{0\leqslant t\leqslant m-1\\ t+m-1\leqslant m-1-t}}F_{t+m-1,m-1-t}y_t=0,\end{aligned}$$

得 $\Pi^{[1]}_{m-1,m-1}=0$. 对于任何整数 $k\geqslant 2$, 假设 $\Pi^{[k-1]}_{m-1,m-1}=0$. 对 k 用数学归纳法, 往证 $\Pi^{[k]}_{m-1,m-1}=0$. 计算得

$$\begin{aligned}\Pi^{[k]}_{m-1,m-1}&=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1}\Pi^{[k-1]}_{m-1-i,m-1-j}\otimes\Pi_{i,j}\\&=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=i}^{m-1}\Pi^{[k-1]}_{m-1-i,m-1-j}\otimes\Pi_{i,j}=0.\end{aligned}$$

由上式及式 (9.4.12), 对于 $m\geqslant 3$, 有

$$\begin{aligned}F_{m,m}&=\sum_{k=1}^{m-1}\Pi^{[k]}_{m-1,m-1}\otimes y_1=\Pi^{[m-1]}_{m-1,m-1}\otimes y_1\\&=\left(\Pi^{[m-2]}_{m-2,m-2}\otimes\Pi_{1,1}\right)\otimes y_1.\end{aligned}$$

然后, 因为已经知道 $F_{2,2}=y_2$, $F_{3,3}=y_3$ 和 $F_{4,4}=y_4$, 对于任何整数 $m\geqslant 5$, 故可假设 $F_{m-1,m-1}=y_{m-1}$. 用数学归纳法, 往证 $F_{m,m}=y_m$. 因为 $\Pi_{1,1}=y_1$, 由归纳假设, 知

$$F_{m,m}=F_{m-1,m-1}\times y_1=F_{m-1}\otimes y_1=y_m.$$

从而, 即得欲证的结论. □

在上面两个推论的基础上, 我们可导出方程式 (9.4.1) 的解更简单且所有系数皆为正项和的表达式.

定理 9.4.4 在方程式 (9.4.1) 的解 $f_{\rm ncv}$ 中, $S_{m,s}$ 有如下有限正项和表示:

$$S_{m,s}=\begin{cases}1, & m=2,s=0,\\ \Pi_{1,s-1}\otimes y_1, & m=2,s\geqslant 1,\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m-1}\Bigg(\sum_{\substack{1\leqslant r\leqslant s-1\\1\leqslant j\leqslant m-2}}\left(\Pi^{[k-1]}_{m-j,s-r}\otimes\Pi_{j,r}\right)\Bigg)\otimes y_1, & m\geqslant 3,\end{cases}\tag{9.4.22}$$

其中 $m\leqslant s, m\equiv s(\bmod 2)$, 对于任何整数 $1\leqslant j\leqslant m-2$, $1\leqslant r\leqslant s-1$,

$$\Pi_{j,r}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=1}^{r}F_{l,r-l}y_l, & j=1,\\ \displaystyle\sum_{l=1}^{r}F_{l-j,r-l}y_l, & j\geqslant 2.\end{cases}\tag{9.4.23}$$

证明 在前面所讨论的基础上, 即可导出欲证的结论. □

例 9.4.1　一个地图称为无隔的,是指没有这样的一个顶点 $v=(x_1,x_2,x_3,\cdots)$, 存在 $i<j$ 使得将 v 隔成两个顶点 $v_1=(x_i,x_{i+1},\cdots,x_{j-1})$, $v_2=(x_j,x_{j+1},\cdots,x_{i-1})$ 时该地图变成两个地图. 从这种意义上, 只有单 (简单) 地图不可分离才与无隔一致.

图 9.4.1 提供了不超过四条棱、无隔平面地图以顶点剖分向量为参数的所有根同构类.

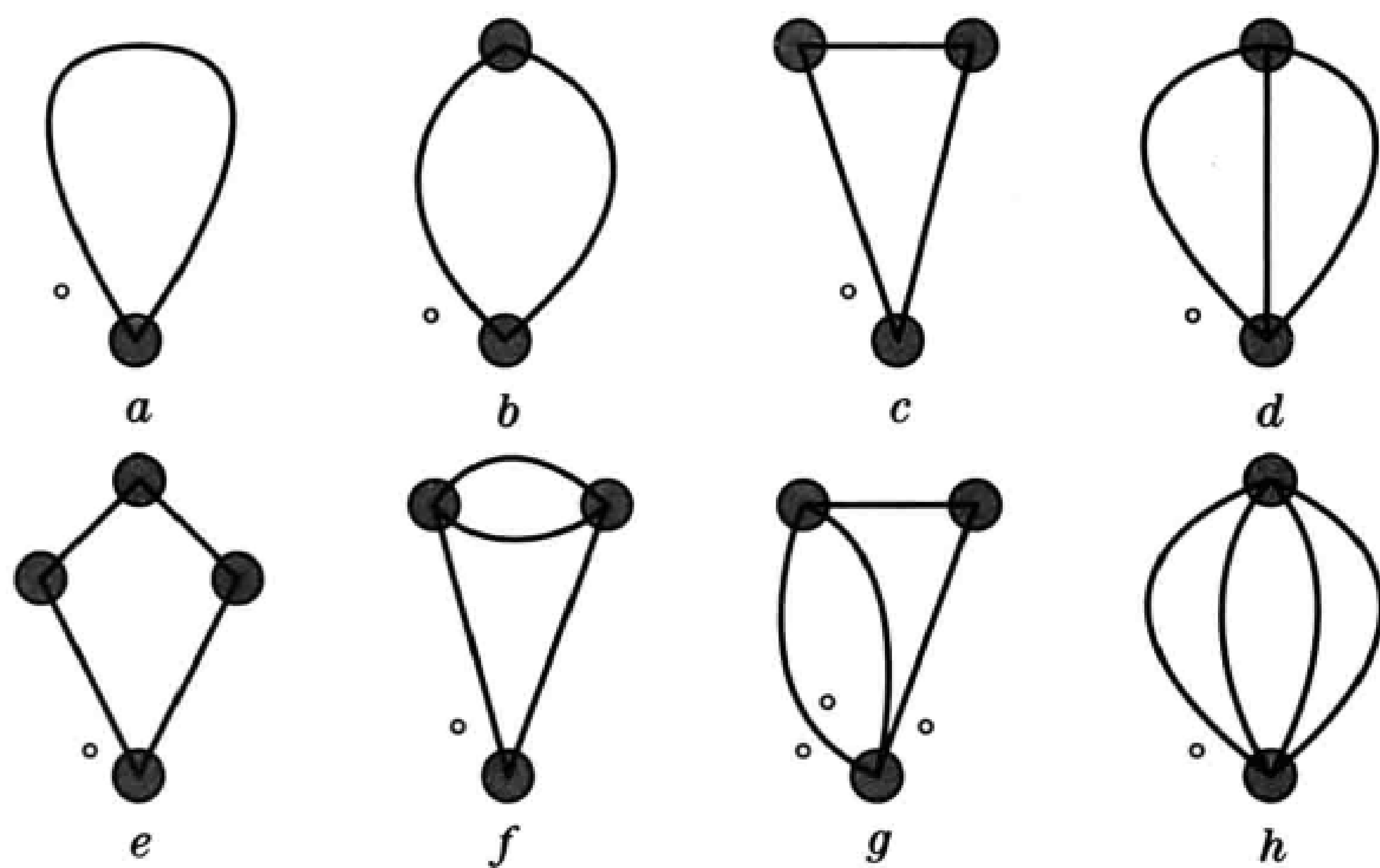


图 9.4.1　无隔平面地图的根同构类

例如, $a=1=F_{2,0}$, $b=y_2=F_{2,2}$, $c=y_2^2=F_{2,4}$, $d=y_3=F_{3,3}$, $e+f=y_2^3+y_3^2=F_{2,6}$, $g=3y_2y_3=F_{3,5}$, $h=y_4=F_{4,4}$.

9.5　单内面型

从文献 [39] 或 [67](194 页), 可以建立方程

$$\begin{cases} x^2f^2+x\int_y\Big(y\delta_{x,y}\big(uf\big|_{x=u}\big)\Big)=\int_y\Big(\big((1+xy)f-1\big)f\big|_{x=y}\big)\Big), \\ f\big|_{x=0\Rightarrow \boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=1 \end{cases} \tag{9.5.1}$$

其中 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3,\cdots)\in\mathcal{V}$.

因为这个方程是从单 (简单) 平面地图, 以无限面次和内面次剖分向量为参数, 讨论根同构类数时提炼出来的, 所以称为简单内面型的.

为了便于求解方程, 将方程等价地变为

$$\begin{cases} f = 1 + x^2 f^2 + x \int_y \Big(y\delta_{x,y}\big(uf\big|_{x=u}\big)\Big) - xf \int_y \Big(yf\big|_{x=y}\Big) \\ \qquad -(f-1)\int_y \Big(f\big|_{x=y} - 1\Big), \\ f\big|_{x=0\Rightarrow \boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = 1. \end{cases} \tag{9.5.2}$$

对于任何整数 $m \geqslant 0$, 令 $F_m = \partial_x^m f$. 记 $F_m^{[2]} = \partial_x^m f^2$, 则

$$F_m^{[2]} = \sum_{i=0}^{m} F_i F_{m-i}. \tag{9.5.3}$$

由方程式 (9.5.1) 的始条件, $F_0 = 1$, 从而对于任何整数 $m \geqslant 0$,

$$F_m^{[2]} = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 2F_1, & m = 1, \\ 2F_m + \sum\limits_{i=1}^{m-1} F_i F_{m-i}, & m \geqslant 2. \end{cases} \tag{9.5.4}$$

令 $A_m = \partial_m\big(f \int_y yf\big|_{x=y}\big)(m \geqslant 0)$, 则由

$$f = \sum_{m\geqslant 0} F_m x^m,$$

有

$$A_m = F_m\Big(\sum_{i\geqslant 0} F_i y_{i+1}\Big) = F_m\Big(y_1 + \sum_{i\geqslant 2} F_{i-1} y_i\Big). \tag{9.5.5}$$

对于任何整数 $m \geqslant 0$, 令 $B_m = \partial_m\big((f-1)\int_y (f\big|_{x=y} - 1)\big)$, 则由

$$f = 1 + \sum_{m\geqslant 1} F_m x^m,$$

有

$$B_m = \begin{cases} 0, & m = 0, \\ F_m\Big(\sum\limits_{i\geqslant 1} F_i y_i\Big), & m \geqslant 1. \end{cases} \tag{9.5.6}$$

根据 9.2 节中的计算, 可知

$$\delta_{x,y}(uf|_{x=u}) = \sum_{m\geqslant 0} x^m \sum_{i\geqslant m} y^{i-m} F_i = \sum_{m\geqslant 0} x^m \sum_{l\geqslant 0} y^l F_{l+m}.$$

若令 $\Lambda_m = \partial_x^m\big(\delta_{x,y}(uf\big|_{x=u})\big)$, 则对于任何整数 $m \geqslant 0$,

$$\Lambda_m = \sum_{l\geqslant 0} y^l F_{l+m}. \tag{9.5.7}$$

进而, 若令 $\Delta_m = \int_y (y\Lambda_m)$, 则由式 (9.5.7), 对于任何整数 $m \geqslant 0$, 有

$$\Delta_m = \sum_{l\geqslant 0} F_{l+m} y_{l+1}. \tag{9.5.8}$$

定理 9.5.1 方程式 (9.5.1) 由下面的方程组确定:

$$F_m = \begin{cases} 1 - B_0, & m = 0, \\ \Delta_0 - A_0 - B_1, & m = 1, \\ F_{m-2}^{[2]} + \Delta_{m-1} - A_{m-1} - B_m, & m \geqslant 2. \end{cases} \tag{9.5.9}$$

证明 假若 f 是方程式 (9.5.1) 的一个解. 由于 $f \in \mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$, $F_m = \partial_x^m f$ $(m \geqslant 0)$, 从式 (9.5.2) 到式 (9.5.6), 可以看出 F_m $(m \geqslant 0)$ 是方程组式 (9.5.9) 的一组解. 反之, 如果 $F_m \in \mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ $(m \geqslant 0)$ 是方程组式 (9.5.9) 的一组解, 则从式 (9.5.3) 到式 (9.5.6) 可以验证, 由这些 $F_m = \partial_x^m f$ $(m \geqslant 0)$ 确定的 $f \in \mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 满足式 (9.5.2), 从而方程式 (9.5.1) 也满足式 (9.5.2), 即得欲证的结论. □

在这个定理的基础上, 为了从方程组式 (9.5.9) 导出 $F_m \in \mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}(m \geqslant 0)$, 还要引进一个整参数 $s \geqslant 0$, 使得

$$F_m = \sum_{s\geqslant 0} F_{m,s}, \tag{9.5.10}$$

其中对于任何给定的 m 和 s, $F_{m,s}$ 都是 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 上的一个多项式, 以便通过 $F_{m,s}$ 确定所有 F_m.

令 $\mathcal{J}_m$ 为 F_m 中所有项 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3, \cdots)$ 的幂向量 $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3, \cdots)$ 的集合, $\mathcal{J}_{m,s}$ 为 $\mathcal{J}_m$ 中所有使得 $\pi(\boldsymbol{n}) = \sum_{i\geqslant 1} in_i = s$ 的幂向量子集. 由式 (9.5.9), 对于任何整数 $s \geqslant 0$, 有

$$F_{m,s} = \begin{cases} 1, & m = s = 0, \\ \Delta_{0,s} - A_{0,s} - B_{1,s}, & m = 1, \\ F_{m-2,s}^{[2]} + \Delta_{m-1,s} - A_{m-1,s} - B_{m,s}, & m \geqslant 2. \end{cases} \tag{9.5.11}$$

在此基础上, 先确定 F_0, F_1 和 $F_{m,0}$ $(m \geqslant 0)$.

引理 9.5.1 对于 F_0, 有

$$F_{0,s} = \begin{cases} 1, & s=0, \\ 0, & s \geqslant 1. \end{cases} \tag{9.5.12}$$

证明 由方程式 (9.5.1) 的始条件, 即知这是方程组式 (9.5.11) 中 $m=0$ 时的情形. □

引理 9.5.2 对于 $F_{m,0}$ $(m \geqslant 0)$, 有

$$F_{m,0} = \begin{cases} 1, & m=0, \\ 0, & m \geqslant 1, m \equiv 1 (\bmod 2), \\ \sum\limits_{i=0}^{m-1} F_{i,0} F_{m-2-i,0}, & m \geqslant 1, m \equiv 0 (\bmod 2). \end{cases} \tag{9.5.13}$$

证明 当 $m=0$ 时, 由引理 9.5.1, 知 $F_{0,0}=1$. 对于任何整数 $m \geqslant 1$, 因为

$$\begin{aligned} \Delta_{m-1,0} &= \Big[\sum_{l \geqslant 0} F_{l+m-1} y_{l+1}\Big]_0 = \sum_{l \geqslant 0} \big[F_{l+m-1} y_{l+1}\big]_0 \\ &= \sum_{l \geqslant 0} F_{l+m-1,0-l-1} y_{l+1} = 0, \\ A_{m-1,0} &= \Big[F_{m-1}\Big(y_1 + \sum_{i \geqslant 2} F_{i-1} y_i\Big)\Big]_0 = F_{m-1,0}\Big[y_1 + \sum_{i \geqslant 2} F_{i-1} y_i\Big]_0 \\ &= F_{m-1,0}\Big[\sum_{i \geqslant 2} F_{i-1} y_i\Big]_0 = 0, \\ B_{m.0} &= \Big[F_m \sum_{i \geqslant 1} F_i y_i\Big]_0 = F_{m,0}\Big[\sum_{i \geqslant 1} F_i y_i\Big]_0 = 0, \end{aligned}$$

由式 (9.5.11), 有

$$F_{m,0} = \begin{cases} 0, & m=1, \\ F^{[2]}_{m-2,0}, & m \geqslant 2. \end{cases}$$

因为

$$F^{[2]}_{m,0} = \Big[\sum_{i=0}^{m-2} F_i F_{m-2-i}\Big]_0 = \sum_{i=0}^{m-2} F_{i,0} F_{m-2-i,0}.$$

以及 $F_{0,0}=1$, $F_{1,0}=0$, 可以假设, 对于任何整数 $0 \leqslant l \leqslant m-1$, $F_{l,0}$ 都满足式 (9.5.13), 用数学归纳法, 往证 $F_{m,0}$ 也满足式 (9.5.13).

由于 $0 \leqslant i$, $m-2-i \leqslant m-1$, 且只有 m 为偶数时, i 与 $m+2-i$ 才可以同为偶数, 由归纳法假设, 即得 $F_{m,0}=0$, $m \equiv 1 (\bmod 2)$. 这就是所要证明的结论.□

推论 9.5.1　对于任何整数 $m \geqslant 0$, 有

$$F_{m,0}=\begin{cases}0, & m=2k-1,\ k\geqslant 1,\\ \dfrac{(2k)!}{k!(k+1)!}, & m=2k,\ k\geqslant 0.\end{cases} \tag{9.5.14}$$

证明　由式 (9.5.13) 直接导出. □

引理 9.5.3　关于 F_1, 对任何整数 $s \geqslant 0$, 有

$$F_{1,s}=0, \quad 即 \quad F_1=0. \tag{9.5.15}$$

证明　当 $s=0$ 时, 由引理 9.5.2, 知 $F_{1,0}=0$. 对于任何整数 $s \geqslant 1$, 可以假设 $F_{1,i}=0$ $(i \leqslant s-1)$. 因为

$$\begin{aligned}
\Delta_{0,s}&=\Big[\sum_{l\geqslant 0}F_l y_{l+1}\Big]_s=\sum_{l\geqslant 0}\big[F_l y_{l+1}\big]_s=\sum_{l\geqslant 0}F_{l,s-l-1}y_{l+1}\\
&=\begin{cases}y_1, & s=1,\\ \displaystyle\sum_{l=0}^{s-1}F_{l,s-l-1}y_{l+1}, & s\geqslant 2,\end{cases}\\
A_{0,s}&=\Big[F_0y_1+\sum_{l\geqslant 2}F_0F_{l-1}y_l\Big]_s \quad (\text{将 } s \text{ 分配到方括号内的每一项上})\\
&=F_{0,s-1}y_1+\sum_{l\geqslant 2}\big[F_0F_{l-1}y_l\big]_s \quad (\text{由于 } y_l \text{ 对 } s \text{ 的贡献为 } l)\\
&=F_{0,s-1}y_1+\sum_{l\geqslant 2}\big[F_0F_{l-1}\big]_{s-l}y_l \quad (\text{用引理 9.5.1})\\
&=\begin{cases}F_{0,0}y_1, & s=1,\\ \displaystyle\sum_{l\geqslant 2}\big[F_0F_{l-1}\big]_{s-l}y_l, & s\geqslant 2,\end{cases}\\
&=\begin{cases}y_1, & s=1,\\ \displaystyle\sum_{l=2}^{s}\big[F_0F_{l-1}\big]_{s-l}y_l, & s\geqslant 2,\end{cases}\\
&=\begin{cases}y_1, & s=1,\\ \displaystyle\sum_{l=2}^{s}F_{l-1,s-l}y_l, & s\geqslant 2,\end{cases}\\
B_{1,s}&=\Big[\sum_{l\geqslant 1}F_1F_ly_l\Big]_s=\sum_{l\geqslant 1}\big[F_1F_ly_l\big]_s=\sum_{l\geqslant 1}\big[F_1F_l\big]_{s-l}y_l
\end{aligned}$$

$$= \sum_{l=1}^{s} \left[F_1F_l\right]_{s-l} y_l = \sum_{l=1}^{s-1} \left[F_1F_l\right]_{s-l} y_l = 0.$$

由式 (9.5.11) 中 $m=1$ 时的情形, 有

$$\begin{aligned} F_{1,s} &= \Delta_{0,s} - (A_{0,s} + B_{1,s}) \quad (\text{用 } B_{1,s}=0) \\ &= \begin{cases} y_1, & s=1 \\ \sum\limits_{l=0}^{s-1} F_{l,s-l-1} y_{l+1}, & s \geqslant 2 \end{cases} - \begin{cases} y_1, & s=1 \\ \sum\limits_{l=2}^{s} F_{l-1,s-l} y_l, & s \geqslant 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & s=1, \\ \sum\limits_{l=0}^{s-1} F_{l,s-l-1} y_{l+1} - \sum\limits_{l=2}^{s} F_{l-1,s-l} y_l, & s \geqslant 2. \end{cases} \end{aligned}$$

因为当 $l=0$ 时, $F_{0,s-1}y_1=0$, 故对于 $s \geqslant 2$, 有

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{s-1} F_{l,s-l-1} y_{l+1} &= \sum_{l=1}^{s-1} F_{l,s-l-1} y_{l+1} \quad (\text{用 } l'=l+1 \text{ 代 } l) \\ &= \sum_{l'=2}^{s} F_{l'-1,s-l'} y_{l'}. \end{aligned}$$

这就导出, 对于任整数 $s \geqslant 2$, $F_{1,s}=0$. 从而, 对于任何整数 $s \geqslant 0$, $F_{1,s}=0$ 即 $F_1=0$. □

现在, 就可以建立方程式 (9.5.1) 定性理论的基本定理了.

定理 9.5.2 方程式 (9.5.1) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中有且仅有一个解.

证明 在引理 9.5.1、引理 9.5.2 和引理 9.5.3 的基础上, 因为 $F_{0,0}=1$, $F_{0,1}=F_{1,0}$ 已经得到, 对于任何整数 $p,q \geqslant 0$, $p+q \leqslant t-1$, $t \geqslant 2$, 可假设已经得到 $F_{p,q}$. 用数学归纳法, 往求 $F_{m,s}$ $(m+s=t)$.

因为 $F_{0,t}$ 和 $F_{t,0}$ $(t \geqslant 0)$, 已经分别由引理 9.5.1 和引理 9.5.2 确定, 故只需考虑 $1 \leqslant m \leqslant t-1$. 由式 (9.5.11), 当 $m=1$ 时, 有

$$\begin{aligned} F_{1,t-1} &= \delta_{0,t-1} - A_{0,t-1} - B_{1,t-1} \quad (\text{用式 (9.5.8)、式 (9.5.5) 和式 (9.5.6)}) \\ &= \sum_{l=0}^{t-2} F_{l,t-l-2} y_{l+1} - \sum_{l=2}^{t-1} F_{l-1,t-l-1} y_l - \sum_{l=1}^{t-2} \left[F_1F_l\right]_{t-l-1} y_l. \end{aligned}$$

因为 $l+(t-l-2)=t-2 \leqslant t-1$, $(l-1)+(t-l-1)=t-2 \leqslant t-1$, 由归纳假设, $F_{l,t-l-2}$ 和 $F_{l-1,t-l-1}$ 已知. 从而, 前两个求和已知. 由于对任何整数 $0 \leqslant i \leqslant$

$t-l-1, 1+i \leqslant t-1$ 和 $l+(t-l-1-i)=t-1-i \leqslant t-1$, 用归纳假设, $[F_1F_l]_{t-l-1}$ 已知. 从而, 最后一个求和已知. 由此, $F_{1,t-1}$ 被确定.

当 $m \geqslant 2$ 时, 因为分别从式 (9.5.3)、式 (9.5.8)、式 (9.5.5) 和式 (9.5.6) 知, $F^{[2]}_{m-2,t-m}$, $\Delta_{m-1,t-m}, A_{m-1,s}$ 和 $B_{m,t-m}$ 都由归纳假设确定, 用式 (9.5.11), 就可求出 $F_{m,t-m}$. 因为这样得到的 $F_{m,s}$ 满足式 (9.5.11), 从而得方程组式 (9.5.9) 的一组解. 由定理 9.5.1, 即得方程 (9.5.1) 的一个解.

进而, 从求解过程对于始值的唯一性可知, 这个解是仅有的. □

为了导出方程式 (9.5.1) 解的正项和表达式, 还需要对这个解的结构做更进一步的研究. 考虑到阅读时的方便, 根据前面所讨论的, 对于任何整数 m, $s \geqslant 1$, 有

$$\begin{cases} \Delta_{m,s} = \sum\limits_{l=0}^{s-1} F_{l+m,s-l-1} y_{l+1}, \\ A_{m,s} = \sum\limits_{l=1}^{s} \left[F_m F_{l-1}\right]_{s-l} y_l, \\ B_{m,s} = \sum\limits_{l=1}^{s} \left[F_m F_l\right]_{s-l} y_l. \end{cases} \tag{9.5.16}$$

引理 9.5.4 对于任何整数 $m, s \geqslant 0$, 如果 $m+s \equiv 1 \pmod 2$, 则 $F_{m,s}=0$.

证明 当 $m+s=1$ 时, 由式 (9.5.12) 和式 (9.5.13), 知 $F_{0,1}=0$, $F_{1,0}=0$. 当 $m+s=k \geqslant 2$ 时, 可以假设, 对 $\forall p+q \leqslant k-1$, 只要 $p+q \equiv 1 \pmod 2$, 就有 $F_{p,q}=0$. 用归纳法, 往证只要 k 是奇数, 就有 $F_{m,s}=0$. 在式 (9.5.11) 和式 (9.5.16) 的基础上, 先证 $\Delta_{m-1,s}=0$, $A_{m-1,s}=0$ 和 $B_{m,s}=0$.

因为对于任何 $0 \leqslant l \leqslant s-1$, $(l+m-1)+(s-l-1)=m-1+s-1=m+s-2=k-2 \leqslant k-1$, 又 k 为奇数, $k-2$ 也是奇数, 用归纳假设, $F_{l+m,s-l-1}=0$. 从而, 用式 (9.5.16) 的第一式, $\Delta_{m-1,s}=0$.

因为对于任何 $1 \leqslant l \leqslant s$ 和 $0 \leqslant i \leqslant s-l$, $\big((m-1)+i\big)+\big((l-1)+(s-l-i)\big)=m+s-2=k-2 \leqslant k-1$, 从 k 为奇数知, $(m-1)+i$ 和 $(l-1)+(s-l-i)$ 中必有一个为奇数. 由归纳假设, $[F_{m-1}F_{l-1}]_{s-l}=0$. 用式 (9.5.16) 的第二式, $A_{m-1,s}=0$.

对于任何 $1 \leqslant l \leqslant s, 0 \leqslant i \leqslant s-l$, 有 $(m+i)+\big(l+(s-l-i)\big)=m+s=k$. 对于 $m \geqslant 1$ 和 $l \geqslant 1$, 有 $m+i \leqslant k-1$, $l+(s-l-i) \leqslant k-1$. 从 $k \equiv 1 \pmod 2$, 可知 $m+i$ 和 $l+(s-l-i)$ 中总有一个为奇数. 用归纳假设, $[F_mF_l]_{s-l}=0$. 由式 (9.5.16) 的第三式, $B_{m,s}=0$.

同理, 可得 $F^{[2]}_{m-2,s}$. 从而, 由式 (9.5.11), 对于 $m+s \equiv 1 \pmod 2$, 有 $F_{m,s}=0$. 即得欲证的结论. □

由这个引理, 我们在确定 $F_{m,s}$ 时, 可只研究 $m+s\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$ 时的情形. 由引理 9.5.1、引理 9.5.2 和引理 9.5.3, 只需讨论 $m\geqslant 2$ 和 $s\geqslant 1$ 时的情形. 因此, $m+s\leqslant 3$ 时的情形都已经完成. 当 $m+s=4$ 时, 就是要求 $F_{3,1}$ 和 $F_{2,2}$.

先求 $F_{3,1}$. 易知

$$\Delta_{2,1}=\sum_{l=0}^{0-1}F_{l+2,1-l-1}y_{l+1}=F_{2,0}y_1=y_1,$$

$$A_{2,1}+B_{3,1}=\left[F_2F_0\right]_0y_1=y_1,$$

再考虑

$$F_{1,1}^{[2]}=2\left[F_0F_1\right]_1=2(F_{0,0}F_{1,1}+F_{0,1}F_{1,0})=2F_{0,0}F_{1,1}=0.$$

利用式 (9.5.11), 即得

$$F_{3,1}=F_{1,1}^{[2]}+\Delta_{2,1}-(A_{2,1}+B_{3,1})=0+y_1-y_1=0.$$

再求 $F_{2,2}$. 易知

$$\Delta_{1,2}=\sum_{l=0}^{2-1}F_{l+1,1-l}y_{l+1}=F_{1,1}y_1+F_{2,0}y_2=y_2,$$

$$\begin{aligned}A_{1,2}+B_{2,2}&=\left[F_2F_2\right]_0y_2+\sum_{l=1}^{2-1}\left[F_2F_l+F_1F_{l-1}\right]_{2-l}y_l\\&=\left[F_2F_2\right]_0y_2+\left[F_2F_1\right]_ly_l=F_{2,0}F_{2,0}y_2=y_2.\end{aligned}$$

再考虑

$$F_{0,2}^{[2]}=\left[F_0F_0\right]_2=2F_{0,0}F_{0,2}+F_{0,1}F_{0,1}=0.$$

利用式 (9.5.11), 即得

$$F_{2,2}=F_{0,2}^{[2]}+\Delta_{1,2}-(A_{1,2}+B_{2,2})=0+y_2-y_2=0.$$

这两个结果表明, 当 $m+s=4$ 时, 有 $\Delta_{m-1,s}-(A_{m-1,s}+B_{m,s})\geqslant 0$.

对于任何整数 $m\geqslant 2$ 和 $s\geqslant 0$, 令 $\Gamma_{m,s}=\Delta_{m-1,s}-(A_{m-1,s}+B_{m,s})$, 则由式 (9.5.16), 知

$$\begin{aligned}\Gamma_{m,s}&=\sum_{l=0}^{s-1}F_{l+m-1,s-l-1}y_{l+1}-\left(\sum_{l=1}^{s}\left[F_{m-1}F_{l-1}\right]_{s-l}y_l+\sum_{l=1}^{s}\left[F_mF_l\right]_{s-l}y_l\right)\\&=\sum_{l=1}^{s}F_{l+m-2,s-l}y_l-\left(\sum_{l=1}^{s}\left[F_{m-1}F_{l-1}+F_mF_l\right]_{s-l}y_l\right)\end{aligned}$$

$$= \sum_{l-1}^{s} \left[F_{l+m-2} - F_{m-1}F_{l-1} - F_m F_l\right]_{s-l} y_l. \tag{9.5.17}$$

为了简便, 对于整数 $1 \leqslant l \leqslant s$, 记

$$\Gamma_l^{(m,s)} = \left[F_{l+m-2} - F_{m-1}F_{l-1} - F_m F_l\right]_{s-l}. \tag{9.5.18}$$

由引理 9.5.4 和引理 9.5.5, 有

$$\Gamma_l^{(m,s)} \begin{cases} = 0, & m \not\equiv s (\mathrm{mod}\ 2), \\ \geqslant 0, & m \equiv s (\mathrm{mod}\ 2). \end{cases} \tag{9.5.19}$$

由引理 9.5.1 和引理 9.5.3, 以及式 (9.5.11), 对于任何整数 $m,\ s \geqslant 0$, 有

$$F_{m,s} = \begin{cases} 1, & m = s = 0 \text{ 或 } m = 2,\ s = 0\ , \\ 0, & m = 0,\ s \geqslant 1 \text{ 或 } m = 1,\ s \geqslant 0, \\ & \text{以及 } m \not\equiv s (\mathrm{mod}\ 2), \\ F^{[2]}_{m-2,s} + \sum\limits_{l=1}^{s} \Gamma_l^{(m,s)} y_l, & \text{其他}. \end{cases} \tag{9.5.20}$$

引理 9.5.5　对于任何整数 $m, s \geqslant 1$, 有 $\Delta_{m-1,s} \geqslant A_{m-1,s} + B_{m,s}$.

证明　根据定理 9.5.2, 方程式 (9.5.1) 的解是唯一的. 因为 $F_{m,s}$ 就是根棱非割边简单平面地图的根面次为 m、非根面次剖分向量为 $\boldsymbol{n}$ 且满足 $\pi(\boldsymbol{n}) = s$ 的根同构类的数目. 从而, $F_{m,s} - F^{[2]}_{m-2,s\geqslant 0}$. 由式 (9.5.11), 有 $\Delta_{m-1,s} \geqslant A_{m-1,s} + B_{m,s}$, 即得欲证的结论. □

这个引理告诉我们, 对于任何整数 $m, s \geqslant 1$, $\Gamma_{m,s} \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$.

引理 9.5.6　对于任何整数 $m, s \geqslant 0$, 有 $F_{m,s} \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$.

证明　根据式 (9.5.20), $F_{m,s} = F^{[2]}_{m-2,s} + \Gamma_{m,s}$. 由于 $F^{[2]}_{m-2,s} \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$, 且对于整数 $1 \leqslant l \leqslant s$, $\Gamma_l^{(m,s)} \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$, 所以 $\Gamma_{m,s} \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$. 从而, $F_{m,s} \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$. □

还需要了解, 对于给定整数 $m, s \geqslant 0$, $F_{m,s}$ 由向量 $\boldsymbol{y}$ 的有限个分量所决定的情况.

引理 9.5.7　对于任何整数 $m, s \geqslant 0$, $F_{m,s}$ 与 y_1, y_2 和所有 y_l $(l \geqslant s+1)$ 无关.

证明 通过前面的计算, 可以看出, 当 $m+s\leqslant 4$ 时, 引理的结论成立. 对于 $m+s\geqslant 6$, $m\geqslant 3$, 根据数学归纳法原理, 假设对于任何 $p+q\leqslant m+s-1$, $F_{p,q}$ 都满足引理的结论, 只需往证 $F_{m,s}$ 也满足引理的结论.

由式 (9.5.4), 因为 $(m-2)+s=m+s-2\leqslant m+s$, 由归纳假设导致 $F^{[2]}_{m-2,s}$ 不含 y_1, y_2 和所有 y_l $(l\geqslant s+1)$. 由式 (9.5.18), 对于任何整数 $1\leqslant l\leqslant s$, 有

$$\begin{aligned}\Gamma_l^{(m,s)}&=\big[F_{l+m-2}-F_{m-1}F_{l-1}-F_mF_l\big]_{s-l}\\&=F_{l+m-2,s-l}-\sum_{j=1}^{s-l}\big(F_{m-1,j}F_{l-1,s-l-j}+F_{m,j}F_{l,s-l-j}\big)\\&=F_{l+m-2,s-l}-\sum_{j=1}^{s-l}F_{m-1,j}F_{l-1,s-l-j}-\sum_{j=1}^{s-l-1}F_{m,j}F_{l,s-l-j}.\end{aligned}$$

因为 $(l+m-2)+(s-l)=m+s-2$, $(m-1)+j\leqslant m+s-l-1\leqslant m+s-2$, $(l-1)+(s-l-j)=s-j-1\leqslant s-2\leqslant m+s-1$ $(m\geqslant 3)$, $m+j\leqslant m+(s-l)\leqslant m+s-1$ 和 $l+(s-l-j)=s-1\leqslant m+s-1$ $(m\geqslant 3)$, 由归纳假设, $\Gamma_l^{(m,s)}$ 不含 y_1, y_2 和所有 y_l $(l\geqslant s+1)$. 从而, 由式 (9.5.20), $F_{m,s}$ 与 y_1, y_2 和所有 y_l $(l\geqslant s+1)$ 无关. 这就是引理的结论. □

这个引理启示我们, 对于任何给定的整数 $m,s\geqslant 0$, 有

$$F_{m,s}\in\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}_s\},$$

其中 $\boldsymbol{y}_s=(y_1,y_2,\cdots,y_s)$ 为 s 维向量.

引理 9.5.8 当 $m=2$ 时, 对于任何整数 $s\geqslant 1$, 有 $F_{2,s}=0$.

证明 从前面的计算, 已经得到 $F_{2,1}=F_{2,2}=0$. 对于 $s\geqslant 3$ 时的一般情形, 可以假设 $F_{2,l}=0$ $(1\leqslant l\leqslant s-1)$, 依数学归纳法原理, 往证 $F_{2,s}=0$.

由式 (9.5.20), 只需要证明 $F^{[2]}_{0,s}=0$ 和 $\Gamma_l^{(2,s)}=0$ $(1\leqslant l\leqslant s)$. 对于前一个结论, 由式 (9.5.4) 即可得到. 只剩下后一个结论. 由式 (9.5.18), 得

$$\begin{aligned}\Gamma_l^{(2,s)}&=\big[F_l-F_1F_{l-1}-F_2F_l\big]_{s-l}\\&=F_{l,s-l}-\sum_{j=0}^{s-l}F_{1,j}F_{l-1,s-l-j}-\sum_{j=0}^{s-l}F_{2,j}F_{l,s-l-j}\quad(\text{用式 (9.5.15)})\\&=F_{l,s-l}-\sum_{j=0}^{s-l}F_{2,j}F_{l,s-l-j}\quad(\text{用推论 9.5.1})\\&=F_{l,s-l}-\sum_{j=0}^{s-l-1}F_{2,j}F_{l,s-l-j}-F_{2,s-l}F_{l,0}\end{aligned}$$

$$= F_{l,s-l} - \sum_{j=1}^{s-l-1} F_{2,j}F_{l,s-l-j} - F_{2,0}F_{l,s-l}$$
$$= -\sum_{j=1}^{s-l-1} F_{2,j}F_{l,s-l-j} = 0.$$

从而, 引理的结论得证. □

由这个引理, 我们可在下面讨论 $m \geqslant 3$ 时的情形, 而不会失一般性.

引理 9.5.9 对于任何一个整数 $m \geqslant 3$, 如果整数 $s \geqslant m+1$, 则 $F_{m,s} = 0$.

证明 因为已经知道, 当 $m+s \leqslant 4$ 时, 引理的结论成立. 对于 $m+s \geqslant 5$ 时的一般情形, 可以假设, 对于任何整数 $p+q \leqslant m+s-1$, 只要 $q \geqslant p+1$, 就有 $F_{p,q} = 0$. 用数学归纳法, 往证 $F_{m,s} = 0$ $(s \geqslant m+1)$.

由式 (9.5.20), 只需证明: 当 $s \geqslant m+1$ 时, $F^{[2]}_{m-2,s} = 0$, 且对于任何整数 $1 \leqslant l \leqslant s$, $\Gamma_l^{(m,s)} = 0$.

对于前者, 考虑

$$F^{[2]}_{m-2,s} = \sum_{i=0}^{m-2} \left[F_i F_{m-2-i}\right]_s = \sum_{i=0}^{m-2}\sum_{j=0}^{s} F_{i,j}F_{m-2-i,s-j}$$
$$= \sum_{i=0}^{m-2}\sum_{j=0}^{i} F_{i,j}F_{m-2-i,s-j}.$$

由归纳假设, 只有当 $s-j \leqslant m-2-i$, 即 $j \geqslant i+(s-m)+2$ 时, $F_{m-2-i,s-j}$ 才有可能不是 0. 然而, 从 $s \geqslant m+1$, 得 $j \geqslant i+3 \geqslant i+1$. 由归纳假设, $F_{i,j} = 0$. 从而, $F^{[2]}_{m-2,s} = 0$.

对于后者, 由式 (9.5.18), 有

$$\Gamma_l^{(m,s)} = \left[F_{l+m-2} - F_{m-1}F_{l-1} - F_m F_l\right]_{s-l}.$$

利用归纳法假设, 即可得 $\Gamma_l^{(m,s)} = 0$ $(1 \leqslant l \leqslant s)$.

综上所述, 即得欲证的结论. □

进一步, 对于 $m+s \geqslant 6$, 求 F_{m+s}. 当 $m+s=6$ 时, 要计算 $F_{6,0} = 2$(由推论 9.5.1), $F_{5,1} = F_{4,2} = 0$(由引理 9.5.7), $F_{3,3} = F_{2,4} = 0$(由式 (9.5.20)).

下面求 $F_{3,3}$. 由式 (9.5.20), $F_1 = 0$, 可知对任何整数 $k \geqslant 2$, $F_1^{[k]} = 0$, 所以

$F_{1,3}^{[2]}=0$. 对于整数 $1\leqslant l\leqslant 3$, 利用式 (9.5.18), 求出

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{3}\Gamma_l^{(3,3)}y_l&=\sum_{l=1}^{3}\big[F_{l+1}-F_2F_{l-1}-F_3F_l\big]_{3-l}y_l\\&=\big[F_4-F_2F_2-F_3F_3\big]_0y_3\\&=\big(F_{4,0}-F_{2,0}F_{2,0}-F_{3,0}F_{3,0}\big)y_3=\big(2-1-0\big)y_3\\&=y_3.\end{aligned}$$

根据式 (9.5.20), 即得 $F_{3,3}=y_3$.

引理 9.5.10 对于任何整数 $m\geqslant 3$, 令 $F_{m,m}(y_m)$ 为 $F_{m,m}$ 含 y_m 的部分, 则

$$F_{m,m}(y_m)=\begin{cases}y_3, & m=3,\\ \Gamma_m^{(m,m)}, & m\geqslant 4,\end{cases}\tag{9.5.21}$$

其中

$$\Gamma_m^{(m,m)}=\frac{(2m-2)!}{(m-1)!m!}-\frac{(2\lfloor m/2\rfloor)!}{\lfloor m/2\rfloor!(\lfloor m/2\rfloor-1)!}.\tag{9.5.22}$$

证明 由 $m>(m-2)+1=m-1$, 从引理 9.5.9 的证明中可以看出 $F_{m-2,m}^{[2]}=0$. 由式 (9.5.20), 有

$$F_{m,m}=\sum_{l=1}^{m}\Gamma_l^{(m,m)}y_l=\sum_{l=3}^{m}\Gamma_l^{(m,m)}y_l.$$

因为 $s=m$, 所以 $\Gamma_l^{(m,m)}$ $(3\leqslant l\leqslant m-1)$ 都不含 y_m, 即得 $F_{m,m}(y_m)=\Gamma_m^{(m,m)}$.

进而, 由式 (9.5.18), 有

$$\begin{aligned}\Gamma_m^{(m,m)}&=\big[F_{2m-2}-F_{m-1}F_{m-1}-F_mF_m\big]_0\\&=F_{2m-2,0}-F_{m-1,0}F_{m-1,0}-F_{m,0}F_{m,0}\\&=\frac{(2m-2)!}{(m-1)!m!}-(F_{m-1,0}F_{m-1,0}+F_{m,0}F_{m,0}).\end{aligned}$$

由式 (9.5.20), 有

$$F_{m-1,0}F_{m-1,0}+F_{m,0}F_{m,0}=\begin{cases}F_{m,0}F_{m,0} & m=2k,\\ F_{m-1,0}F_{m-1,0}, & m=2k+1.\end{cases}$$

从而, 由式 (9.5.14), 有

$$F_{m-1,0}F_{m-1,0}+F_{m,0}F_{m,0}=\frac{(2k)!}{k!(k+1)!}.$$

由 $k=\lfloor m/2\rfloor$, 即得式 (9.5.22). □

定理 9.5.3 令 $f_{\rm sif}$ 为方程式 (9.5.1) 的解. 对于任何整数 $m,s\geqslant 0$, 记 $F_{m,s}^{\rm sif}=[\partial_x^m f_{\rm sif}]_s$, 则有

$$F_{m,s}^{\rm sif}=\begin{cases}1, & m=s=0,\\ 0, & m\not\equiv s(\mathrm{mod}\ 2), \text{或 } 0\leqslant m\leqslant 1, \text{或 } m=2,s\geqslant 1,\\ & \text{或 } s\geqslant m+1, \text{或 } 1\leqslant s\leqslant 2,\\ \dfrac{(m)!}{\lfloor m/2\rfloor!(\lfloor m/2\rfloor+1)!}, & s=0,m\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2),\\ \left.\begin{array}{ll}0, & m=3,\ s=1,\\ 0, & m=s=2,\end{array}\right\} & \text{当 } m+s=4 \text{ 时},\\ \left.\begin{array}{ll}0, & (m,s)=(5,1),(4,2),\\ y_3, & m=s=3,\end{array}\right\} & \text{当 } m+s=6 \text{ 时},\\ \left.\begin{array}{ll}0, & 1\leqslant s\leqslant 2,\\ F_{m-2,s}^{\mathrm{sif}[2]}+\displaystyle\sum_{l=3}^{s}\Gamma_l^{(m,s)}y_l, & 3\leqslant s\leqslant m \text{ 且不含 } y_m,\\ \Gamma_m^{(m,m)}y_m, & s=m \text{ 且含 } y_m,\end{array}\right\} & \text{其他},\end{cases} \tag{9.5.23}$$

其中 $\Gamma_l^{(m,s)}$ 和 $\Gamma_m^{(m,m)}$ 分别由式 (9.5.18) 和式 (9.5.22) 中 $F=F^{\rm sif}$ 时的情形给出.

证明　由前面所得的结果可直接导出. □

在这个定理的基础上, 对于下面的实例, 继续完成 $m+s=8$ 时的情形. 由此得到 $F_{8,0}=14$, $F_{7,1}=F_{6,2}=0$, $F_{5,3}=8y_3$, $F_{4,4}=y_4$.

例 9.5.1　平面单地图按非根面剖分的根同构类. 在图 9.5.1 提供了不大于 4 条棱的平面单地图按非根面剖分的所有根同构类. 对于地图, $m+s$ 是棱数的 2 倍, 有一条棱时, 只有 1 类平面单地图. 它的根面次为 2, 没有内面 (即非根面). 如图中所示, $a=x^2$, 即 $F_{2,0}=1$. 这就是 $m+s=2$ 时的情形. 同样, 有两条棱, 即 $m+s=4$ 时, 有 $b=2x^4$, 即 $F_{4,0}=2$. 有三条棱, 即 $m+s=6$ 时, 有

$$c+d+e=(3x^6)+(2x^6)+(x^3y_3),$$

即

$$F_{6,0}=3(c)+2(d)=5,\quad F_{3,3}=y_3.$$

有四条棱, 即 $m+s=8$ 时, 有

$$f+g+h+i+j=(4x^8)+(8x)+(2x^8)+(8x^5y_3)+(x^4y_4),$$

即

$$F_{8,0} = 4(f) + 8(g) + 2(h) = 14, \quad F_{5,3} = 8(i) = 8x^5y_3, \quad F_{4,4} = y_4.$$

另外, $k + l + m + n + o + p = 10x^5y_5 = F_{5,5}(y_5)$.

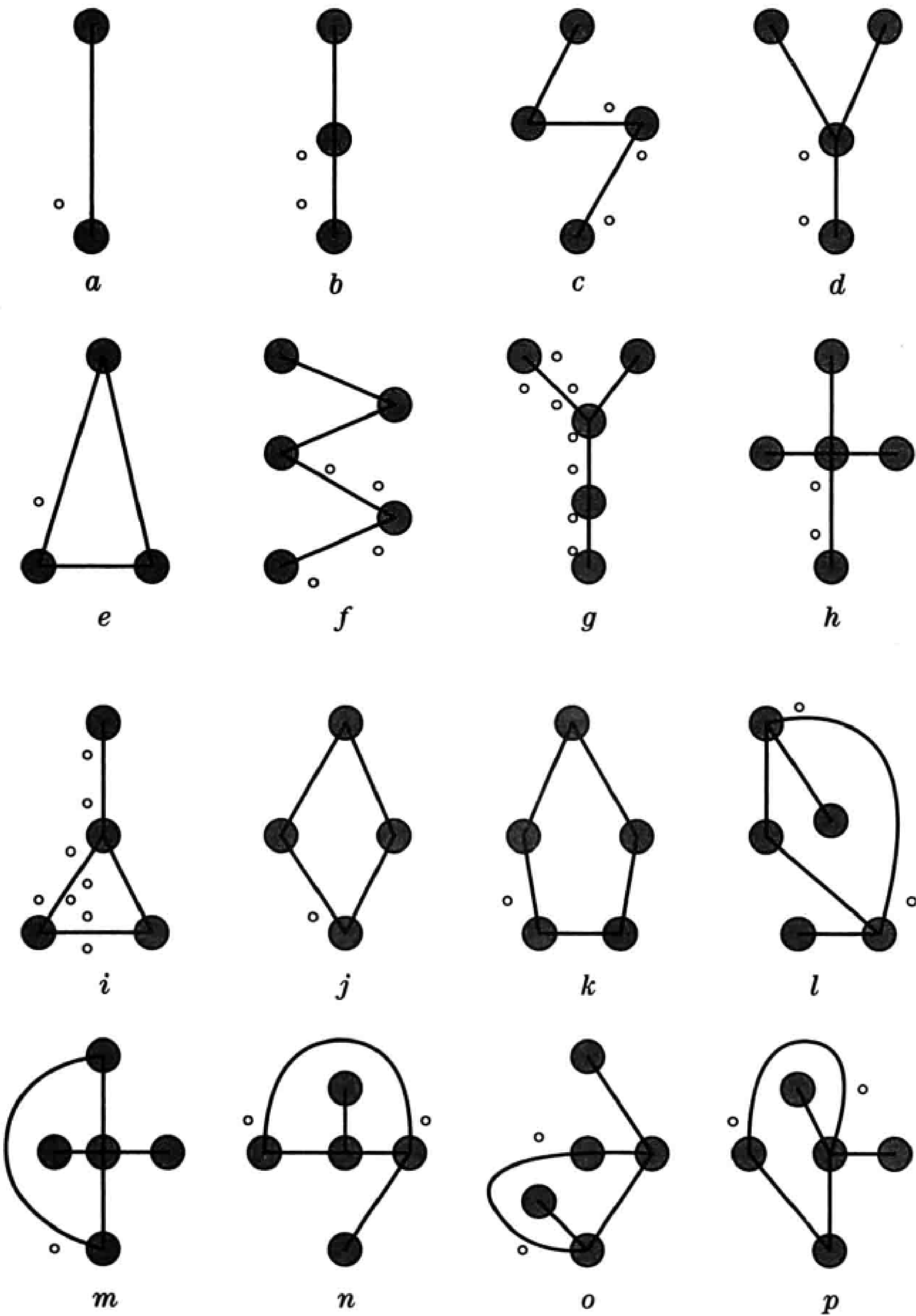


图 9.5.1 平面单地图依面剖分向量的根同构类

9.6　内面 Euler 型

在文献 [25] 或 [67](122 页) 中,

$$\begin{cases} f = 1 + x^2 f^2 + x^2 \int_y y^2 \delta_{x^2,y^2}\left(f\big|_{u=x^2}\right), \\ f\big|_{x=0\Rightarrow \boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = 1, \end{cases} \tag{9.6.1}$$

其中 $f \in \mathcal{F}$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3, \cdots) \in \mathcal{V}$.

由于方程式 (9.6.1) 中没有 x 的奇次项, 所以 f 是 x 的偶函数, 即 $f(-x) = f(x)$. 由于方程式 (9.6.1) 中没有 y 的奇次项, 对于任何整数 $i \geqslant 0$, f 与 y_{2i+1} 无关.

因为对于 $f \in \mathcal{R}\{x, \boldsymbol{y}\}$, f 由 $F_m = \partial_x^{2m} f \in \mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ $(m \geqslant 0)$ 确定, 所以有

$$\begin{aligned} \delta_{x^2,y^2}\left(f\big|_{u=x^2}\right) &= \sum_{m\geqslant 0} F_m \left(\frac{x^{2m} - y^{2m}}{x^2 - y^2}\right) \\ &= \sum_{m\geqslant 0} F_m \left(\sum_{i=0}^{m} x^{2i} y^{2(m-i-1)}\right) \\ &= \sum_{i\geqslant 0} x^{2i} \sum_{m\geqslant i} y^{2(m-i-1)} F_m. \end{aligned}$$

从而, 得

$$y^2 \delta_{x^2,y^2}\left(f\big|_{u=x^2}\right) = \sum_{i\geqslant 0} x^{2i} \sum_{m\geqslant i} y^{2(m-i)} F_m = \sum_{i\geqslant 0} x^{2i} \sum_{l\geqslant i} F_l y^{2(l-i)}.$$

由此有

$$\int_y y^2 \delta_{x^2,y^2}\left(f\big|_{u=x^2}\right) = \sum_{i\geqslant 0} x^{2i} \sum_{l\geqslant i} F_l y_{2(l-i)}. \tag{9.6.2}$$

由方程式 (9.6.1), 对于所有整数 $m \geqslant 0$, 可得

$$F_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ F_{m-1}^{[2]} + \sum\limits_{l\geqslant m-1} F_l y_{2(l-m+1)}, & m \geqslant 1, \end{cases} \tag{9.6.3}$$

其中 $F_m^{[2]} = \partial_x^{2m} f^2$ $(m \geqslant 1)$.

定理 9.6.1 方程式 (9.6.1) 与关于 $F_m \in \{\boldsymbol{y}\}(m \geqslant 0)$ 的方程组式 (9.6.3) 等价.

证明 由 $f \in \mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$, 对于任何整数 $m \geqslant 0$, 有 $F_m \in \mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$, 从而由 $f^2 \in \mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 导致 $F_{m-1}^{[2]} \in \mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$. 由于式 (9.6.2) 是在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上算的, 从式 (9.6.1) 到式 (9.6.3) 是在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上的等价变换, 所以欲证的结论成立. □

注意到在方程组式 (9.6.3) 中, 方程的数目是无限的, 还要引进一个或一些参数, 使得对于任何一组 m 和这个或这些参数的给定值, 只需解由有限个方程构成的一个方程组.

对于任何 $m \geqslant 0$, 记 $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}$ 为 F_m 的一项, 其中 $\boldsymbol{y} = (y_2, y_4, \cdots)$, $\boldsymbol{n} = (n_2, n_4, \cdots)$. 令

$$s = \frac{\pi(\boldsymbol{n})}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i \geqslant 1}(2i)n_{2i} = \sum_{i \geqslant 1} i n_{2i}, \tag{9.6.4}$$

称之为*内度*.

为方便, 对于任何整数 m, $s \geqslant 0$, 令 $F_{m,s} = \left[F_m\right]_s$, 即 F_m 中使得 $\pi(\boldsymbol{n})/2 = s$ 的所有项组成的部分.

引理 9.6.1 当 $m = 0$ 时, 对于任何整数 $s \geqslant 0$, 有

$$F_{0,s} = \begin{cases} 1, & s = 0, \\ 0, & s \geqslant 1. \end{cases} \tag{9.6.5}$$

证明 由式 (9.6.3) 的第一式, 即得欲证的结论. □

由这个引理, 在下面的讨论中, 我们可不再考虑 $m = 0$ 时的情形.

引理 9.6.2 当 $s = 0$ 时, 对于任何整数 $m \geqslant 0$, 有

$$F_{m,0} = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ \dfrac{(2m)!}{m!(m+1)!}, & m \geqslant 1. \end{cases} \tag{9.6.6}$$

证明 当 $m = 0$ 时, 由引理 9.6.1 中 $s = 0$ 时的情形, 得 $F_{m,0} = F_{0,0} = 1$. 对于 $m \geqslant 1$, 假设 $F_{n,0} = (2n)!/\big(n!(n+1)!\big)(1 \leqslant n \leqslant m-1)$, 用数学归纳法, 往证 $F_{m,0} = (2m)!/\big(m!(m+1)!\big)$. 在式 (9.6.3) 的基础上, 由于 $m = 1$ 使得第二式中的求和号不存在, 所以有

$$F_{1,0} = F_{0,0}^{[2]} = F_{0,0}^2 = 1,$$

且对于 $m \geqslant 2$, 有

$$\begin{aligned}F_{m,0} &= \Big[F^{[2]}_{m-1} + \sum_{l\geqslant m-1} F_l y_{2(l-m+1)}\Big]_0 \\ &= F^{[2]}_{m-1,0} + \sum_{l\geqslant m-1} F_{l,0-(l-m+1)} = \sum_{i=0}^{m-1} F_{i,0}F_{m-1-i,0} \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(2i)!}{i!(i+1)!}\frac{\big(2(m-1-i)\big)!}{(m-1-i)!(m-i)!} \quad (\text{即 Catalan 数}) \\ &= \frac{(2m)!}{m!(m+1)!}.\end{aligned}$$

由此即得欲证的结论. □

下面, 除非特别说明, 只需讨论 $m \geqslant 1$ 时的情形.

因为 f^2 不会有 x 的偶次项, 故对于 $m \geqslant 1$, 有

$$F^{[2]}_m = \sum_{i=0}^{m} F_i F_{m-i} = \begin{cases} 2F_1, & m=1, \\ 2F_m + \sum\limits_{i=1}^{m-1} F_i F_{m-i}, & m>1. \end{cases} \tag{9.6.7}$$

以及对于任何整数 $s \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\Big[\sum_{l\geqslant m-1} F_l y_{2(l-m+1)}\Big]_s &= \sum_{l\geqslant m-1} \big[F_l y_{2(l-m+1)}\big]_s \\ &= \sum_{l\geqslant m-1} F_{l,s-(l-m+1)} y_{2(l-m+1)} \\ &= \sum_{l=m-1}^{s+m-1} F_{l,s-(l-m+1)} y_{2(l-m+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{s} F_{k+m-1,s-k} y_{2k}.\end{aligned} \tag{9.6.8}$$

由式 (9.6.7) 和式 (9.6.8), 方程组式 (9.6.3) 变为

$$F_{m,s} = \begin{cases} 1, & m=0, s=0, \\ 0, & m=0, s\geqslant 1, \\ F^{[2]}_{m-1,s} + \sum\limits_{k=0}^{s} F_{k+m-1,s-k} y_{2k}, & m \geqslant 1. \end{cases} \tag{9.6.9}$$

对于 $m+s \leqslant 3$, 看一看用式 (9.6.9) 如何确定 $F_{m,s}$. 当 $m+s=0$ 时, 只有 $F_{0,0}=1$, 即始条件.

当 $m+s=1$ 时, 由引理 9.6.1, 只需确定 $F_{1,0}$. 由引理 9.6.2, 有 $F_{1,0}=1$.

当 $m+s=2$ 时, 由引理 9.6.1, 要确定 $F_{2,0}$ 和 $F_{1,1}$. 首先, 由引理 9.6.2, 有 $F_{2,0}=2$. 然后, 由式 (9.6.9), 有

$$F_{1,1}=F_{0,1}^{[2]}+\sum_{k=0}^{1}F_{k,1-k}y_{2k}=2F_{0,0}F_{0,1}+F_{0,0}y_2=y_2.$$

当 $m+s=3$ 时, 由引理 9.6.1, 要确定 $F_{3,0}$, $F_{2,1}$ 和 $F_{1,2}$. 由引理 9.6.2, 有 $F_{3,0}=5$. 由式 (9.6.9), 有

$$F_{2,1}=F_{1,1}^{[2]}+\sum_{k=0}^{1}F_{k+2-1,1-k}y_{2k}=2F_{1,1}+F_{2,0}y_2=2y_2+2y_2=4y_2.$$

由式 (9.6.9), 有

$$F_{1,2}=F_{0,2}^{[2]}+\sum_{k=0}^{2}F_{k,2-k}y_{2k}=F_{1,1}y_2+F_{2,0}y_4=y_2^2+2y_4.$$

定理 9.6.2 方程式 (9.6.1) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中有且仅有一个解.

证明 因为式 (9.6.9) 与式 (9.6.3) 在 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 上等价, 由定理 9.6.1, 对于整数 $m,s\geqslant 0$, 只需讨论在 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 中有且仅有一组 $F_{m,s}$ 满足式 (9.6.9).

首先, 从上面的计算可以看出, 对于整数 $m,s\geqslant 0$, $m+s\leqslant 3$, $F_{m,s}$ 已经满足式 (9.6.9). 然后, 对于其他所有可能的 m,s, 用归纳法, 假设对于任何整数 $i,j\geqslant 0$, $i+j\leqslant m+s-1$, 都已经得到满足式 (9.6.9) 的 $F_{i,j}$. 往证 $F_{m,n}$ 满足式 (9.6.9).

在式 (9.6.9) 中, 前一项为

$$F_{m-1,s}^{[2]}=\sum_{i=0}^{m-1}\left[F_iF_{m-1-i}\right]_s=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{s}F_{i,j}F_{m-1-i,s-j}.$$

因为 $i+j\leqslant m-1+j\leqslant m+s-1$, $(m-1-i)+(s-j)\leqslant(m-1)+(s-j)\leqslant(m-1)+s=m+s-1$, 由归纳法假设, 即导出 $F_{m-1,s}^{[2]}$. 后一项为

$$\sum_{k=0}^{s}F_{k+m-1,s-k}y_{2k}.$$

$(k+m-1)+(s-k)=m+s-1\leqslant m+s-1$, 这个求和项也由归纳假设导出. 从而, 这样所得到的 $F_{m,s}$ 决定了方程式 (9.6.1) 的一个解.

进而, 考虑到对于方程式 (9.6.1) 初始条件的唯一性, 这个解是仅有的. □

从定理 9.6.2 的证明过程, 即可看出式 (9.6.9) 本身已经提供了求解方法.

引理 9.6.3　对于整数 $m,\ s \geqslant 1$, 如果 $s \geqslant m+1$, 则 $F_{m,s}=0$.

证明　从 $F_{m,s}$ $(m+s\leqslant 3)$ 已经看出, 当 $s\geqslant m+1$ 时, 有 $F_{m,s}=0$. 对于 $m+s\geqslant 4$ 时的一般情形, 假设当 $i+j\leqslant m+s-1$ 时, 只要 $j\geqslant i+1$, 就有 $F_{i,j}=0$. 用数学归纳法, 往证当 $s\geqslant m+1$ 时, $F_{m,s}=0$. 为此, 由式 (9.6.9), 只需证明

$$\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{s}F_{k,l}F_{m-1-k,s-l}=0,\quad \sum_{k=0}^{s}F_{k+m-1,s-k}y_{2k}=0.$$

对于前者, 如果 $l\leqslant k$, 则

$$(s-l)-(m-1-k)=s-m+1+k-l\geqslant s-m+1\geqslant 2,$$

即 $s-l\geqslant(m-1-k)+2>(m-1-k)+1$. 由归纳假设, 在这个和式中, 所有项均为 0, 即等式成立.

对于后者, 由于

$$(s-k)-(k+m-1)+2k=s-m+1\geqslant 2>1,$$

即 $s-k\geqslant(k+m-1)+1$. 同样, 由归纳假设, 和中所有项均为 0, 等号也成立. □

这个引理使我们在求 $F_{m,s}$ 的过程中, 能减少一半的工作量.

引理 9.6.4　对于整数 $m,\ s\geqslant 1$, 有 $F_{m,s}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$.

证明　从前面的计算结果, 对于整数 $m,s\geqslant 0$, 当 $m+s\leqslant 3$ 时, 有 $F_{m,s}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$. 对于 $m+s\geqslant 4$ 时的一般情形, 假设只要 $i+j\leqslant m+s$, 就有 $F_{i,j}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$. 用数学归纳法, 往证 $F_{m,s}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$.

在式 (9.6.9) 的基础上, 如引理 9.6.3 的证明中所示, 因为 $k+l\leqslant(m-1)+s=m+s-1$, $(m-1+k)+(s-l)\leqslant(m-1)+s=m+s-1$, 由归纳假设, 有 $F^{[2]}_{m-1,s}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$. 因为 $(k+m-1)+(s-k)=m+s-1$, 由归法假设, 有

$$\sum_{k=0}^{s}F_{k+m-1,s-k}y_{2k}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}.$$

从而, 即得欲证的结论. □

定理 9.6.3　方程式 (9.6.1) 的解 $f=f_{\mathrm{iEf}}$, $F_{m,s}=F^{\mathrm{iEf}}_{m,s}$ 有如下正项和表示:

$$F_{m,s}=\begin{cases}1, & m=0,s=0,\\ 0, & m=0,s\geqslant 1,\\ 0, & m\geqslant 1,s\geqslant m+1,\\ F^{[2]}_{m-1,s}+\displaystyle\sum_{k=1}^{s}F_{k+m-1,s-k}y_{2k}, & \text{其他}\end{cases}\tag{9.6.10}$$

其中 $F^{[2]}_{m-1,s}$ 由式 (9.6.7) 给出.

证明 当 $m=0$, $s=0$ 时, 式 (9.6.10) 就是方程式 (9.6.1) 的始条件. 当 $m=0$, $s\geqslant 1$ 时, 由引理 9.6.1 给出. 对于其他情形, 当 $s\geqslant m+1$ 时, 由引理 9.6.3 给出; 否则, 由引理 9.6.4 确定. □

在定理 9.6.3 的基础上, 继续确定方程式 (9.6.1) 解中 $m+s=4$ 的部分. 这时, 就是求 $F_{4,0}$, $F_{3,1}$, $F_{2,2}$ 和 $F_{1,3}$.

对于 $F_{4,0}$, 由引理 9.6.2, 知

$$F_{4,0}=\frac{8!}{4!5!}=14.$$

对于 $F_{3,1}$, 因为由式 (9.6.7), 有

$$F^{[2]}_{2,1}=\left[2F_2+F_1^2\right]_1=2F_{2,1}+2F_{1,0}F_{1,1}=2(4y_2)+2y_2=10y_2,$$

故由式 (9.6.10), 有

$$F_{3,1}=10y_2+F_{3,0}y_2=10y_2+5y_2=15y_2.$$

对于 $F_{2,2}$, 因为由式 (9.6.7), 有

$$F^{[2]}_{1,2}=\left[2F_1\right]_2=2F_{1,2}=2(y_2^2+y_4)=2y_2^2+2y_4,$$

故由式 (9.6.10), 有

$$\begin{aligned}F_{2,2}&=2y_2^2+2y_4+F_{2,1}y_2+F_{3,0}y_4\\&=2y_2^2+2y_4+4y_2^2+5y_4=6y_2^2+7y_4.\end{aligned}$$

对于 $F_{1,3}$, 因为由式 (9.6.7), 知 $F^{[2]}_{0,3}=0$, 故由式 (9.6.10), 有

$$\begin{aligned}F_{1,3}&=F_{1,2}y_2+F_{2,1}y_4+F_{3,0}y_6,\\&=(y_2^2+2y_4)y_2+(4y_2)y_4+6y_6\\&=y_2^3+6y_2y_4+5y_6.\end{aligned}$$

例 9.6.1 平面 Euler 地图以根点次和顶点剖分向量为参数的根同构分类. 通过文献 [59](174~177 页) 所提供的平面 Euler 地图集合, 以根点次和顶点剖分向量为参数的分解, 可以验证定理 9.6.3 中的 $F_{m,s}$, 就给出了根顶点次为 $2m$ 和棱数为 $m+s$ 的平面 Euler 地图根同构类的数目.

在图 9.6.1 中, 提供了不大于 4 条棱的平面 Euler 地图的根同构类. 因为 $F_{m,0}$ ($m\geqslant 2$) 为 Catalan 数, 容易看出, 在图中没有展示. 这就是当无棱时, 只有一个顶点, $F_{0,0}=1$. 无需画其图形.

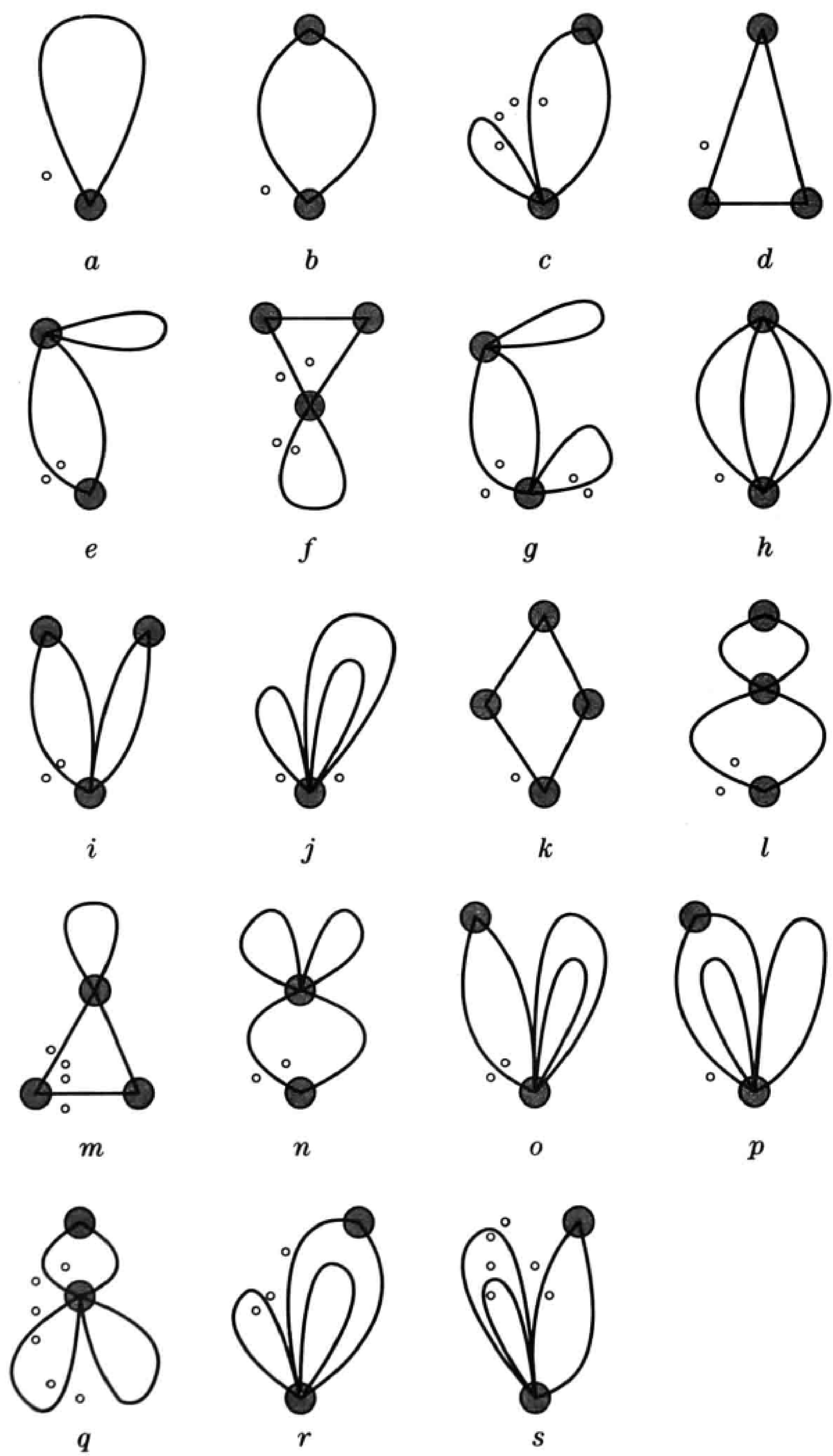


图 9.6.1　平面 Euler 地图依顶点剖分向量的根同构类

当只有一条棱时, $F_{1,0} = 1(a)$, 如图中 a 所示.

当有两条棱时, $F_{1,1} = y_2(b)$.

当有三条棱时, $F_{2,1} = 4y_2(c)$, $F_{1,2} = y_2^2(d) + 2y_4(e)$.

当有四条棱时, $F_{3,1} = 15y_2 = (6q + 3r + 6s)y_2$, $F_{2,2} = 6y_2^2 + 7y_4 = (4f + 2i)y_2^2 +$

$(4g+1h+2j)y_4$,

$$
\begin{aligned}
F_{1,3} &= (1k)y_2^3+(2l+4m)y_2y_4+(2n+2o+1p)y_6 \\
&= y_2^3+6y_2y_4+5y_6.
\end{aligned}
$$

9.7 无隔 Euler 内面型

在文献 [25] 或 [65](186 页) 中, 有方程

$$
\begin{cases}
f = x^2 + x^2 \displaystyle\int_y \frac{y^2\delta_{x^2,y^2}f\big|_{u=x^2}}{(1-\partial_{x^2,y^2}f\big|_{u=x^2})^2-(xy\delta_{x^2,y^2}f\big|_{u=x^2})^2}, \\
f\big|_{x=0\Rightarrow \boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = 0,
\end{cases} \tag{9.7.1}
$$

其中 $f\in\mathcal{F}$, $\boldsymbol{y}=(y_2,y_4,y_6,\cdots)$. 因为在方程 (9.7.1) 的第一式中没有 x 的奇次项, 故 f 是 x 的偶函数. 这就意味着, 用 $u=x^2$ 可将 f 变为一个仅含 u 而不含 x 的函数. 这时, 对任何整数 $m\geqslant 0$, 可记 $F_m=\partial_u^m f=\partial_x^{2m}f$.

先对方程式 (9.7.1) 进行等价变换, 使得求解便利.

令 $\tau=\delta_{x^2,y^2}f\big|_{u=x^2}$, $\Lambda=\partial_{x^2,y^2}f\big|_{u=x^2}$, 则

$$
\frac{\delta_{x^2,y^2}f\big|_{u=x^2}}{(1-\partial_{x^2,y^2}f\big|_{u=x^2})^2-(xy\delta_{x^2,y^2}f\big|_{u=x^2}))^2}=\frac{\tau}{(1-\Lambda)^2-(xy\tau)^2}. \tag{9.7.2}
$$

由

$$
\frac{1}{1-\Lambda-xy\tau}-\frac{1}{1-\Lambda+xy\tau}=\frac{2xy\tau}{(1-\Lambda)^2-(xy\tau)^2},
$$

有

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta_{x^2,y^2}f\big|_{u=x^2}}{(1-\partial_{x^2,y^2}f\big|_{u=x^2})^2-(xy\delta_{x^2,y^2}f\big|_{u=x^2}))^2} \\
&=\frac{1}{2xy}\Big(\frac{1}{1-\Lambda-xy\tau}-\frac{1}{1-\Lambda+xy\tau}\Big) \\
&=\frac{1}{2xy}\sum_{k\geqslant 1}\big((\Lambda+xy\tau)^k-(\Lambda-xy\tau)^k\big).
\end{aligned} \tag{9.7.3}
$$

由

$$
\begin{aligned}
(\Lambda+xy\tau)^k-(\Lambda-xy\tau)^k &= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\big(1-(-1)^j\big)(xy\tau)^j\Lambda^{k-j}\\
&=2\sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant k\\ j\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)}}\binom{k}{j}(xy\tau)^j\Lambda^{k-j}\\
&=2\sum_{r=0}^{\lfloor k/2\rfloor}\binom{k}{2r+1}(xy\tau)^{2r+1}\Lambda^{k-2r-1},
\end{aligned}
$$

即得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta_{x^2,y^2}f\big|_{u=x^2}}{(1-\partial_{x^2,y^2}f\big|_{u=x^2})^2-(xy\delta_{x^2,y^2}f\big|_{u=x^2})^2}\\
&\quad=\frac{1}{xy}\sum_{k\geqslant 1}\sum_{r=0}^{\lfloor k/2\rfloor}\binom{k}{2r+1}(xy\tau)^{2r+1}\Lambda^{k-2r-1}\\
&\quad=\sum_{k\geqslant 1}\sum_{r=0}^{\lfloor k/2\rfloor}\binom{k}{2r+1}(xy)^{2r}\tau^{2r+1}\Lambda^{k-2r-1}.
\end{aligned}
\tag{9.7.4}
$$

因为

$$
\begin{aligned}
\tau &= \sum_{i\geqslant 0}F_i\frac{x^{2i}-y^{2i}}{x^2-y^2}=\sum_{i\geqslant 0}F_i\sum_{j=0}^{i-1}x^{2j}y^{2(i-1)-2j}\\
&=\sum_{j\geqslant 0}\sum_{i\geqslant j+1}F_ix^{2j}y^{2(i-1)-2j},\\
\Lambda &= \sum_{i\geqslant 0}F_i\frac{y^2x^{2i}-x^2y^{2i}}{x^2-y^2}=x^2y^2\sum_{i\geqslant 0}F_{2i}\frac{x^{2(i-1)}-y^{2(i-1)}}{x^2-y^2}\\
&=x^2y^2\sum_{i\geqslant 0}F_i\sum_{j=0}^{i-2}x^{2j}y^{2(i-2)-2j}=x^2y^2\sum_{j\geqslant 0}\sum_{i\geqslant j+2}F_ix^{2j}y^{2(i-1)-2j}\\
&=\sum_{j\geqslant 0}\sum_{i\geqslant j+2}F_ix^{2(j+1)}y^{2(i-1)-2j},
\end{aligned}
$$

故若对于整数 $m\geqslant 1$(注意, $m=0$ 对于 $\delta_{x,y}$ 和 $\partial_{x,y}$ 无意义!), 令 $T_m=\partial_x^{2m}\tau=\left[\tau\right]_x^{2m}$, $P_m=\partial_x^{2m}\Lambda=\left[\Lambda\right]_x^{2m}$, 则利用方程式 (9.7.1) 的始条件 $F_0=0$, 有

$$
\begin{cases}
T_m=\displaystyle\sum_{i\geqslant m+1}F_iy^{2(i-1)-2m}=\sum_{i\geqslant m+1}F_iy^{2(i-m-1)},\\
P_m=\displaystyle\sum_{i\geqslant m+1}F_iy^{2(i-1)-2(m-1)}=\sum_{i\geqslant m+1}F_iy^{2(i-m)}.
\end{cases}
\tag{9.7.5}
$$

进而, 对于任何整数 $l \geqslant 1$, 记

$$L_l = \int_y \tau^l \quad 和 \quad \Delta_l = \int_y \Lambda^l. \tag{9.7.6}$$

定理 9.7.1 方程式 (9.7.1) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上与如下的方程等价:

$$\begin{cases} f = x^2 + x^2 \sum\limits_{k\geqslant 1} \sum\limits_{r=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \dbinom{k}{2r+1} x^{2r} \big(y_{2r+2} \otimes L_{2r+1} \otimes \Delta_{k-2r-1}\big), \\ f\big|_{x=0\Rightarrow \boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = 0, \end{cases} \tag{9.7.7}$$

其中 $\otimes$ 为 2.5 节对 $\mathcal{V}$ 中的向量所定义的卷积.

证明 将式 (9.7.4) 代入式 (9.7.1) 的第一式, 得

$$\begin{aligned} f &= x^2 + x^2 \int_y \sum_{k\geqslant 1} \sum_{r=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k}{2r+1} x^{2r} y^{2(r+1)} \tau^{2r+1} \Lambda^{k-2r-1} \\ &= x^2 + x^2 \sum_{k\geqslant 1} \sum_{r=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k}{2r+1} x^{2r} \int_y \big(y^{2(r+1)} \tau^{2r+1} \Lambda^{k-2r-1}\big) \\ &= x^2 + x^2 \sum_{k\geqslant 1} \sum_{r=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k}{2r+1} x^{2r} \big(y_{2(r+1)} \otimes L_{2r+1} \otimes \Delta_{k-2r-1}\big). \end{aligned}$$

这就是式 (9.7.7) 的第一式. 从而, 定理得证. □

因为对于任何整数 $r \geqslant 0$ 和 $m \geqslant 0$,

$$\big[\tau^{2r+1}\big]_x^{2m} = \begin{cases} \big[\tau\big]_x^{2m}, & r = 0, \\ \sum\limits_{i=0}^{m} \big[\tau^{2r}\big]_x^{2(m-i)} \big[\tau\big]_x^{2i}, & r \geqslant 1, \end{cases} \tag{9.7.8}$$

$$\big[\Lambda^{k-2r-1}\big]_x^{2m} = \begin{cases} \big[\Lambda\big]_x^{2m}, & r = \lfloor k/2 \rfloor, \\ \sum\limits_{i=0}^{m} \big[\Lambda^{k-2r-2}\big]_x^{2(m-i)} \big[\Lambda\big]_x^{2i}, & 0 \leqslant r \leqslant \lfloor k/2 \rfloor - 1, \end{cases} \tag{9.7.9}$$

由式 (9.7.5), 对于 $0 \leqslant r \leqslant \lfloor k/2 \rfloor$, 有

$$\begin{cases} \big[\tau^{2r+1}\big]_x^{2m} = \begin{cases} T_m, & r = 0, \\ \sum\limits_{i=0}^{m} \big[\tau^{2r}\big]_x^{2(m-i)} T_i, & 其他, \end{cases} \\ \\ \big[\Lambda^{k-2r-1}\big]_x^{2m} = \begin{cases} P_m, & r = \lfloor k/2 \rfloor, \\ \sum\limits_{i=0}^{m} \big[\Lambda^{k-2r-2}\big]_x^{2(m-i)} P_i, & 其他. \end{cases} \end{cases} \tag{9.7.10}$$

定理 9.7.2　方程式 (9.7.7) 与关于 $F_m \in \mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}(m \geqslant 0)$ 的方程组

$$F_m = \begin{cases} 0, & m=0, \\ \delta_{1,m} + \displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant r\leqslant \lfloor k/2\rfloor \\ k\geqslant 1}} \binom{k}{2r+1}\left(y_{2r+2}\otimes\left[L_{2r+1}\otimes\Delta_{k-2r-1}\right]_x^{2(m-1-r)}\right), & m>0 \end{cases} \tag{9.7.11}$$

等价, 其中 $\delta_{1,m}$ 是 Kronecker 记号, 即只有 $m=1$ 时, $\delta_{1,m}=1$; 否则总是 0. L_{2r+1} 和 Δ_{k-2r-1} 由式 (9.7.6) 给出.

证明　由方程式 (9.7.7), 得

$$F_m = \begin{cases} 0, & m=0, \\ 1+\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k\left(y_2\otimes\left[L_1\right]_x^0\otimes\left[\Delta_{k-1}\right]_x^0\right), & m=1, \\ \displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\sum_{r=0}^{\lfloor k/2\rfloor}\binom{k}{2r+1}\left(y_{2r+2}\otimes\left[L_{2r+1}\otimes\Delta_{k-2r-1}\right]_x^{2(m-1-r)}\right), & m\geqslant 2. \end{cases}$$

对于任何整数 $m \geqslant 2$, 有

$$F_m = \sum_{k\geqslant 1}\sum_{r=0}^{\lfloor k/2\rfloor}\binom{k}{2r+1}\left(y_{2r+2}\otimes\left[L_{2r+1}\otimes\Delta_{k-2r-1}\right]_x^{2(m-1-r)}\right).$$

当 $m=1$ 时, 只能 $r=0$, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{k\geqslant 1}\sum_{r=0}^{\lfloor k/2\rfloor}\binom{k}{2r+1}\left(y_{2r+2}\otimes\left[L_{2r+1}\otimes\Delta_{k-2r-1}\right]_x^{2(m-1-r)}\right)\\ &\quad=\sum_{k\geqslant 1}k\left(y_2\otimes\left[L_1\otimes\Delta_{k-1}\right]_x^0\right)=\sum_{k\geqslant 1}k\left(y_2\otimes\left[L_1\right]_x^0\otimes\left[\Delta_{k-1}\right]_x^0\right).\end{aligned}$$

从而, 即得欲证的结论. □

为了能确定 F_{2m} $(m \geqslant 1)$, 必须再引进一个参数 s, 使得对于任何给定的整数 m, $s \geqslant 0$, $F_{m,s} \in \mathcal{R}[\boldsymbol{y}]$, 并且

$$F_m = \sum_{s\geqslant 0} F_{m,s}. \tag{9.7.12}$$

这里, 对于 F_m 的任何幂向量 $\boldsymbol{n}$, 取 $s=\pi(\boldsymbol{n})/2$, $\pi(\boldsymbol{n})$ 即 $\boldsymbol{n}$ 的内度.

先讨论 $s=0$ 时的情形. 因为由方程式 (9.7.1) 的始条件, $F_0=0$, 所以 $F_{0,m}=0$ $(m \geqslant 0)$, 只需考虑 $m \geqslant 1$ 时的情形.

引理 9.7.1 当 $s=0$ 时, 对于任何整数 $m\geqslant 1$, 有

$$F_{m,0}=\begin{cases}1, & m=1,\\ 0, & m>1.\end{cases} \tag{9.7.13}$$

证明 因为对于任何整数 $m\geqslant 1$, 都有

$$s\big(y_{2r+2}\otimes\big[L_{2r+1}\otimes\Delta_{k-2r-1}\big]_x^{2(m-1-r)}\big)\geqslant s(y_{2r+2})\geqslant s(y_2)=1,$$

由式 (9.7.11), 即得欲证的结论. □

引理 9.7.2 当 $m=1$ 时, 对于任何整数 $s\geqslant 0$, 有

$$F_{1,s}=\begin{cases}1, & s=0,\\ y_2\otimes\displaystyle\sum_{k=1}^{s}k\Big[\big[L_1\otimes\Delta_{k-1}\big]_x^0\Big]_{\boldsymbol{y}}^{s-1}, & s>0.\end{cases} \tag{9.7.14}$$

证明 利用式 (9.7.11) 的第二式, 得

$$\begin{aligned}F_{1,s}&=\Big[1+\sum_{\substack{0\leqslant r\leqslant\lfloor k/2\rfloor\\ k\geqslant 1}}\binom{k}{2r+1}\big(y_{2r+2}\otimes\big[L_{2r+1}\otimes\Delta_{k-2r-1}\big]_x^{2(-r)}\big)\Big]_{\boldsymbol{y}}^{s}\\&=\Big[1+\sum_{k\geqslant 1}k\big(y_2\otimes\big[L_1\otimes\Delta_{k-1}\big]_x^0\big)\Big]_{\boldsymbol{y}}^{s}\\&=\delta_{0,s}+\sum_{k\geqslant 1}k\Big[\big(y_2\otimes\big[L_1\otimes\Delta_{k-1}\big]_x^0\big)\Big]_{\boldsymbol{y}}^{s}\\&=\delta_{0,s}+\sum_{k\geqslant 1}k\Big(y_2\otimes\Big[\big[L_1\otimes\Delta_{k-1}\big]_x^0\Big]_{\boldsymbol{y}}^{s-1}\Big)\\&=\delta_{0,s}+\Big(y_2\otimes\sum_{k\geqslant 1}k\Big[\big[L_1\otimes\Delta_{k-1}\big]_x^0\Big]_{\boldsymbol{y}}^{s-1}\Big).\end{aligned}$$

因为 $s\big(\Big[y_2\otimes\big[L_1\otimes\Delta_{k-1}\big]_x^0\Big]_{\boldsymbol{y}}^s\big)\geqslant 1$, 故 s 不能为 0, 由此导致当 $s=0$ 时, 上式括号内的项不存在, 即为 0. 从而 $F_{1,0}=\delta_{0,0}=1$.

对于 $s\geqslant 1$, 由 $\delta_{0,s}=0$, 有

$$F_{m,s}=y_2\otimes\sum_{k\geqslant 1}k\Big[\big[L_1\otimes\Delta_{k-1}\big]_x^0\Big]_{\boldsymbol{y}}^{s-1}.$$

计算得

$$\begin{aligned}\Big[\big[L_1\otimes\Delta_{k-1}\big]_x^0\Big]_{\boldsymbol{y}}^{s-1}&=\Big[\big[L_1\big]_x^0\otimes\big[\Delta_{k-1}\big]_x^0\Big]_{\boldsymbol{y}}^{s-1}\\&=\sum_{l=0}^{s-1}\Big[\big[L_1\big]_x^0\Big]_{\boldsymbol{y}}^{l}\otimes\Big[\big[\Delta_{k-1}\big]_x^0\Big]_{\boldsymbol{y}}^{s-1-l}.\end{aligned}$$

考虑到当 $k-1 \geqslant (s-1)+1$, 即 $k \geqslant s+1$ 时, 上式为 0, 从而

$$\Big[y_2 \otimes \big[L_1 \otimes \Delta_{k-1}\big]_x^0\Big]_{\boldsymbol{y}}^s = 0,$$

即得欲证的结论. □

当 $m+s \leqslant 2$ 时, 看一看如何求 $F_{m,s}$. 当 $0 \leqslant m+s \leqslant 1$ 时, 由引理 9.7.1 和引理 9.7.2, 知 $F_{0,s}=0$ $(s \geqslant 0)$, 以及 $F_{1,0}=1$. 当 $m+s=2$ 时, 只需确定 $F_{2,0}$ 和 $F_{1,1}$. 对于前者, 由引理 9.7.1, 知 $F_{2,0}=0$. 对于后者, 由引理 9.7.2, 知

$$F_{1,1} = \sum_{k=1}^{1} k\big[\big[L_1 \otimes \Delta_{k-1}\big]_x^0\big]_{\boldsymbol{y}}^0 \otimes y_2 = \big(\big[\big[L_1\big]_x^0\big]_{\boldsymbol{y}}^0 \otimes \big[\big[\Delta_0\big]_x^0\big]_{\boldsymbol{y}}^0\big) \otimes y_2.$$

由式 (9.7.6), 知

$$L_1 = \int_y \tau = \sum_{m \geqslant 0} \Big(\sum_{i \geqslant m+1} F_i y_{2(i-1)-2m} \Big) x^{2m}.$$

从而有

$$\big[L_1\big]_x^0 = \sum_{i \geqslant 1} F_i y_{2(i-1)} \quad \Rightarrow \quad \big[\big[L_1\big]_x^0\big]_{\boldsymbol{y}}^0 = F_{1,0} y_0 = 0.$$

同理, 由式 (9.7.6), 有

$$\Delta_0 = \int_y \Lambda^0 = 1,$$

从而有

$$\big[\Delta_0\big]_x^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \big[\big[\Delta_0\big]_x^0\big]_{\boldsymbol{y}}^0 = 0.$$

因此得 $F_{1,1} = y_2$.

引理 9.7.3 对于任何整数 $m \geqslant 2$ 和 $s \geqslant 1$, 有

$$F_{m,s} = \sum_{\substack{0 \leqslant r \leqslant \langle \lfloor k/2 \rfloor, s-1 \rangle \\ 1 \leqslant k \leqslant \langle s, 2m-1 \rangle}} \binom{k}{2r+1} \bigg(y_{2r+2} \otimes \Big[\big[L_{2r+1} \otimes \Delta_{k-2r-1}\big]_x^{2(m-1-r)} \Big]_{\boldsymbol{y}}^{s-r-1} \bigg), \tag{9.7.15}$$

其中对于任何整数 $a, b \in \mathbb{Z}_+$, $\langle a, b \rangle = \min\{a, b\}$.

证明 根据式 (9.7.11), 对于任何整数 $m \geqslant 2$ 和 $s \geqslant 1$, 有

$$\begin{aligned} F_{m,s} &= \Big[\sum_{\substack{0 \leqslant r \leqslant \lfloor k/2 \rfloor \\ k \geqslant 1}} \binom{k}{2r+1} \big(y_{2r+2} \otimes \big[L_{2r+1} \otimes \Delta_{k-2r-1}\big]_x^{2(m-1-r)} \big) \Big]_{\boldsymbol{y}}^s \\ &= \sum_{\substack{0 \leqslant r \leqslant \lfloor k/2 \rfloor \\ k \geqslant 1}} \binom{k}{2r+1} \Big[\big(y_{2r+2} \otimes \big[L_{2r+1} \otimes \Delta_{k-2r-1}\big]_x^{2(m-1-r)} \big) \Big]_{\boldsymbol{y}}^s. \end{aligned}$$

用与引理 9.7.2 证明中相仿的讨论, 当 $k \geqslant s+1$ 时, 有

$$\left[\left(y_{2r+2} \otimes \left[L_{2r+1} \otimes \Delta_{k-2r-1}\right]_x^{2(m-1-r)}\right)\right]_{\boldsymbol{y}}^s = 0 \quad \Rightarrow \quad k \leqslant s.$$

再考虑到 $m-1-r \geqslant 0 \Rightarrow m-1-\lfloor k/2 \rfloor \geqslant 0 \Rightarrow k \leqslant 2m-1$, $s-r-1 \geqslant 0 \Rightarrow r \leqslant s-1$, 即可得欲证的结论. □

在上面所得结论的基础上, 就可以讨论方程式 (9.7.1) 定性理论的论证.

定理 9.7.3 方程式 (9.7.1) 在 $\mathcal{R}\{x, \boldsymbol{y}\} - \{x^{2l+1}, y_{2l+1} | l \geqslant 0\}$ 中有且仅有一个解.

证明 在定理 9.7.2 的基础上, 对于任何整数 $m, s \geqslant 0$, 按 $m+s$ 从 0 开始, 由小到大递增的次序, 确定所有 $F_{m,s}$. 在前面的计算中, 已经得到 $m+s \leqslant 2$ 时的情形. 对于 $m+s \geqslant 3$ 时的一般情形, 我们假设对于任何整数 a 和 b, 只要 $a+b \leqslant m+s-1$, $F_{a,b}$ 就已经被确定. 用数学归纳法, 往证 $F_{m,n}$. 因为从式 (9.7.14) 和式 (9.7.15), 可以看出 $F_{m,n}$ 只与 $F_{a,b}$ $(a+b \leqslant m+s-1)$ 有关. 由归纳假设, 常确定 $F_{m,n}$. 因为所有这些 $F_{m,n}$ 形成方程组式 (9.7.11) 的一组解, 由定理 9.7.1 和定理 9.7.2, 并注意到 $F_{m,n} \in \mathcal{R}\{x, \boldsymbol{y}\} - \{x^{2l+1}, y_{2l+1} | l \geqslant 0\}$, 故方程式 (9.7.1) 有解.

考虑到上述求 $F_{m,s}$ $(m, s \geqslant 0)$ 的过程对始条件的唯一性, 这个解是仅有的. □

为了得到方程式 (9.7.1) 解的比较简单的形式, 还需要对这个解的结构作进一步的讨论.

引理 9.7.4 任给一个整数 $s \geqslant 1$. 对于任何整数 $m \geqslant s+1$, 有 $F_{m,s} = 0$.

证明 对于 $m+s \leqslant 2$, 从上面的计算可以看出, 与欲证的结论一致. 对于 $m+s \geqslant 3$ 时的一般情形, 我们假设对于任何整数 $a \geqslant 2$ 和 $b \geqslant 1$, 使得 $a+b \leqslant m+s-1$, 只要 $a \geqslant b+1$, 就有 $F_{a,b} = 0$. 用数学归纳法, 往证只要 $m \geqslant s+1$, 就有 $F_{m,n} = 0$.

在式 (9.7.15) 的基础上, 利用归纳假设, 当 $m \geqslant s+1$ 时, 与引理 9.6.3 的证明中相仿, 有

$$y_{2r+2} \otimes \left[\left[L_{2r+1} \otimes \Delta_{k-2r-1}\right]_x^{2(m-1-r)}\right]_{\boldsymbol{y}}^{s-r-1} = 0,$$

所以 $F_{m,s} = 0$. □

这个引理启示我们, 对任何给定的整数 $k \geqslant 1$, 由式 (9.7.1) 的始条件和引理 9.7.1, 不必求所有 $F_{m,s}$ $(\forall m, s \geqslant 0,\ m+s = k)$, 只考虑 $F_{m+s-i, s+i(\lceil (m+s)/2 \rceil \leqslant i \leqslant m-1)}$ 就够了.

事实上, 由于有了定理 9.7.3, 又从组合地图计数理论中知道, 不可分离 Euler 平面地图, 以根点次和顶点剖分向量为参数的计数函数, 满足方程式 (9.7.1). 下面的引理都借助组合地图理论证明, 以减少篇幅. 例如, 因为两条棱以上的不可分离地图不含自环, 故不与根关联的半棱数 $(2s)$ 不会少于与根关联的半棱数 $(2m)$. 从而, 当 $m \geqslant s+1$ 时, 必有 $F_{m,s}=0$. 这就是引理 9.7.4 的结论.

引理 9.7.5　对于任何整数 $m \geqslant 1$, 有 $F_{m,m}=y_{2m}$.

证明　虽然在式 (9.7.15) 的基础上, 从方程本身的结构直接证明, 但用组合地图理论尤其简单. 由不可分离性, 因为 $m \geqslant 1$, 故根点次为 $2m$、非根点次和为 $2m$ 的不可分离 Euler 地图只有一个, 即为 $2m$–束. 这就是 $F_{m,m}=y_{2m}$. 从而引理得证. □

当 $m=1$ 时, 对于 $s \geqslant 0$, 虽然引理 9.7.2 提供了 $F_{1,s}$ 的表达式, 下面的引理却给出了其中一个特殊项的准确系数.

引理 9.7.6　令 $F_{1,s}\big|_{y_2}^{s}$ 为在 $F_{1,s}$ 中项 $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}=y_2^s$ 的系数, 则对于任何整数 $s \geqslant 1$, 都有 $F_{1,s}\big|_{y_2}^{s}=1$.

证明　因为根点次为 2、非根节点数为 s 且所有非根节点的次都是 2 的不可分离 Euler 地图只有一个, 即为一个 s–圈. 这就是 $F_{1,s}\big|_{y_2}^{s}=1$. 从而引理得证. □

在已有结果的基础上, 可以表述方程式 (9.7.1) 解的正项和形式.

定理 9.7.4　令方程式 (9.7.1) 的解为 $f=f_{\mathrm{niE}}$, 则对任何整数 $m,\ s \geqslant 0$, $F_{m,s}^{\mathrm{niE}}=\left[\partial_x^m f_{\mathrm{niE}}\right]_{\boldsymbol{y}}^{s}=F_{m,s}$ 有如下有限正项和表达式:

$$
F_{m,s}^{\mathrm{niE}}=\begin{cases}
0, & s \geqslant 0,\ m=0 \text{ 或 } s \leqslant m-1,\ m \geqslant 2,\\
1, & m=1, s=0,\\
y_2^s, & m=1, \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}=y_2^s,\\
y_2 \otimes \displaystyle\sum_{k=1}^{s} k\Big[\big[L_1 \otimes \Delta_{k-1}\big]_x^0\Big]_{\boldsymbol{y}}^{s-1}, & m=1, \text{其他}\\
y_{2m}, & m=s \geqslant 2,\\
\displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant r \leqslant \langle \lfloor k/2 \rfloor, s-1\rangle\\ 1 \leqslant k \leqslant \langle s, 2m-1\rangle}} \binom{k}{2r+1}\Big(y_{2r+2} \otimes \Big[\big[L_{2r+1} \otimes \Delta_{k-2r-1}\big]_x^{2(m-1-r)}\Big]_{\boldsymbol{y}}^{s-r-1}\Big), \text{其他}
\end{cases}
\tag{9.7.16}
$$

其中 L 和 Δ 已由式 (9.7.6) 给出.

证明　当 $s \geqslant 0$, $m=0$ 或 $s \leqslant m-1$, $m \geqslant 2$ 时, 结果分别由方程式 (9.7.1) 的始条件, 或引理 9.7.4 给出. 当 $m=1$ 时, 结果由引理 9.7.2 和引理 9.7.6 给出. 当

$m=s\geqslant 2$ 时, 结果由引理 9.7.5 给出. 其他情形由式 (9.7.15) 给出. □

再看一看 $m+s=3$ 时的情形. 当 $m+s=3$ 时, 需要确定 $F_{3,0},F_{2,1}$ 和 $F_{1,2}$. 由引理 9.7.1, 知 $F_{3,0}=0$. 由式 (9.7.11), 知

$$F_{2,1}=\left[y_2\otimes\left[L_1\otimes\Delta_0\right]_x^2\right]_{\boldsymbol{y}}^1.$$

由

$$L_1=\sum_{j\geqslant 0}\sum_{i\geqslant j+1}F_iy_{2(i-1)-2j}x^{2j},$$

$\Delta_0=0$, 有 $\left[L_1\otimes\Delta_0\right]_x^2=\left[L_1\right]_x^2$, 由于不含 y_0, 即得

$$\left[L_1\right]_x^2=\sum_{i\geqslant 3}F_iy_{2i-4}.$$

由于

$$y_2\otimes\left(\sum_{i\geqslant 3}F_iy_{2i-4}\right)=\sum_{i\geqslant 3}F_iy_{2i-2},$$

且当 $i=3$ 时, $(2i-2)/2=2>1$, 所以有

$$\left[\sum_{i\geqslant 3}F_iy_{2i-2}\right]_{\boldsymbol{y}}^1=0.$$

从而, $F_{2,1}=0$.

对于 $F_{1,2}$, 由于式 (9.7.14), 有

$$F_{1,2}=\sum_{k=1}^{2}k\left[\left[L_1\otimes\Delta_{k-1}\right]_x^0\right]_{\boldsymbol{y}}^1\otimes y_2=\left(\left[\left[L_1\otimes\Delta_0\right]_x^0\right]_{\boldsymbol{y}}^1\otimes y_2\right)+2\left(\left[\left[L_1\otimes\Delta_1\right]_x^0\right]_{\boldsymbol{y}}^1\otimes y_2\right).$$

因为 $\left[L_1\otimes\Delta_0\right]_x^0=\left[L_1\right]_x^0\otimes\left[\Delta_0\right]_x^0$, $\left[L_1\otimes\Delta_1\right]_x^0=\left[L_1\right]_x^0\otimes\left[\Delta_1\right]_x^0$, 以及

$$\begin{cases}\left[L_1\right]_x^0=\sum\limits_{i\geqslant 1}F_iy_{2(i-1)},\\ \left[\Delta_0\right]_x^0=0,\\ \left[\Delta_1\right]_x^0=\sum\limits_{i\geqslant 2}F_iy_{2(i-1)},\end{cases}$$

所以 $\left[\left[L_1\right]_x^0\right]_{\boldsymbol{y}}^0=0$(不含 y_0), $\left[\left[L_1\right]_x^0\right]_{\boldsymbol{y}}^1=F_{2,0}y_2=0$(由 $F_{2,0}=0$), $\left[\left[\Delta_1\right]_x^0\right]_{\boldsymbol{y}}^0=0$, $\left[\left[\Delta_1\right]_x^0\right]_{\boldsymbol{y}}^1=F_{2,0}y_2=0$(由 $F_{2,0}=0$). 如此下去, 最终可得 $F_{1,2}=y_2^2$.

例 9.7.1　不可分离 Euler 平面地图以根点次和顶点剖分向量为参数的根同构分类. 在文献 [40] 中, 讨论了以根面次和度 (即棱数) 为参数的不可分离平面偶地图的非根同构的数目. 用 $F_i(y)$ 表示具有 i 条棱的计数函数, 得到

$$\begin{cases} F_1(y)=F_2(y)=F_3(y)=y^2, \\ F_4(y)=y^2+y^4, \\ F_5(y)=2y^2+4y^4, \\ F_6(y)=6y^2+12y^4+y^6, \end{cases}$$

其中 y 的幂表示根面次. 由地图的平面对偶性, $F_i(y)$ 也是具有 i 条棱的不可分离 Euler 平面地图以根点次为参数的非根同构类数的计数函数. 用图 9.7.1 验证 $F_{m,s}$ 给出了 $m+s$ 条棱、根点次为 $2m$、以顶点剖分向量为参数、不可分离 Euler 平面地图的根同构类数的计数函数. 这就是

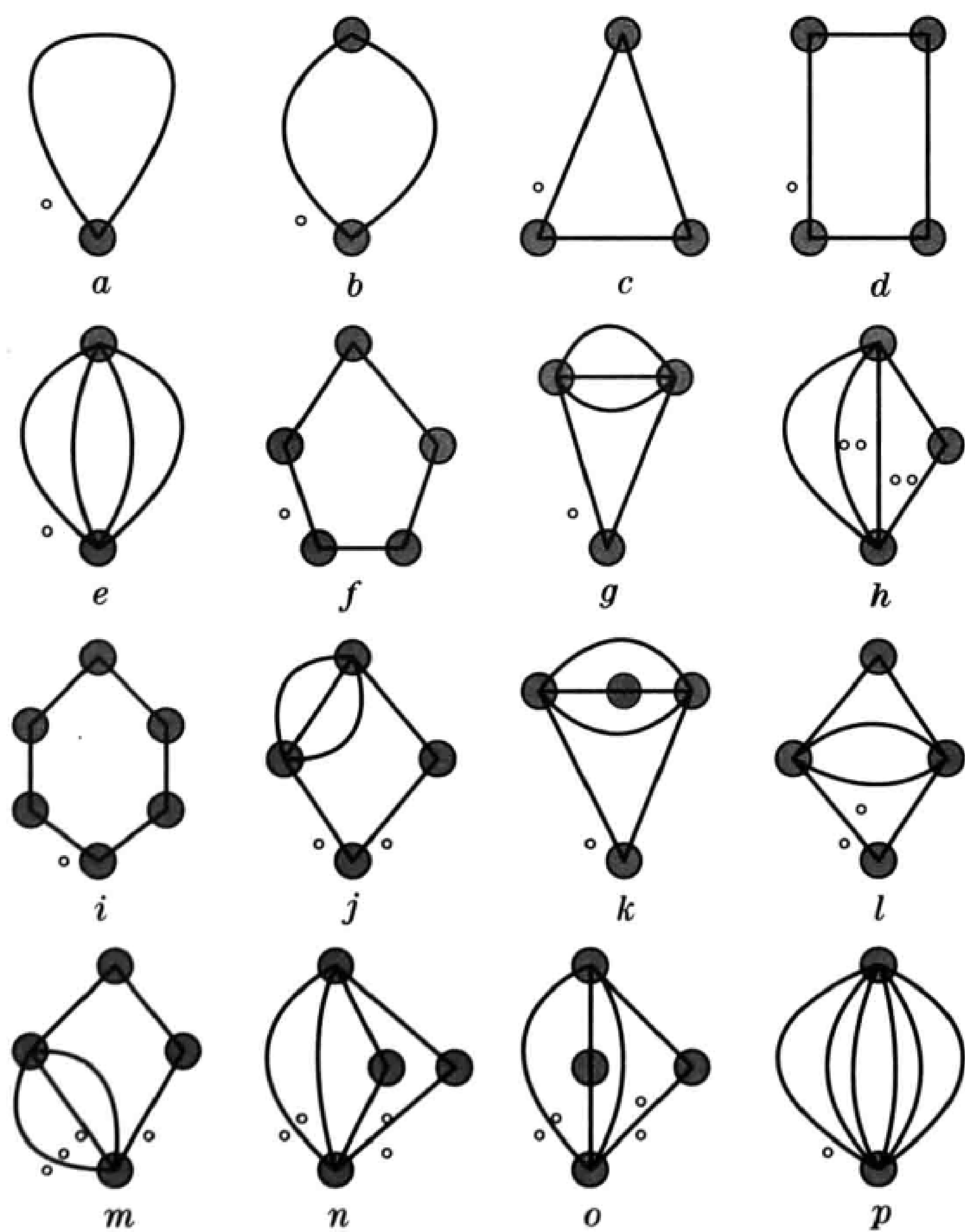


图 9.7.1　不可分离 Euler 平面地图依顶点剖分向量的根同构类

$$\begin{cases}\text{当 } m+s=1 \text{ 时}, F_{1,0}=1(a)=1,\\ \text{当 } m+s=2 \text{ 时}, F_{2,0}=0,\ F_{1,1}=1(b)=y_2,\\ \text{当 } m+s=3 \text{ 时}, F_{3,0}=F_{2,1}=0,\ \ F_{1,2}=1(c)=y_2^2,\\ \text{当 } m+s=4 \text{ 时}, F_{4,0}=F_{3,1}=0,\ F_{2,2}=1(e)=y_4,\\ \qquad\qquad\qquad F_{1,3}=1(d)=y_2^3,\\ \text{当 } m+s=5 \text{ 时}, F_{5,0}=F_{4,1}=F_{3,2}=0,\ F_{2,3}=4(h)=4y_2y_4,\\ \qquad\qquad\qquad F_{1,4}=1(f)+1(g)=y_2^4+y_4^2,\\ \text{当 } m+s=6 \text{ 时}, F_{6,0}=F_{5,1}=F_{4,2}=0,\ F_{3,3}=1(p)=y_6,\\ \qquad\qquad\qquad F_{2,4}=4(m)+4(n)+4(o)=12y_2^2y_4,\\ \qquad\qquad\qquad F_{1,5}=1(i)+2(j)+1(k)+2(l)=1y_2^5+5y_2y_4^2.\end{cases}$$

9.8 无环 Euler 内面型

讨论方程

$$\begin{cases} f=\int_y \dfrac{1-\partial_{x^2,y^2}(uf\big|_{u=x^2})}{1-2\partial_{x^2,y^2}(uf\big|_{u=x^2})-x^2y^2\delta_{x^2,y^2}(uf\big|_{u=x^2}^2)},\\ f\big|_{x=0\Rightarrow \boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=1,\end{cases} \tag{9.8.1}$$

其中 $f\in\mathcal{F}$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3,\cdots)$.

在文献 [25] 或 [65](186 页) 中, 可见到方程 (9.8.1) 的第一式或它的等价形式.

因为在方程式 (9.8.1) 中没有出现 x 的奇次方, 故 f 是 x 的偶函数. 同样, 在方程式 (9.8.1) 中没有出现 y 的奇次方, 故 f 与 y_{2i+1} $(i\geqslant 0)$ 无关.

为了推演方便, 下面引进一些必要的记号. 令

$$\begin{cases} p=\partial_{x^2,y^2}(uf\big|_{u=x^2}),\\ q=\delta_{x^2,y^2}(uf^2\big|_{u=x^2}).\end{cases} \tag{9.8.2}$$

若记

$$\Lambda=\frac{1-\partial_{x^2,y^2}(uf\big|_{u=x^2})}{1-2\partial_{x^2,y^2}(uf\big|_{u=x^2})-x^2y^2\delta_{x^2,y^2}(uf\big|_{u=x^2}^2)},$$

则由式 (9.8.2), 有

$$\begin{aligned}\Lambda &= \frac{1-p}{1-2p-x^2y^2q} = 1+\frac{p+x^2y^2q}{1-2p-x^2y^2q}\\ &= 1+(p+x^2y^2q)\sum_{k\geqslant 0}(2p+x^2y^2q)^k\\ &= 1+(p+x^2y^2q)\sum_{k\geqslant 0}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(2p)^i(x^2y^2q)^{k-i}\\ &= 1+\sum_{k\geqslant 0}\Big(\sum_{i=0}^{k}\frac{2^ik!}{i!(k-i)!}x^{2(k-i)}y^{2(k-i)}p^{i+1}q^{k-i}\\ &\quad +\sum_{i=0}^{k}\frac{2^ik!}{i!(k-i)!}x^{2(k-i+1)}y^{2(k-i+1)}p^iq^{k-i+1}\Big).\end{aligned}$$

在第一个对 i 的求和中, $i=k$ 的项为 2^kp^{k+1}. 在第二个对 i 的求和中, $i=0$ 的项为

$$x^{2(k+1)}y^{2(k+1)}q^{k+1},$$

其余的总和为

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{k}\frac{2^ik!}{i!(k-i)!}x^{2(k-i+1)}y^{2(k-i+1)}p^iq^{k-i+1}\\ &\quad=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{2^{i+1}k!}{(i+1)!(k-i-1)!}x^{2(k-i)}y^{2(k-i)}p^{i+1}q^{k-i}.\end{aligned}$$

从而, 通过合并同类项, 得

$$\Lambda = 1+\sum_{k\geqslant 0}\Big(2^kp^{k+1}+x^{2(k+1)}y^{2(k+1)}q^{k+1}+\sum_{i=0}^{k-1}a_{k,i}x^{2(k-i)}y^{2(k-i)}p^{i+1}q^{k-i}\Big),$$

其中

$$a_{k,i}=2^i\binom{k}{i}+2^{i+1}\binom{k}{i+1}=\frac{(2k-i+1)2^ik!}{(i+1)!(k-i)!}\in\mathcal{R}_+. \tag{9.8.3}$$

定理 9.8.1　方程式 (9.8.1) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中有如下等价形式:

$$\begin{cases} f=1+\sum_{k\geqslant 0}\Big(2^kP^{[k+1]}+x^{2(k+1)}\big(y_{2(k+1)}\otimes Q^{[k+1]}\big)\\ \qquad +\sum_{i=0}^{k-1}a_{k,i}x^{2(k-i)}\big(y_{2(k-i)}\otimes P^{[i+1]}\otimes Q^{[k-i]}\big)\Big),\\ f\big|_{x=0\Rightarrow \boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=1,\end{cases} \tag{9.8.4}$$

其中对于整数 $k \geqslant 0$, $k-1 \geqslant i \geqslant 0$, $a_{k,i}$ 由式 (9.8.3) 给出, 对于整数 $l \geqslant 1$,

$$\begin{cases} P^{[l]} = P^{[l-1]} \otimes P, & P = \int_y p, \\ Q^{[l]} = Q^{[l-1]} \otimes Q, & Q = \int_y q, \end{cases}$$

使得 p 与 q 分别由式 (9.8.2) 的第一式与第二式给出.

证明 在方程式 (9.8.1) 的基础上, 将式 (9.8.2) 代入式 (9.8.1) 的第一式, 得

$$\begin{aligned} f &= \int_y \frac{1-p}{1-2p-x^2y^2q} \\ &= 1 + \sum_{k\geqslant 0} \int_y \Big(2^k p^{k+1} + x^{2(k+1)} y^{2(k+1)} q^{k+1} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(2k-i+1)2^i k!}{(i+1)!(k-i)!} x^{2(k-i)} y^{2(k-i)} p^{i+1} q^{k-i} \Big), \\ &= 1 + \sum_{k\geqslant 0} \Big(2^k P^{[k+1]} + x^{2(k+1)} (y_{2(k+1)} \otimes Q^{[k+1]}) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(2k-i+1)2^i k!}{(i+1)!(k-i)!} x^{2(k-i)} (y_{2(k-i)} \otimes P^{[i+1]} \otimes Q^{[k-i]}) \Big), \end{aligned}$$

其中用到

$$\frac{(2k-i+1)2^i k!}{(i+1)!(k-i)!} = 2^i \binom{k}{i} + 2^{i+1} \binom{k}{i+1}.$$

从而导出欲证的结论. □

在定理 9.8.1 的基础上, 又可将方程式 (9.8.1) 转化为等价的一个关于 F_m $(m \geqslant 0)$ 的无穷维方程组. 为了简便, 对于 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上 x 的一个偶函数 g, 引进一些记号. 对于任何整数 $m \geqslant 0$,

$$G_m = [g]_{x^2}^m = \partial_{x^2}^m g. \tag{9.8.5}$$

因为 $f \in \mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 是 x 的偶函数, 所以 $p \in \mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 和 $q \in \mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 都是 x 的偶函数, 从而根据式 (9.8.5), 可知 F_m, P_m 和 Q_m 的意义.

对于任何整数 $k \geqslant 1$,

$$G_m^{[k]} = [g^k]_{x^2}^m = \partial_{x^2}^n g^k. \tag{9.8.6}$$

当然, $G_m^{[1]} = G_m$.

引理 9.8.1 对于任何整数 $k \geqslant 1$, 如果非负整数 $m \leqslant k-1$, 则 $P_m^{[k]} = 0$.

证明 首先, 由式 (9.8.2) 可知, 当 $k=1$ 时, $P_0=0$. 对于 $k\geqslant 2$, 可以假设 $P_m^{[k-1]}=0\ (m\leqslant k-2)$. 用数学归纳法, 往证 $P_m^{[k]}=0\ (m\leqslant k-1)$. 因为

$$P_m^{[k]}=\sum_{i=0}^{m}P_{m-i}^{[k-1]}P_i=\sum_{i=1}^{m}P_{m-i}^{[k-1]}P_i,$$

且 $m\leqslant k-1\Rightarrow m-1\leqslant k-2$, 利用归纳假设, 知 $P_{m-i}^{[k-1]}=0\ (m\geqslant i\geqslant 1)$, 从而 $P_m^{[k]}=0\ (m\leqslant k-1)$. □

引理 9.8.2 对于任何整数 $k\geqslant 1$, 如果非负整数 $m\leqslant k-1$, 则 $Q_m^{[k]}=0$.

证明 首先, 由式 (9.8.2) 可知, 当 $k=1$ 时, $Q_0=0$. 对于 $k\geqslant 2$, 可以假设 $Q_m^{[k-1]}=0\ (m\leqslant k-2)$. 用数学归纳法, 往证 $Q_m^{[k]}=0\ (m\leqslant k-1)$. 因为

$$Q_m^{[k]}=\sum_{i=0}^{m}Q_{m-i}^{[k-1]}Q_i=\sum_{i=1}^{m}Q_{m-i}^{[k-1]}Q_i,$$

以及 $m\leqslant k-1\Rightarrow m-1\leqslant k-2$, 利用归纳假设, 知 $Q_{m-i}^{[k-1]}=0\ (m\geqslant i\geqslant 1)$, 从而 $Q_m^{[k]}=0\ (m\leqslant k-1)$. □

定理 9.8.2 关于 $F_m\ (m\geqslant 0)$ 的方程组

$$F_m=\begin{cases}1, \quad m=0,\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}2^kP_m^{[k+1]}+\sum_{k=0}^{\lfloor m/2\rfloor-1}(y_{2(k+1)}\otimes Q_{m-k-1}^{[k+1]})\\ \quad\displaystyle+\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=0}^{k-1}a_{k,i}\left(y_{2(k-i)}\otimes R_{m-k+i}^{[k+1]}\right), \quad m>1,\end{cases}\tag{9.8.7}$$

其中 $a_{k,i}\in\mathcal{R}_+$ 在定理 9.8.1 中给出,

$$R_{m-k+i}^{[k+1]}=\sum_{j=k-i}^{m-2k-1}\left(P_{m-k+i-j}^{[k+1]}\otimes Q_j^{[k-i]}\right),$$

在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上与方程式 (9.8.1) 等价.

证明 在定理 9.8.1 的基础上, 由始条件, 当 $m=0$ 时, $F_0=1$; 当 $m\geqslant 1$ 时,

$$\begin{aligned}F_m=&\sum_{k\geqslant 0}2^kP_m^{[k+1]}+\sum_{k\geqslant 0}(y_{2(k+1)}\otimes Q_{m-k-1}^{[k+1]})\\&+\sum_{k\geqslant 0}\sum_{i=0}^{k-1}a_{k,i}\left(y_{2(k-i)}\otimes\left[P^{[i+1]}\otimes Q^{[k-i]}\right]_{x^2}^{m-k+i}\right).\end{aligned}$$

由引理 9.8.1, 对于 $P_m^{[k+1]}$, 只需考虑 $m \geqslant k+1$, 即 $k \leqslant m-1$. 从而

$$\sum_{k\geqslant 0} 2^k P_m^{[k+1]} = \sum_{k=0}^{m-1} 2^k P_m^{[k+1]}.$$

由引理 9.8.2, 对于 $Q_{m-k-1}^{[k+1]}$, 只需考虑 $m-k-1 \geqslant k+1$, 即 $2k \leqslant m-2$. 从而

$$\sum_{k\geqslant 0}\left(y_{2(k+1)} \otimes Q_{m-k-1}^{[k+1]}\right) = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2\rfloor -1}\left(y_{2(k+1)} \otimes Q_{m-k-1}^{[k+1]}\right).$$

因为

$$\begin{aligned}
\left[P^{[i+1]} \otimes Q^{[k-i]}\right]_{x^2}^{m-k+i} &= \sum_{j=0}^{m-k+i} P_{m-k+i-j}^{[i+1]} \otimes Q_j^{[k-i]} \quad (\text{引理 } 9.8.1)\\
&= \sum_{j=0}^{m-2k-1} P_{m-k+i-j}^{[i+1]} \otimes Q_j^{[k-i]} \quad (\text{引理 } 9.8.2)\\
&= \sum_{j=k-i}^{m-k-1} P_{m-k+i-j}^{[i+1]} \otimes Q_j^{[k-i]}\\
&= R_{m-k+i}^{[k+1]},
\end{aligned}$$

由 $m-k-1 \geqslant 0$, 即 $k \leqslant m-1$, 最后一个无穷和为

$$\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=0}^{k-1} a_{k,i}\left(y_{2(k-i)} \otimes R_{m-k+i}^{[k+1]}\right).$$

从而, 即得欲证的结论. □

为了解方程组式 (9.8.7), 先要看一看 P_m 和 Q_m 与 F_m 之间的关系.

由式 (9.8.2), 对于整数 $m \geqslant 0$, 由

$$\begin{aligned}
p &= \sum_{m\geqslant 0} F_m \frac{y^2 x^{2(m+1)} - x^2\left(y^{2(m+1)}\right)}{x^2 - y^2}\\
&= \sum_{m\geqslant 0} F_m x^2 y^2 \sum_{j=0}^{m-1} x^{2j} y^{2(m-j-1)}\\
&= \sum_{m\geqslant 0} F_m \sum_{j=1}^{m} x^{2j} y^{2(m-j+1)}\\
&= \sum_{j\geqslant 1} x^{2j} \sum_{i\geqslant j} F_i y^{2(i-j+1)},
\end{aligned}$$

有

$$[p]_{x^2}^m = \begin{cases} 0, & m=0, \\ \sum_{i\geqslant 0} F_{i+m} y^{2(i+1)}, & \text{其他}. \end{cases}$$

根据式 (9.8.4) 的第一式, 对于整数 $l,\ m\geqslant 1$, 得

$$P_m^{[l]} = \begin{cases} \sum_{i\geqslant 0} F_{i+m} y_{2(i+1)} (= P_m), & l=1, \\ \sum_{i=1}^{m-1} P_{m-i}^{[l-1]} P_i, & l\geqslant 2. \end{cases} \tag{9.8.8}$$

令 $F_m^{[2]} = \partial_{x^2}^m f^2\ (m\geqslant 0)$, 则

$$\begin{aligned} q &= \sum_{m\geqslant 0} F_m^{[2]} \frac{x^{2(m+1)} - y^{2(m+1)}}{x^2 - y^2} = \sum_{m\geqslant 0} F_m^{[2]} \sum_{j=0}^{m} x^{2j} y^{2(m-j)} \\ &= \sum_{j\geqslant 0} x^{2j} \sum_{m\geqslant j} F_m^{[2]} y^{2(m-j)} = \sum_{j\geqslant 0} x^{2j} \sum_{i\geqslant 0} F_{i+j}^{[2]} y^{2i}. \end{aligned}$$

根据式 (9.8.4) 的第二式, 对于整数 $l\geqslant 1$ 和 $m\geqslant 0$, 得

$$Q_m^{[l]} = \begin{cases} \sum_{i\geqslant 0} F_{i+m}^{[2]} y_{2i} (= Q_m), & l=1, \\ \sum_{i=0}^{m} Q_{m-i}^{[l-1]} Q_i, & l\geqslant 2. \end{cases} \tag{9.8.9}$$

为了寻求方程组式 (9.8.7) 的一组解, 再引进一个参数 $s=\pi/2$, 使得对于幂的向量 $\boldsymbol{n}$, 都有 $\pi(\boldsymbol{y}) = (\mathbf{1}_1 + 2\mathbf{1}_2 + 3\mathbf{1}_3 + \cdots)\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}$. 令 $F_{m,s}$ 为 F_m 的满足 $\pi(\boldsymbol{n}) = 2s$ ($\boldsymbol{n}$ 为限制幂向量) 的所有项组成的部分.

引理 9.8.3　当 $m=0$ 时, 对于任何整数 $s\geqslant 0$, 有

$$F_{0,s} = \begin{cases} 1, & s=0, \\ 0, & s\geqslant 1. \end{cases} \tag{9.8.10}$$

证明　当 $s=0$ 时, 由于方程式 (9.8.1) 的始条件意味着 $F_0=1$, 所以有 $F_{0,0}=1$. 因为 F_0 与 $\boldsymbol{y}$ 无关, 即得式 (9.8.10) 中 $s\geqslant 1$ 时的情形. □

由引理 9.8.3, 此后我们只讨论 $m\geqslant 1$ 而不失普遍性.

引理 9.8.4　当 $s=0$ 时, 对于任何整数 $m\geqslant 0$, 有

$$F_{m,0} = \begin{cases} 1, & m=0, \\ 0, & m\geqslant 1. \end{cases} \tag{9.8.11}$$

证明 当 $m=0$ 时, 由引理 9.8.1, 即得 $F_{0,0}=1$. 对于 $m\geqslant 1$, 由式 (9.8.7) 有

$$\begin{aligned}F_{m,0}&=\sum_{k=0}^{m-1}2^kP_{m,0}^{[k+1]}\quad(\text{引理 }9.8.1)\\&=0.\end{aligned}$$

从而, 引理的结论得证. □

由引理 9.8.4, 此后我们只讨论 $s\geqslant 1$. 为了求 $F_{m,s}$ $(m,\ s\geqslant 1)$, 由式 (9.8.7), 先要知道 $P_{m,s}^{[l]}$ 和 $Q_{m,s}^{[l]}$. 对于 $P_{m,s}^{[l]}$, 由引理 9.8.1, 只需讨论 $m\geqslant l$. 由式 (9.8.8), 对于任何整数 $s\geqslant 1$, 有

$$P_{m,s}^{[l]}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{s-1}F_{i+m,s-i-1}y_{2(i+1)}(=P_{m,s}), & l=1,\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=0}^{s}P_{m-i,s-j}^{[l-1]}P_{i,j}, & l\geqslant 2.\end{cases}\tag{9.8.12}$$

命题 9.8.1 令 $\mathcal{F}_{m+s-1}=\{F_{r,t}\big|r+t\leqslant m+s-1,\ r,t\geqslant 0\}$. 对于任何整数 $m\geqslant l\geqslant 1$ 和 $s\geqslant 1$, $P_{m,s}^{[l]}$ 由 $\mathcal{F}_{m+s-1}$ 确定.

证明 因为对于任何整数 $s-1\geqslant i\geqslant 0$, $(i+m)+(s-i-1)=m+s-1$, 故 $F_{i+m,s-i-1}\in\mathcal{F}_{m+s-1}$. 由式 (9.8.12) 的第一式, $P_{m,s}=P_{m,s}^{[1]}$ 由 $\mathcal{F}_{m+s-1}$ 确定. 当 $l\geqslant 2$ 时, 假设 $P_{r,t}^{[l-1]}$ 由 $\mathcal{F}_{r+t-1}$ 确定. 用数学归纳法, 往证 $P_{m,s}^{[l]}$ 由 $\mathcal{F}_{m+s-1}$ 确定. 事实上, 用式 (9.8.12) 的第二式, 从归纳假设, 即导出欲证的结论. □

同理, 对于 $Q_{m,s}^{[l]}$, 由引理 9.8.2, 只需讨论 $m-1\geqslant l\geqslant 1$. 由式 (9.8.9), 对于任何整数 $s\geqslant 1$, 有

$$Q_{m,s}^{[l]}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=0}^{s}F_{i+m,s-i}^{[2]}y_{2i}(=Q_m), & l=1,\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=0}^{s}Q_{m-i,s-j}^{[l-1]}Q_{i,j}, & l\geqslant 2.\end{cases}\tag{9.8.13}$$

命题 9.8.2 令 $\mathcal{F}_{m+s-1}=\{F_{r,t}\big|r+t\leqslant m+s-1,\ r,t\geqslant 0\}$. 对于任何整数 $m\geqslant l\geqslant 1$ 和 $s\geqslant 1$, $Q_{m,s}^{[l]}$ 由 $F_{r,t}$ $(r+t\leqslant m+s-1)$ 确定.

证明 因为对于任何整数 $s-1\geqslant i\geqslant 0$, $(i+m)+(s-i-1)=m+s-1$, 所以 $F_{i+m,s-i-1}\in\mathcal{F}_{m+s-1}$. 由式 (9.8.12) 的第一式, $P_{m,s}=P_{m,s}^{[1]}$ 由 $\mathcal{F}_{m+s-1}$ 确定. 当 $l\geqslant 2$ 时, 假设 $P_{r,t}^{[l-1]}$ 由 $\mathcal{F}_{r+t-1}$ 确定. 用数学归纳法, 往证 $P_{m,s}^{[l]}$ 由 $\mathcal{F}_{m+s-1}$ 确定. 事实上, 用式 (9.8.12) 的第二式, 从归纳假设, 即导出欲证的结论. □

由式 (9.8.7), 对于整数 $m \geqslant 1$ 和 $s \geqslant 1$, 有

$$F_{m,s} = \sum_{k=0}^{m-1} 2^k P_{m,s}^{[k+1]} + \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor -1} \left(y_{2(k+1)} \otimes Q_{m-k-1,s-k-1}^{[k+1]}\right) + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=0}^{k-1} a_{k,i}\left(y_{2(k-i)} \otimes R_{m-k+i,s-k+i}^{[k+1]}\right). \tag{9.8.14}$$

在命题 9.8.1 和命题 9.8.2 的基础上, 可以看出 $R_{m-k+i,s+i-k}^{[k+1]}$ 由 $F_{r,t}$ $(r+t \leqslant (m-k+i)+(s-k+i)-1 = m+s-2k+2i-1 \leqslant m+s-1)$ 确定.

定理 9.8.3 方程式 (9.8.1) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中有且仅有一个解.

证明 根据定理 9.8.2, 为了得到方程式 (9.8.1) 的一个解, 只要能从始值条件, 对于所有整数 $m,\ s \geqslant 0$, 求出 $F_{m,s}$ 就行了. 按照从 0 开始, $m+s$ 递增的次序, 求 $F_{m,s}$ 的过程进行. 首先, 当 $m+s=0$ 时, 已经知道 $F_{0,0}=1$. 由引理 9.8.3 和引理 9.8.4, 只需讨论 $m,\ s \geqslant 1$. 当 $m+s=1$ 时, $F_{1,0}=F_{0,1}=0$ 都已知. 当 $m+s=2$ 时, 因为 $F_{2,0}=F_{0,2}=0$, 故只剩下一种情形, 即 $F_{1,1}$. 由式 (9.8.7), 有

$$\begin{aligned} F_{1,1} &= \sum_{k=0}^{1-1} 2^0 P_{1,1}^{[k+1]} = P_{1,1} y_2 \quad \text{(用式 (9.8.12) 的第一式)} \\ &= F_{0,0} y_2 = y_2. \end{aligned}$$

对于 $m+s \geqslant 3$ 时的一般情形, 用数学归纳法. 假设对于任何整数 $r+t \leqslant m+s-1$, $F_{r,t}$ 都已经求出, 往证通过式 (9.8.7) 可求出 $F_{m,s}$. 从命题 9.8.1 和命题 9.8.2, 根据归纳假设, 知 $P_{m,s}^{[k+1]}$, $Q_{m-k-1,s}^{[k+1]}$ 和 $R_{m-k+i,s-k+i}^{[k+1]}$ 都已被确定. 由式 (9.8.14) 即得 $F_{m,s}$. 从而, 由定理 9.8.2, 知方程式 (9.8.1) 有一个解.

从求这个解的过程在 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 上对于方程式 (9.8.1) 始条件的唯一性, 即可知这个解是仅有的. □

为了使得求解过程尽量简单, 还要进一步了解这个解的一些可利用的结构性质.

引理 9.8.5 若 $f \in \mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 为方程式 (9.8.1) 的解, 则对任何整数 $m,\ s \geqslant 0$, $F_{m,s} = \left[\partial_{x^2}^m f\right]_{\boldsymbol{y}}^s \in \mathcal{R}_+[\boldsymbol{y}_{2s}]$ 为一个至多 s 次多项式.

证明 对于 $m+s \geqslant 0$ $(m,s \geqslant 0)$, 运用数学归纳法. 当 $m+s \leqslant 2$ 时, 根据前面的计算, 除 0 外, 只有 $F_{1,1}=y_2$. 易见, 这满足引理结论. 当 $m+s \geqslant 3$ 时, 假设对于任何整数 $r,t \geqslant 0$, $r+t \leqslant m+s-1$, $F_{r,t} \in \mathcal{R}_+[\boldsymbol{y}_{2t}]$ 为一个至多 t 次多项式. 往证, $F_{m,s} = \left[\partial_{x^2}^m f\right]_{\boldsymbol{y}}^s \in \mathcal{R}_+[\boldsymbol{y}_{2s}]$ 为一个至多 s 次多项式.

在命题 9.8.1 和命题 9.8.2 的基础上, 利用式 (9.8.14), 由归纳假设, 即可得欲证的结论. □

从这个引理可以看出, 对于任何整数 $m,s \geqslant 0$, $F_{m,s}$ 都是有限正项和的形式.

引理 9.8.6 对于任何整数 $m,s \geqslant 1$, 如果 $m \geqslant s+1$, 则 $F_{m,s}=0$.

证明 首先, 对于 $m+s \leqslant 2$, 已经看出欲证的结论成立. 然后, 考虑 $m+s \geqslant 3$ 时的一般情形. 假设对于任何整数 $s,r,t \geqslant 0$, $r+t \leqslant m+s-1$, 有 $F_{r,t}=0$ $(r \geqslant t+1)$. 用数学归纳法, 往证只要 $m \geqslant s+1$, 就有 $F_{m,s}=0$.

在归纳假设的基础上, 可以证明, 对任何整数 k $(0 \leqslant k \leqslant m-1)$, 只要 $m \geqslant s+1$, 就有 $P_{m,s}^{[k+1]}=0$, 对任何整数 k $(0 \leqslant k \leqslant \lfloor m/2 \rfloor -1)$, 只要 $m \geqslant s+1$, 就有 $Q_{m-k-1,s-k-1}^{[k+1]}=0$; 以及对于任何整数 k $(0 \leqslant k \leqslant m-1)$, i $(0 \leqslant i \leqslant k-1)$, 只要 $m \geqslant s+1$, 就有 $R_{m-k+i,s-k+i}^{[k+1]}=0$. 由式 (9.8.14), 有 $F_{m,s}=0$ $(m \geqslant s+1)$, 即得欲证的结论. □

这个引理使我们在求解方程式 (9.8.1) 过程中减少了一半的工作量.

定理 9.8.4 令 f^{nlE} 为方程式 (9.8.1) 的解. 对于整数 $m,s \geqslant 0$, 记 $F_{m,s}^{\mathrm{nlE}} = \left[\partial_{x^2}^m f^{\mathrm{nlE}}\right]_{\boldsymbol{y}}^s = S_{m,s}$, 则 $S_{m,s}$ 在 $\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$ 上有如下正项和表达式:

$$S_{m,s}=\begin{cases} 1, \quad s=m=0, \\ 0, \quad s \geqslant 1, m=0, \text{ 或 } m \geqslant s+1, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} 2^k P_{m,s}^{[k+1]} + \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor -1} \left(y_{2(k+1)} \otimes Q_{m-k-1,s-k-1}^{[k+1]}\right) \\ \quad \displaystyle + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=0}^{k-1} a_{k,i}\left(y_{2(k-i)} \otimes R_{m-k+i,s-k+i}^{[k+1]}\right), \quad \text{其他}, \end{cases} \tag{9.8.15}$$

其中

$$R_{m-k+i,s-k+i}^{[k+1]} = \sum_{j=k-i}^{m-2k-1}\sum_{n=0}^{k-i}\left(P_{m-k+i-j,s-k+i-n}^{[k+1]} \otimes Q_{j,n}^{[k-i]}\right), \tag{9.8.16}$$

$$P_{m,s}^{[l]}=\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{s-1} S_{i+m,s-i-1} y_{2(i+1)} (=P_{m,s}), & l=1, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=0}^{s} P_{m-i,s-j}^{[l-1]} P_{i,j}, & l \geqslant 2, \end{cases} \tag{9.8.17}$$

$$Q_{m,s}^{[l]} = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{s} S_{i+m,s-i}^{[2]} y_{2i} (= Q_{m,s}), & l = 1, \\ \sum\limits_{i=1}^{m-1} \sum\limits_{j=0}^{s} Q_{m-i,s-j}^{[l-1]} Q_{i,j}, & l \geqslant 2, \end{cases} \tag{9.8.18}$$

以及

$$S_{m,s}^{[2]} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{s} S_{m-i,s-j} S_{i,j}. \tag{9.8.19}$$

证明　当 $s = m = 0$ 时, 由方程式 (9.8.1) 的始条件给出. 当 $s \geqslant 1, m = 0$, 或 $m \geqslant s+1$ 时, 分别由引理 9.8.3 或引理 9.8.6 给出. 否则, 即当 $m, s \geqslant 2$, $m \leqslant s$ 时, 如定理 9.8.3 的证明中所提供的, 从 $S_{1,1} = y_2$ 起, 依 $m+s$ 的值逐一递增次序, 确定 $S_{m,s}$. 由引理 9.8.5 知, 所有 $S_{m,s} \in \mathcal{R}_+[\boldsymbol{y}_{2s}]$ 都是正项和的形式. □

例 9.8.1　无环 Euler 平面地图以根点次和顶点剖分向量为参数的根同构分类. 因为已经知道, 以根点次和顶点剖分向量为参数的无环 Euler 平面地图的根同构类数的计数函数, 满足方程式 (9.8.1), 定理 9.8.3 告诉我们, 式 (9.8.15)~式 (9.8.19) 提供的多项式 $S_{m,s}$ 中, $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}$ (注意 $\pi(\boldsymbol{n}) = 2s$) 项的系数, 就是根点次为 $2m$、顶点剖分向量为 $\boldsymbol{n}$ 的无环 Euler 平面地图的根同构类数. 因此, 当棱数 $m+s=2$ 时, 只有 1 个这种地图, 如图 9.8.1 中的 a 所示, $x^2 S_{1,1} = x^2 y_2$. 当棱数 $m+s=3$ 时, 也只有 1 个地图, 如图 9.8.1 中的 b 所示, $x^2 S_{1,2} = x^2 y_2^2$. 当棱数 $m+s=4$ 时, 有 5 个地图, 如图 9.8.1 中的 c, d 和 e 所示, $x^2(S_{1,3}) + x^4(S_{2,2})$,

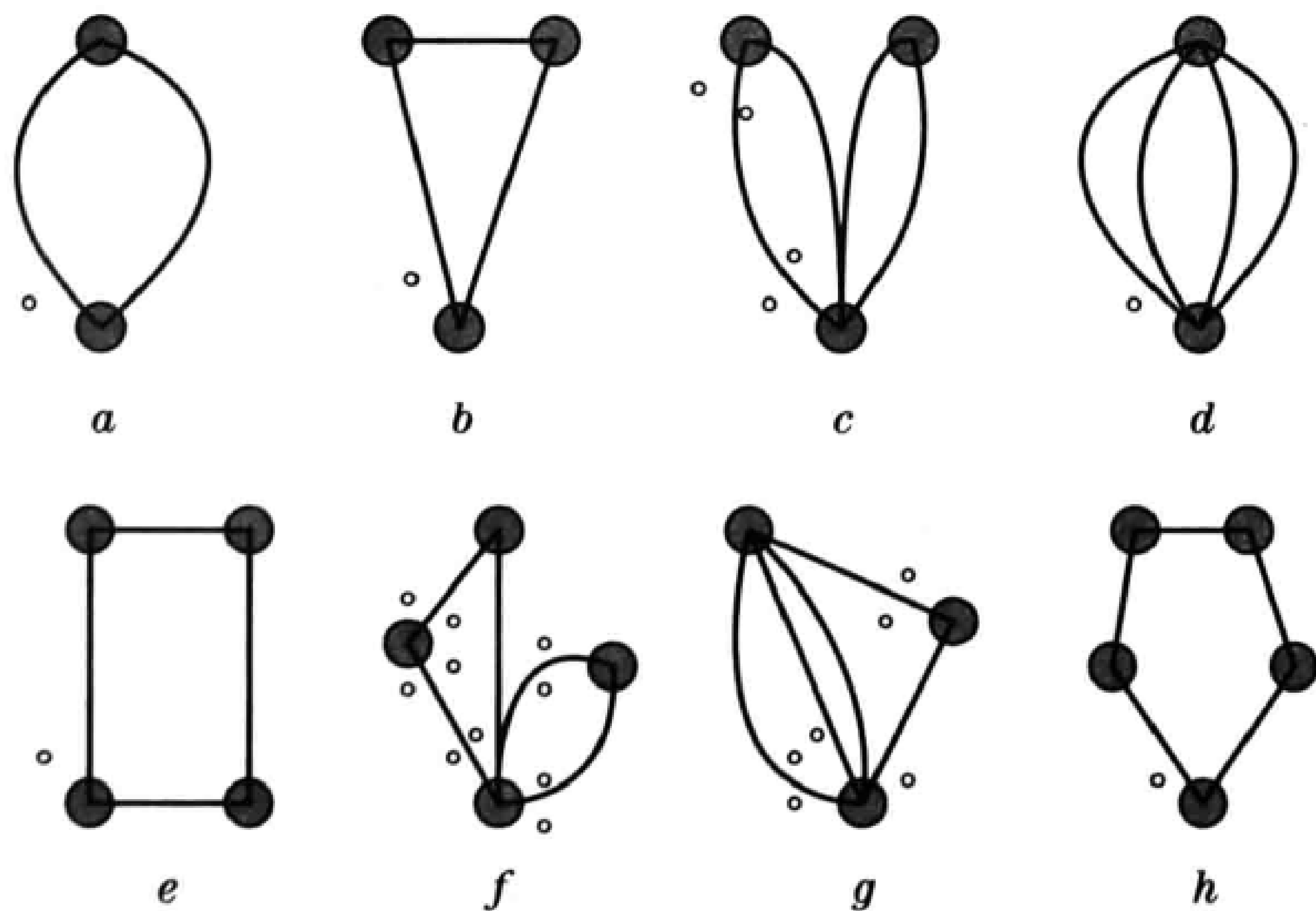


图 9.8.1　无环 Euler 平面地图依顶点剖分向量的根同构类

其中 $S_{1,3}=2c+1e=2y_2y_4+y_2^3$, $S_{2,2}=2c+d=2y_2^2+y_4$. 当棱数 $m+s=5$ 时, 有 17 个地图, 如图9.8.1 中的 f, g 和 h 所示, $x^2(S_{1,4})+x^4(S_{2,3})$, 其中 $S_{1,4}=6f+2g+h=6y_2^2y_4+2y_4^2+y_2^4$, $S_{2,3}=4f+4g=4y_2^3+4y_2y_4$.

9.9 单二部内面型

讨论关于 $f\in\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 的介子泛函方程

$$\begin{cases}(f-1)\int_y f\big|_{x=y}=x^2f^2+x^2\int_y\Big(y^2\delta_{x^2,y^2}f\big|_{u=x^2}\Big),\\ f\big|_{x=0\Rightarrow\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=1,\end{cases}\tag{9.9.1}$$

其中 $f\in\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$.

在文献 [57](231 页) 或 [59](271 页) 中, 可看到方程 (9.9.1) 的第一式或它的等价形式. 不过要注意, 在那些方程中都有符号上的笔误, 应以这里为准.

先将方程 (9.9.1) 的第一式在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上变换为易于运算的等价形式. 如果在这个等式两端同时加上 $1-f$, 则有

$$(1-f)+(f-1)\int_y f\big|_{x=y}=(1-f)+x^2f^2+x^2\int_y\Big(y^2\delta_{x^2,y^2}f\big|_{u=x^2}\Big).$$

将左端的项提出因子 $f-1$ 后, 得

$$(f-1)\Big(\int_y f\big|_{x=y}-1\Big)=(1-f)+x^2f^2+x^2\int_y\Big(y^2\delta_{x^2,y^2}f\big|_{u=x^2}\Big).$$

将左端所有项变号后移到右端, 得

$$0=1-f+x^2f^2+x^2\int_y\Big(y^2\delta_{x^2,y^2}f\big|_{u=x^2}\Big)-(f-1)\Big(\int_y f\big|_{x=y}-1\Big).$$

再将右端项减 f 变号后移到左端, 即得

$$f=1+x^2f^2+x^2\int_y\Big(y^2\delta_{x^2,y^2}f\big|_{u=x^2}\Big)-(f-1)\Big(\int_y f\big|_{x=y}-1\Big).$$

定理 9.9.1 方程式 (9.9.1) 与方程

$$\begin{cases}f=1+x^2f^2+x^2\int_y\Big(y^2\delta_{x^2,y^2}f\big|_{u=x^2}\Big)-(f-1)\Big(\int_y f\big|_{x=y}-1\Big),\\ f\big|_{x=0\Rightarrow\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=1\end{cases}\tag{9.9.2}$$

在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上等价.

证明 因为上面所用的运算都是在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上的等价变换, 所以欲证的结论成立. □

因为定理 9.9.1 提供的方程形式, 会对我们求解的正项和表示带来方便, 下面只讨论方程式 (9.9.2) 而不讨论方程式 (9.9.1).

首先, 注意到在方程式 (9.9.2) 中, f 不含 x 的奇次幂, 也就是说, f 是 x 的一个偶函数. 同样, 因为 f 也是 $\boldsymbol{y}$ 中任何一个变量的偶函数, 在 f 中, 对于所有整数 $i\geqslant 0$, f 不含 y_{2i+1}. 实际上, $f\in\mathcal{R}\{x^2,(y_2,y_4,y_6,\cdots)\}\subseteq\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$.

因为 f 是由所有 x^{2m} $(m\geqslant 0)$ 项的系数确定的, 若令 $F_m=\partial_x^{2m}f$ $(m\geqslant 0)$, 则只要能求出一组 F_m $(m\geqslant 0)$, 使得由它确定的 f 满足方程式 (9.9.2), 从而满足方程式 (9.9.1), 就得到方程式 (9.9.1) 的一个解.

引理 9.9.1 当 $m=0$ 时, $F_m=1$.

证明 由方程式 (9.9.2) 的始条件, $f\big|_{x=0\Rightarrow\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=1$ 和 $f\big|_{x=0\Rightarrow\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=F_0$, 所以 $F_0=1$. 即得欲证的结论. □

由这个引理, 我们下面只需考虑 F_m $(m\geqslant 1)$. 由式 (9.9.2), 对任何整数 $m\geqslant 1$, 看一看 x^2f^2, $x^2\int_y\big(y^2\delta_{x^2,y^2}f\big|_{u=x^2}\big)$ 和 $(f-1)\big(\int_y f\big|_{x=y}-1\big)$ 中 x^{2m} 的系数, 如何用 A_m, B_m 和 C_m 表示.

求 $A_m\in\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$. 因为 f 是 x 的偶函数, 故 f^2 也是 x 的偶函数. 由引理 9.9.1, 当 $m=0$ 时, $F_0^{[2]}=F_0^2=1$. 令 $F_m^{[2]}=\partial_x^{2m}$, 则对于 $m\geqslant 1$,

$$F_m^{[2]}=\sum_{i=0}^{m}F_{m-i}F_i.$$

由 $A_m=F_{m-1}^{[2]}$, 有

$$A_m=\begin{cases}0, & m=0,\\ 1, & m=1,\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{m-1}F_{m-2-i}F_i, & m\geqslant 2.\end{cases}\tag{9.9.3}$$

求 $B_m\in\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}(m\geqslant 0)$. 先要知道 $d=\partial_{x^2,y^2}f\big|_{u=x^2}$. 这就是

$$\begin{aligned}d&=\sum_{i\geqslant 0}F_i\frac{x^{2i}-y^{2i}}{x^2-y^2}=\sum_{i\geqslant 0}F_i\sum_{j=0}^{i-1}x^{2(i-1-j)}y^{2j}\\&=\sum_{i\geqslant 1}F_i\sum_{j=0}^{i-1}x^{2(i-1-j)}y^{2j}\end{aligned}$$

$$=\sum_{j\geqslant 0}\Big(\sum_{i\geqslant j+1}F_i x^{2(i-j-1)}\Big)y^{2j}\quad(\text{用 } k=i-j-1 \text{ 代替 } i)$$
$$=\sum_{j\geqslant 0}\Big(\sum_{k\geqslant 0}F_{k+j+1}x^{2k}\Big)y^{2j}=\sum_{k\geqslant 0}x^{2k}\Big(\sum_{j\geqslant 0}F_{k+j+1}y^{2j}\Big).$$

由 $B_m=x^2\int_y(y^2d)$, 对于 $m\geqslant 0$, 就有

$$B_m=\begin{cases}0, & m=0,\\ \sum\limits_{i\geqslant 0}F_{m+i}y_{2(i+1)}=\sum\limits_{j\geqslant 1}F_{m+j-1}y_{2j}, & m\geqslant 1.\end{cases}\tag{9.9.4}$$

求 $C_m\in\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}(m\geqslant 0)$. 由引理 9.9.1, 知 $F_0=1$, 所以

$$f-1=\sum_{m\geqslant 1}F_m x^{2m},\quad \int_y f\big|_{x=y}-1=\sum_{m\geqslant 1}F_m y_{2m}.$$

从而, 对于 $m\geqslant 0$,

$$C_m=\begin{cases}0, & m=0,\\ F_m\sum\limits_{j\geqslant 1}F_j y_{2j}, & m\geqslant 1.\end{cases}\tag{9.9.5}$$

定理 9.9.2 方程式 (9.9.2) 与关于 F_m $(m\geqslant 0)$ 的方程组:

$$F_m=\begin{cases}1, & m=0,\\ 2F_{m-1}+\sum\limits_{i=1}^{m-2}F_{m-2-i}F_i+\sum\limits_{j\geqslant 1}\big(F_{m+j-1}-F_mF_j\big)y_{2j}, & m>0,\end{cases}\tag{9.9.6}$$

在 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 上等价.

证明 在式 (9.9.2) 的基础上, 对于任何整数 $m\geqslant 0$, 有

$$F_m=1+A_m+B_m-C_m.$$

由式 (9.9.3) ~ 式 (9.9.5), 有

$$F_m=\begin{cases}1, & m=0,\\ \sum\limits_{i=0}^{m-1}F_{m-2-i}F_i+\sum\limits_{j\geqslant 1}F_{m+j-1}y_{2j}-F_m\sum\limits_{j\geqslant 1}F_jy_{2j} & \\ \quad=\sum\limits_{i=0}^{m-1}F_{m-2-i}F_i+\sum\limits_{j\geqslant 1}\big(F_{m+j-1}-F_mF_j\big)y_{2j}, & m>0.\end{cases}$$

因为它的第二式的第一项就是式 (9.9.6) 的第二式的前两项之和, 故结论成立. □

因为方程组式 (9.9.6) 中每个方程都有无穷多个未知量, 不能直接求解, 故需要进一步研究它本身的结构性质. 对于任何整数 $m \geqslant 1$, 若引入一个新参数 $s \in \mathcal{R}$, 使得 F_m 中幂向量为 $\boldsymbol{n}$ 且 $s = \pi(\boldsymbol{n})/2$ 的所有项组成的部分, 记 $F_{m,s}$, 则下面将会看到 $F_{m,s} \in \mathcal{R}[x, \boldsymbol{y}]$, 即 $\mathcal{R}\{x, \boldsymbol{y}\}$ 上的一个多项式.

在式 (9.9.6) 的基础上, 对任何整数 $m \geqslant 1$ 和 $s \geqslant 1$, 有

$$F_{m,s} = 2F_{m-1,s} + \sum_{i=1}^{m-2} D_{i,s} + \sum_{j=1}^{s} E_{j,s-j} y_{2j}, \tag{9.9.7}$$

其中

$$\begin{cases} D_{i,s} = \displaystyle\sum_{j=0}^{s} F_{m-1-i,s-j} F_{i,j}, \\ E_{j,s-j} = F_{m+j-1,s-j} - \displaystyle\sum_{k=0}^{s-j} F_{m,s-j-k} F_{j,k}. \end{cases} \tag{9.9.8}$$

先了解 m 或 s 取值很小时的一些情形.

引理 9.9.2 当 $s = 0$ 时, 对于任何整数 $m \geqslant 1$, 有 $F_{m,0} = \dfrac{(2m)!}{m!(m+1)!}$.

证明 利用式 (9.9.7) 和式 (9.9.8), 对于 $m \geqslant 1$, 有

$$F_{m,0} = 2F_{m-1,0} + \sum_{i=1}^{m-2} F_{m-1-i,0} F_{i,0} = \sum_{i=0}^{m-1} F_{m-1-i,0} F_{i,0}.$$

因为 $F_{0,0} = 1$, 由式 (3.1.7), 可知 $F_{m,0} = C_m$, 即 Catalan 数. 从而, 引理的结论得证. □

引理 9.9.3 对于任何整数 $m \geqslant 0$, 有 $F_{m,1} = 0$.

证明 利用式 (9.9.7) 和式 (9.9.8), 对于 $m \geqslant 1$, 有

$$\begin{aligned} F_{m,1} = {} & 2F_{m-1,1} + \sum_{i=1}^{m-2} \sum_{j=0}^{1} F_{m-1-i,1-j} F_{i,j} \\ & + \sum_{j=1}^{1} \left(F_{m+j-1,1-j} - \sum_{k=0}^{1-j} F_{m,1-j-k} F_{j,k} \right) y_{2j} \\ = {} & 2F_{m-1,1} + \sum_{i=1}^{m-2} \left(F_{m-1-i,1} F_{i,0} + F_{m-1-i,0} F_{i,1} \right) + \left(F_{m,0} - F_{m,0} F_{1,0} \right) y_2. \end{aligned}$$

由 $F_{1,0}=1$(引理 9.9.2), 就有

$$F_{m,1}=2F_{m-1,1}+\sum_{i=1}^{m-2}\big(F_{m-1-i,1}F_{i,0}+F_{m-1-i,0}F_{i,1}\big).$$

在此基础上, 利用数学归纳法. 当 $m=0$ 时, 由引理 9.9.1, 已知 $F_{0,1}=0$. 当 $m\geqslant 1$ 时, 假设对于任何整数 $k\leqslant m-1$, 已经得到 $F_{k,0}=0$, 往证 $F_{m,1}=0$. 事实上, 由归纳假设, $F_{m-1,1}=0$, 且对于 $1\leqslant i\leqslant m-1$, 有 $F_{m-1-i,1}=0$, $F_{i,1}=0$. 从而, $F_{m,1}=0+0=0$, 即得欲证的结论. □

引理 9.9.4 对于任何整数 $s\geqslant 1$, 有 $F_{1,s}=0$.

证明 对于 $s\geqslant 1$, 用式 (9.9.7), 有

$$F_{1,s}=2F_{0,s}+\sum_{j=1}^{s}E_{j,s-j}y_{2j}=\sum_{j=1}^{s}\big(F_{j,s-j}-\sum_{k=0}^{s-j}F_{1,s-j-k}F_{j,k}\big)y_{2j}.$$

在此基础上, 利用数学归纳法. 当 $s=1$ 时, 上面已经求出 $F_{1,1}=0$. 当 $s\geqslant 2$ 时, 假设对于任何整数 $1\leqslant k\leqslant s-1$, 已经得到 $F_{1,k}=0$, 往证 $F_{1,s}=0$. 事实上, 由归纳假设, $F_{m-1,1}=0$, 且对于 $1\leqslant i\leqslant m-1$, 有 $F_{m-1-i,1}=0$, $F_{i,1}=0$. 从而, $F_{m,1}=0+0=0$, 即得欲证的结论. □

再看一看, 随着 $m+s$ 自然数增长的顺序, 如何一个一个地求出 $F_{m,s}$.

当 $m+s=0$ 时, 只有 $F_{0,0}=1$(引理 9.9.1).

当 $m+s=1$ 时, $F_{1,0}=1$, $F_{0,1}=0$.

当 $m+s=2$ 时, $F_{2,0}=2$, $F_{1,1}=F_{0,2}=0$.

当 $m+s=3$ 时, $F_{3,0}=5$, $F_{2,1}=F_{1,2}=F_{0,3}=0$.

当 $m+s=4$ 时, $F_{4,0}=14$, $F_{3,1}=F_{1,3}=F_{0,4}=0$, 只剩下 $F_{2,2}$. 因为

$$F_{1,2}^{[2]}=2\sum_{i=0}^{2}F_{1,2-i}F_{0,i}=0,$$

由式 (9.9.7) 和式 (9.9.8), 有

$$\begin{aligned}F_{2,2}&=(F_{2,2}-\sum_{k=0}^{1}F_{2,2-k}F_{1,k})y_2+(F_{3,0}-F_{2,0}F_{2,0})y_4\\&=(F_{3,0}-F_{2,0}F_{2,0})y_4=(5-2^2)y_4=y_4.\end{aligned}$$

当 $m+s=5$ 时, $F_{5,0}=42$, $F_{4,1}=F_{1,4}=F_{0,5}=0$, 只剩下 $F_{3,2}$ 和 $F_{2,3}$. 对于 $F_{3,2}$, 因为

$$F_{2,2}^{[2]}=2F_{2,2}+\sum_{j=0}^{2}F_{1,2-j}F_{1,j}=2F_{2,2}=2y_4,$$

由式 (9.9.7) 和式 (9.9.8), 有

$$F_{3,2}=2y_4+\sum_{j=1}^{2}\big(F_{1+j,2-j}-\sum_{k=0}^{2-j}F_{3,2-j-k}F_{j,k}\big)y_{2j}$$
$$=2y_4+\big(F_{4,0}-F_{3,0}F_{2,0}\big)y_4=2y_4+\big(14-5\times 2\big)y_4=6y_4.$$

对于 $F_{2,3}$, 因为

$$F_{1,3}^{[2]}=2F_{1,3}=0,$$

由式 (9.9.7) 和式 (9.9.8), 有

$$F_{2,3}=\sum_{j=1}^{3}\big(F_{1+j,3-j}-\sum_{k=0}^{3-j}F_{2,3-j-k}F_{j,k}\big)y_{2j}=\big(F_{4,0}-F_{2,0}F_{3,0}\big)y_6=4y_6.$$

当 $m+s=6$ 时, 因为 $F_{6,0}=132$(引理 9.9.2), $F_{5,1}=F_{1,5}=0$(引理 9.9.3 和引理 9.9.4), 只需要求 $F_{4,2}$, $F_{3,3}$ 和 $F_{2,4}$. 相仿地, 可以求得 $F_{4,2}=28y_4$, $F_{3,3}=25y_6$, $F_{2,4}=14y_8+2y_4^2$.

定理 9.9.3 方程式 (9.9.2) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中有且仅有一个解.

证明 先证方程式 (9.9.2) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中有一个解. 因为方程式 (9.9.2) 的解由满足式 (9.9.7) 和式 (9.9.8) 的 $F_{m,s}$ $(m,s\geqslant 0)$ 确定, 这就要求我们求出这样的一组 $F_{m,s}$.

当 $m+s\leqslant 5$ 时, $F_{m,s}$ 已经得到. 在此基础上, 用基于数学归纳法的无限递推原理, 就可得其他 $F_{m,s}$ $(m+s\geqslant 6)$. 假设对于任何整数 $p,q\geqslant 0$, 使得 $p+q\leqslant m+s-1$ 的所有 $F_{p,q}$ 已经求出. 往求 $F_{m,s}$.

由 $(m-1)+s\leqslant m+s-1$, 知 $F_{m-1,s}$ 已被确定. 对于 $1\leqslant i\leqslant m-2$, $0\leqslant j\leqslant s$, 由 $(m-1-i)+(s-j)=m+s-i-j-1\leqslant m+s-2<m+s-1$ 和 $i+j\leqslant m-2+s<m+s=1$, 知 $F_{m-1-i,s-j}$ 和 $F_{i,j}$ 已被确定. 用式 (9.9.8) 的第一式, $D_{i,s}$ 已知, 从而

$$\sum_{i=1}^{m=2}D_{i,s}\in\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$$

已知. 对于任何整数 $1\leqslant j\leqslant s$, 由 $(m+j-1)+(s-j)=m+s-1$, 知 $F_{m+j-1,s-j}$ 已被确定. 进而对于 $0\leqslant k\leqslant s-j$, 由 $j\geqslant 1$ 和 $k\geqslant 0$, $m+(s-j-k)=m+s-j-k\leqslant m+s-1$, 以及由 $k\leqslant s-j$ 和 $m\geqslant 1$, $j+k\leqslant s\leqslant m+s-1$, 知 $F_{m,s-j-k}$ 和 $F_{i,j}$ 已被确定. 用式 (9.9.8) 的第二式, $E_{j,s-s}$ 已知, 从而

$$\sum_{j=1}^{s}E_{j,s-j}y_{2j}\in\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$$

已知. 至此, 由式 (9.9.7), $F_{m,s}$ 已知. 这就得方程式 (9.9.2) 的一个解.

然后, 证这个解是仅有的. 由上面求 $F_{m,s}$ 的过程对于始值 F_0 的唯一性, 可知在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中这个解是唯一的. □

下面, 进一步考察方程式 (9.9.2) 解的内在结构.

引理 9.9.5 任给一个整数 $s\geqslant 1$. 对于整数 $1\leqslant j\leqslant s$, 有

$$F_{m+j-1,s-j}-\sum_{k=0}^{s-j}F_{m,s-j-k}F_{j,k}\geqslant 0. \tag{9.9.9}$$

证明 从上面的计算, 对于 $m+s\leqslant 5$, 已经知道不等式 (9.9.9) 成立.

对于 $m+s\geqslant 6$ 时的一般情况, 用数学归纳法. 任给两个整数 $l,t\geqslant 0$, 当 $l+t\leqslant m+s-1$ 时, 不等式

$$F_{l+j-1,t-j}-\sum_{k=0}^{t-j}F_{l,t-j-k}F_{j,k}\geqslant 0$$

成立. 往证, 当 $l=m$ 和 $t=s$ 时式 (9.9.9) 成立.

由 $j\geqslant 1$ 和 $k\geqslant 0$, 有 $(m+j-1)+(s-j)=m+s-1\leqslant m+s-1$, $m+(s-j-k)\leqslant m+s-1-k\leqslant m+s=1$, 从 $m\geqslant 0$ 和 $k\leqslant s-j$, 导致 $j+k\leqslant s\leqslant m+s$. 由归纳假设, 即得式 (9.9.9). □

这个引理告诉我们, 对于任何整数 $1\leqslant j\leqslant s$, 在式 (9.9.7) 中, $E_{j,s-j}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$.

定理 9.9.4 令 f^{sb} 为方程式 (9.9.1) 的解. 对于任何整数 $m,\ s\geqslant 0$, 记 $S_{m,s}=\partial_{x,\boldsymbol{y}}^{2m,2s}f^{\mathrm{sb}}$, 则 $S_{m,s}^{\mathrm{sb}}$ 在 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 中有如下正项和表示:

$$S_{m,s}=\begin{cases}1, & m=s=0,\\ 0, & \begin{array}{l}s\geqslant 1,m=0,\ \text{或}\ s\geqslant 1,m=1,\\ \text{或}\ s=1,m\geqslant 0,\end{array}\\ \dfrac{(2m)!}{m!(m+1)!}, & s=0,m\geqslant 1,\\ S_{m-1,s}^{[2]}+\displaystyle\sum_{j=1}^{s}A_{j,s-j}y_{2j}, & \text{其他},\end{cases} \tag{9.9.10}$$

其中

$$\begin{cases}S_{m-1,s}^{[2]}=\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant s\\ 0\leqslant i\leqslant m-1}}S_{m-1-i,s-j}S_{i,j}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\},\\ A_{j,s-j}=S_{m+j-1,s-j}-\displaystyle\sum_{k=0}^{s-j}S_{m,s-j-k}S_{j,k}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}.\end{cases} \tag{9.9.11}$$

证明　基于定理 9.9.3 知, 对任何整数 $m,s\geqslant 0$, 由 $S_{m,s}=\partial_{x,\boldsymbol{y}}^{2m,2s}f^{\mathrm{sb}}$, 就有 $S_{m,s}=F_{m,s}$.

当 $m=s=0$ 或 $s\geqslant 1,m=0$ 时, 由方程式 (9.9.1) 的始条件给出.

当 $s\geqslant 1,m=1$ 时, 由引理 9.9.4 给出.

当 $s=1,m\geqslant 0$ 时, 由引理 9.9.3 给出.

当 $s=0,m\geqslant 1$ 时, 由引理 9.9.2 给出.

否则, 即 $m,s\geqslant 2$, 由式 (9.9.7) 和式 (9.9.8) 给出.

至于对 $1\leqslant j\leqslant 3$, $A_{j,s-j}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$, 则是由引理 9.9.5 给出的. □

例 9.9.1　简单二部平面地图依顶点剖分向量的根同构类. 实际上, $F_{m,0}$ 提供的是 m 条棱平面树的根同构类数. 它们的根同构类在图 9.9.1 中给出. 这里只考虑含有圈的情形. 从 $F_{m,s}$ 表示根面次 $2m$(与根面关联的半棱数) 和与非根面关联的半棱数 $2s$ 这种地图根同构类数, 可以看出 $m+s$ 就是地图的棱数. 在这

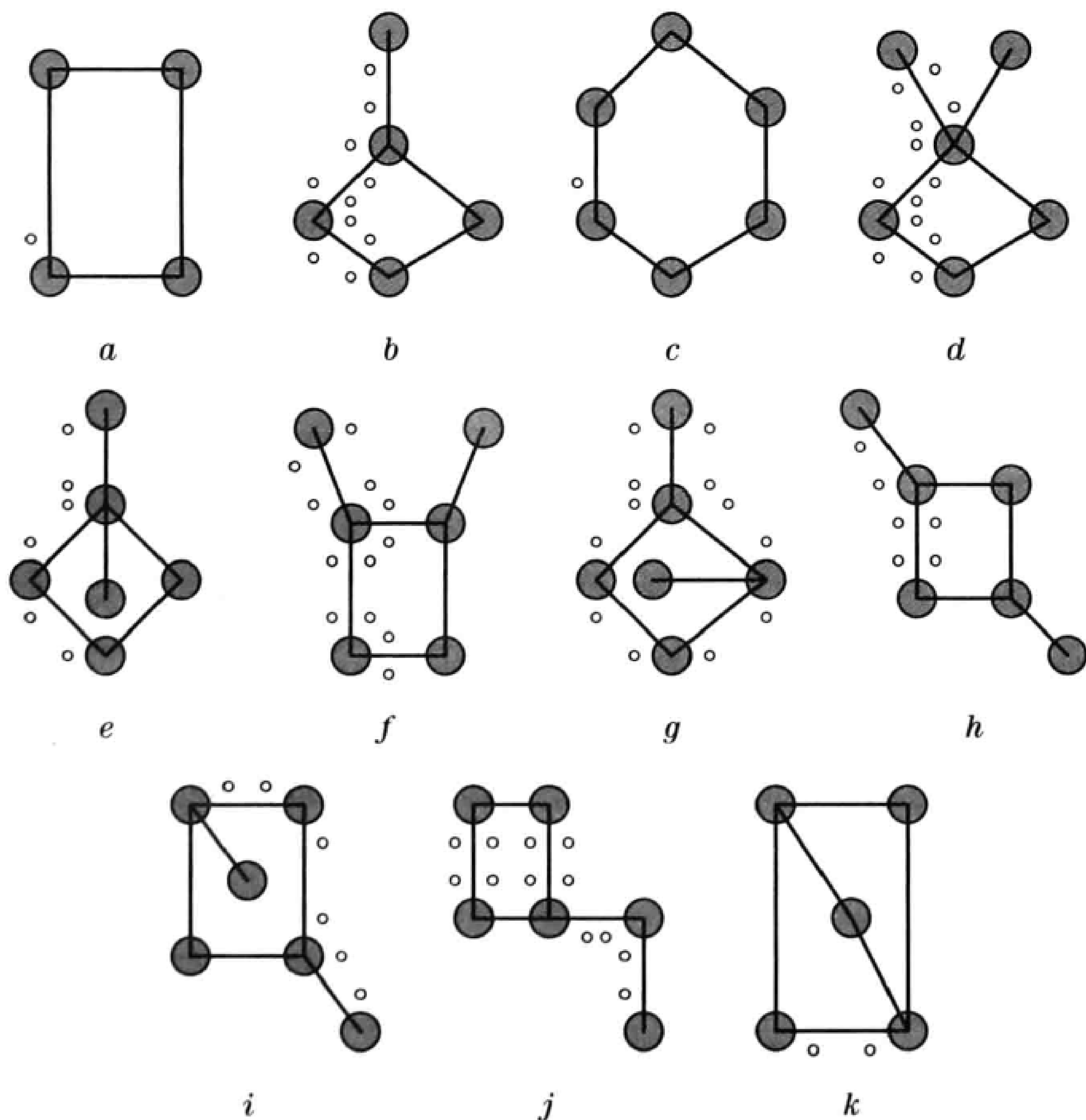


图 9.9.1　简单二部平面地图依顶点剖分向量的根同构类

个图中, $a=x^4y_4$ 为 $m+s=4$ 条棱的情形; $b=6x^6y_4+4x^4y_8$ 为 $m+s=5$ 条棱的情形; 其余的为 $m+s=6$ 条棱的情形. 由此, 可以看出 $a=x^4y_4=x^4F_{2,2}$, 即 $F_{2,2}=y_4$; $b=4x^4y_6=x^4F_{2,3}$, $F_{2,3}=y_6$;

$$\begin{aligned}&c(x^6y_6)+d(4x^4y_8+8x^8y_4)+e(6x^6y_6)+f(4x^4y_8+8x^8y_4)+g(12x^6y_6)\\&+h(2x^4y_8+4x^8y_4)+i(6x^6y_6)+j(4x^4+8x^8y_4)+k(2x^4y_4^2).\end{aligned}$$

将括号内的多项式合并同类项, 得

$$\begin{aligned}&x^4\big(4y_8(d)+4y_8(f)+2y_8(h)+4y_8(j)+2y_4^2(k)\big)=x^4(14y_8+2y_4^2)=x^4(F_{2,4}),\\&x^6\big(y_6(c)+6y_6(e)+12y_6(g)+6y_6(i)\big)=x^6(25y_6)=x^6(F_{3,3}),\\&x^8\big(8y_4(d)+8y_4(f)+4y_4(h)+8y_4)(j)\big)=x^8(28y_4)=x^8(F_{8,2}).\end{aligned}$$

9.10 注　　记

1. 方程式 (9.1.2) 解的唯一性依赖始条件的选择. 不过, 沿用 9.1 节中所形成的方法, 首先想到的应是 $\partial_x^0 f\in\mathcal{R}_+$, 即

$$\begin{cases}\left(1-\displaystyle\int_y\frac{y^2}{1-yf}\right)f=xy_3,\\ f|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=a\in\mathcal{R}_+.\end{cases}\tag{9.10.1}$$

如果将解中的某一项给定为始条件, 只有由此导出常数项为 0 时, 才有可能得到一个解. 如果确得一个解, 这个解也应该被证明是唯一的.

2. 方程式 (9.2.1) 解的唯一性依赖始条件的选择. 沿用 9.2 节中所形成的方法, 可考虑 $\partial_x^0 f\in\mathcal{R}_+$, 即

$$\begin{cases}g=1+x^2g^2+x\displaystyle\int_y\Big(y\delta_{x,y}(ug|_{x=u})\Big),\\ g|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}\Rightarrow x=0}\in\mathcal{R}_+.\end{cases}\tag{9.10.2}$$

这样, 方程式 (9.2.1) 只是方程式 (9.10.2) 的一种特殊情形.

如何以式 (9.2.18) 为基础, 导出方程式 (9.2.1) 解的直接正项和, 甚至无和显式, 有待进一步研究.

3. 方程式 (9.3.1) 解的唯一性依赖始条件的选择. 沿用 9.3 节中所形成的方法, 可考虑 $\partial_x^0 g \in \mathcal{R}_+$, 即

$$\begin{cases} g = \int_y \dfrac{1}{1-\partial_{x,y}(u^2 g|_{x=u})}, \\ g|_{x=0\Rightarrow \boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} \in \mathcal{R}_+. \end{cases} \tag{9.10.3}$$

如何以式 (9.3.20) 和式 (9.3.21) 为基础, 导出方程式 (9.3.1) 解的直接正项和, 甚至无和显式, 有待进一步研究.

4. 方程式 (9.4.1) 解的唯一性依赖始条件的选择. 沿用 9.4 节中所形成的方法, 可考虑 $\partial_x^0 f \in \mathcal{R}_+$, 即

$$\begin{cases} f = x^2 + x\int_y \dfrac{y\partial_{x,y} f|_{u=x}}{1-\partial_{x,y} f|_{u=x}}, \\ f|_{x=0\Rightarrow \boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} \in \mathcal{R}_+. \end{cases} \tag{9.10.4}$$

如何以式 (9.4.22) 和式 (9.4.23) 为基础, 导出方程式 (9.4.1) 解的直接正项和, 甚至无和显式, 有待进一步研究.

5. 方程式 (9.5.1) 解的唯一性依赖始条件的选择. 沿用 9.5 节中所形成的方法, 可考虑 $\partial_x^0 f \in \mathcal{R}_+$, 即

$$\begin{cases} x^2 f^2 + x\int_y \Big(y\delta_{x,y}\big(uf\big|_{x=u}\big)\Big) = \int_y \Big(\big((1+xy)f-1\big)f\big|_{x=y}\Big), \\ f\big|_{x=0\Rightarrow \boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} \in \mathcal{R}_+. \end{cases} \tag{9.10.5}$$

如何以式 (9.5.23) 为基础, 导出方程式 (9.5.1) 解的直接正项和, 甚至无和显式, 有待进一步研究.

6. 方程式 (9.6.1) 解的唯一性依赖始条件的选择. 沿用 9.6 节中所形成的方法, 可考虑 $\partial_x^0 f \in \mathcal{R}_+$ 和 $\partial_x^1 f \in \mathcal{R}_+\{y_1\}$, 即

$$\begin{cases} f = 1 + x^2 f^2 + x^2\int_y y^2 \delta_{x^2,y^2}\big(f\big|_{u=x^2}\big), \\ f\big|_{x=0\Rightarrow \boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = a, \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=0} = by_1, \end{cases} \tag{9.10.6}$$

其中 $a, b \in \mathcal{R}_+$.

如何以式 (9.6.10) 为基础, 导出方程式 (9.3.1) 解的直接正项和, 甚至无和显式, 有待进一步研究.

7. 方程式 (9.7.1) 解的唯一性依赖始条件的选择. 沿用 9.7 节中所形成的方

法, 可考虑 $\partial_x^0 f \in \mathcal{R}_+$, 即

$$\begin{cases} f = x^2 + x^2 \int_y \dfrac{y^2 \delta_{x^2,y^2} f\big|_{u=x^2}}{(1-\partial_{x^2,y^2} f\big|_{u=x^2})^2 - (xy\delta_{x^2,y^2} f\big|_{u=x^2})^2}, \\ f\big|_{x=0\Rightarrow \boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = a, \end{cases} \tag{9.10.7}$$

其中 $a \in \mathcal{R}_+$.

如何以式 (9.7.16)~ 式 (9.3.21) 为基础, 导出方程式 (9.7.1) 解的直接正项和显式, 有待进一步研究.

8. 除非作系统的简化, 9.7 节的结构可以改变, 以使所得结果更利于计算. 因为考虑到思路不同, 仍保留原样. 这方面的工作有待进一步研究.

9. 方程式 (9.8.1) 解的唯一性依赖始条件的选择. 沿用 9.8 节中所形成的方法, 可考虑 $\partial_x^0 f \in \mathcal{R}_+$, 即

$$\begin{cases} f = \int_y \dfrac{1-\partial_{x^2,y^2}(uf\big|_{u=x^2})}{1-2\partial_{x^2,y^2}(uf\big|_{u=x^2}) - x^2y^2\delta_{x^2,y^2}(uf\big|_{u=x^2}^2)}, \\ f\big|_{x=0\Rightarrow \boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = a, \end{cases} \tag{9.10.8}$$

其中 $a \in \mathcal{R}_+$.

如何以式 (9.8.15)~式 (9.8.19) 为基础, 导出方程式 (9.8.1) 解的直接正项和显式, 有待进一步研究.

10. 方程式 (9.9.1) 解的唯一性依赖始条件的选择. 沿用 9.9 节中所形成的方法, 可考虑 $\partial_x^0 f \in \mathcal{R}_+$, 即

$$\begin{cases} (f-1)\int_y f\big|_{x=y} = x^2 f^2 + x^2 \int_y \Big(y^2 \delta_{x^2,y^2} f\big|_{u=x^2}\Big), \\ f\big|_{x=0\Rightarrow \boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = 1. \end{cases} \tag{9.10.9}$$

如何以式 (9.9.10) 和式 (9.9.11) 为基础, 导出方程式 (9.9.1) 解的直接正项和, 甚至无和显式, 有待进一步研究.

第 10 章　曲面型介子方程

10.1　曲面限端型

讨论关于 $f \in \mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 的方程：

$$\begin{cases} x\int_y y\big(1+\partial_{x,y}(f-1)\big|_{u=x}\big) = (1-x^2)f - x^3\dfrac{\partial f}{\partial x} - 1, \\ f|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = 1, \end{cases} \tag{10.1.1}$$

其中 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3, \cdots)$.

这里, 考虑更普遍的一族, 即

$$\begin{cases} x\int_y y\big(1+\partial_{x,y}(f-a)\big|_{u=x}\big) = (1-x^2)f - x^3\dfrac{\partial f}{\partial x} - a, \\ f|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = a, \end{cases} \tag{10.1.2}$$

其中 $a \in \mathcal{R}_+$ 为一个给定的数.

当 $a=1$ 时, 方程式 (10.1.2) 就变成方程式 (10.1.1). 因为在曲面上, 上式与各种限制端顶点地图以根点次和非根顶点剖分向量为参数的根同构类数确定的函数有关, 将方程式 (10.1.1) 和方程式 (10.1.2) 称为曲面限端型的.

在文献[75] 中, 出现过与它们类似的方程.

为了便于求正项和形式的解, 将方程式 (10.1.2) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上等价地变为

$$\begin{cases} f = a + x^2 f + x^3\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\int_y y\big(1+\partial_{x,y}(f-a)\big|_{u=x}\big), \\ f_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = a. \end{cases} \tag{10.1.3}$$

对于整数 $m \geqslant 0$, 令 $F_m = \left[f\right]_x^m = \partial_x^m f$, 则

$$\left[x^2 f\right]_x^m = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant m \leqslant 1, \\ F_{m-2}, & m > 1. \end{cases} \tag{10.1.4}$$

引理 10.1.1 对于任何整数 $m \geqslant 0$, 如果 $F_l \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}(0 \leqslant l \leqslant m)$, 则 $F_{m-2} \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$.

证明 因为 $m-2 \leqslant m$, 由前提条件, 自然 $F_{m-2} \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$. □

对于整数 $m \geqslant 0$, 令 $F'_m = \partial_x^m \dfrac{\partial f}{\partial x}$, 则

$$F'_m = \begin{cases} F_1, & m = 0, \\ (m+1)F_{m+1}, & m \geqslant 1. \end{cases} \tag{10.1.5}$$

引理 10.1.2 对于任何整数 $m \geqslant 0$, 如果 $F_l \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}(0 \leqslant l \leqslant m)$, 则 $F'_{m-1} \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$.

证明 用式 (10.1.5), 有 $F'_{m-1} = mF_m$. 由前提条件, 知 $F_m \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$. 从而, $F'_{m-1} \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$, 即得欲证的结论. □

令 $\Lambda_i = \partial_x^i \left(\partial_{x,y} f\big|_{u=x}\right)(i \geqslant 0)$. 对于整数 $k \geqslant 1$, 有

$$\partial_{x,y} u^k = \frac{yx^k - xy^k}{x-y} = \sum_{j=0}^{k-2} x^{j+1} y^{k-1-j} = \sum_{j=1}^{k-1} x^j y^{k-j}.$$

由算子 $\partial_{x,y}$ 的线性性, 对于整数 $m \geqslant 0$, 有

$$\partial_x^m \left(y\partial_{x,y}(f-a)\big|_{u=x}\right) = \begin{cases} 0, & m = 0, \\ \displaystyle\sum_{k \geqslant m+1} F_k y^{k-m+1}, & m \geqslant 1. \end{cases} \tag{10.1.6}$$

从而, 由介子泛函的线性性, 对于 $m \geqslant 0$, 有

$$\left[\int_y y\left(1+\partial_{x,y}(f-a)\right)\right]_x^m = \begin{cases} y_1, & m = 0, \\ \displaystyle\sum_{k \geqslant m+1} F_k y_{k-m+1}, & m \geqslant 1. \end{cases} \tag{10.1.7}$$

定理 10.1.1 方程式 (10.1.3) 与关于 F_m $(m \geqslant 0)$ 的方程组

$$F_m = \begin{cases} a, & m=0, \\ y_1 + \sum_{k\geqslant 1} F_k y_{k+1}, & m=1, \\ a + \sum_{k\geqslant 2} F_k y_k, & m=2, \\ (m-1)F_{m-2} + \sum_{k\geqslant m} F_k y_{k-m+2}, & m\geqslant 3 \end{cases} \tag{10.1.8}$$

在 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 上等价.

证明 因为在方程式 (10.1.3) 中, $x\big|(f-a)$, 所以 $F_0=a$. 这就是方程的始条件. 当 $m=0$ 时, 式 (10.1.8) 成立. 对于 $m\geqslant 1$, 在式 (10.1.4) $\sim$ 式 (10.1.7) 的基础上, 用方程式 (10.1.3), 可等价地得到式 (10.1.8). □

为了能解出这个具有无穷未定元 F_m $(m\geqslant 0)$ 的方程组, 还需要引进一个新的参数 s, 使得将 F_m 中的项按照 s 所分的类都是多项式.

令 $\mathcal{J}_m$ 为由在 F_m 中含 $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}$ $(\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3,\cdots))$ 的项的集合. 记 $\mathcal{J}_{m,s} = \{\boldsymbol{n}\big|\pi(\boldsymbol{n})=s\}\subseteq \mathcal{J}_m$, 则

$$\mathcal{J}_m = \sum_{s\geqslant 0} \mathcal{J}_{m,s}, \tag{10.1.9}$$

其中 $\pi(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{i}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{i}=(1,2,3,\cdots,i,\cdots)$.

引理 10.1.3 对于任何整数 $s\geqslant 0$, 有

$$F_{0,s} = \begin{cases} a, & s=0, \\ 0, & s\geqslant 1. \end{cases} \tag{10.1.10}$$

证明 因为 $F_0 = a\in\mathcal{R}_+$ 是一个常数, 故 F_0 与 $s\geqslant 1$ 无关. 这就是 $F_{0,s} = 0(s\geqslant 1)$. □

若用 Kronecker 记号 $\delta_{s,t}$, 则由这个引理就给出了 $F_{0,s}=\delta_{0,s}$.

引理 10.1.4 对于任何整数 $s\geqslant 0$, 有

$$F_{1,s} = \begin{cases} 0, & s\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2), \\ y_1\delta_{1,s} + \sum_{k=1}^{s-1} F_{k,s-k-1} y_{k+1}, & \text{其他}. \end{cases}$$

证明 由式 (10.1.8) 的第二式, 有

$$F_{1,s} = \begin{cases} y_1, & s=0, \\ \Big[\sum_{k\geqslant 1} F_k y_{k+1}\Big]_{\boldsymbol{y}}^{s} = \sum_{k\geqslant 1}^{s-1} F_{k,s-k-1} y_{k+1}, & s\geqslant 0. \end{cases}$$

从而, 即得欲证的结论. □

根据这个引理, 看一看 $F_{1,3}$ 和 $F_{1,5}$ 的形式:

$$\begin{aligned} F_{1,3} &= \sum_{k=1}^{2} F_{k,2-k} y_{k+1} = F_{1,1}y_2 + F_{2,0}y_3 = y_1y_2 + ay_3, \\ F_{1,5} &= \sum_{k=1}^{4} F_{k,4-k} y_{k+1} = F_{1,3}y_2 + F_{2,2}y_3 + F_{3,1}y_4 + F_{4,0}y_5, \\ &= (y_1y_2 + ay_3)y_2 + y_2y_3 + (2y_1)y_4 + (2a)y_5 \\ &= y_1y_2^2 + (a+1)y_2y_3 + 2y_1y_4 + 2ay_5. \end{aligned}$$

当 $a=1$ 时, 可从后面的图 10.1.1 看出它们的一种实际意义.

由上面的两个引理, 下面只讨论 $m\geqslant 2$ 时的情形而不失一般性.

由式 (10.1.8), 对于任何给定的整数 $m\geqslant 2$, 有

$$F_{m,s} = \begin{cases} a\delta_{s,0} + \sum_{k=2}^{s} F_{k,s-k} y_k, & m=2, \\ (m-1)F_{m-2,s} + \sum_{k=m}^{s+m-2} F_{k,s-k+m-2} y_{k-m+2}, & m\geqslant 3. \end{cases} \tag{10.1.11}$$

引理 10.1.5 对于任何整数 $m\geqslant 2$ 和整数 $t\geqslant 1$, 有

$$F_{m,0} = \begin{cases} \dfrac{am!}{2^t t!}, & m=2t, \\ 0, & m=2t+1. \end{cases} \tag{10.1.12}$$

证明 由式 (10.1.11), 以及

$$\sum_{k=2}^{0} F_{k,s-k} y_k = 0, \quad \sum_{k=m}^{m-2} F_{k,s-k+m-2} y_{k-m+2} = 0,$$

对于 $m\geqslant 2$, 有

$$F_{m,0} = \begin{cases} a, & m=2, \\ (m-1)F_{m-2,0}, & m\geqslant 3. \end{cases}$$

由式 (10.1.10), 知 $F_{0,0}=a$. 由引理 10.1.4, 知 $F_{1,0}=0$.

对于任何整数 $m\geqslant 2$, 假设当 $0\leqslant i\leqslant m-1$ 时, $F_{i,0}=0$ 满足欲证的结论. 往证 $i=m$ 时的情形. 因为 $F_{m,0}=(m-1)F_{m-2,0}$, 从 $m\equiv m-2 \pmod 2$, 利用归纳假设知, 当 $m\equiv 1 \pmod 2$ 时, $F_{m,0}=0$; 当 $m=2t$ 时,

$$F_{m,s}=(2t-1)\frac{a(2t-2)!}{2^{t-1}(t-1)!}=\frac{a(2t-1)!}{2^{t-1}(t-1)!}=\frac{am!}{2^t t!}.$$

从而, 引理的结论得证. □

由此可见, $F_{m,0}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$ 当且仅当 $a\in\mathcal{R}_+$.

引理 10.1.6 对于任何整数 $m\geqslant 0$, 有

$$F_{m,1}=\begin{cases}0, & m=2t,\ t\geqslant 0,\\ y_1, & m=1,\\ 2^t t! y_1, & m=2t+1,\ t\geqslant 1.\end{cases}$$

证明 由引理 10.1.3 和引理 10.1.4, 分别给出 $F_{0,1}=0$ 和 $F_{1,1}=y_1$.

由式 (10.1.11), 以及

$$\sum_{k=2}^{1}F_{k,s-k}y_k=0,\quad \sum_{k=m}^{m-1}F_{k,s-k+m-2}y_{k-m+2}=0,$$

对于 $m\geqslant 2$, 有

$$F_{m,1}=\begin{cases}0, & m=2,\\ (m-1)F_{m-2,0}, & m\geqslant 3.\end{cases}$$

易知 $F_{0,1}=0$, $F_{1,1}=y_1$ 和 $F_{2,1}=0$. 当 $m\geqslant 3$ 时, 假设对于任何整数 $0\leqslant l\leqslant m-1$, 都有

$$F_{l,1}=\begin{cases}0, & l\equiv 0 \pmod 2,\\ 2^{\lfloor l/2\rfloor}\lfloor l/2\rfloor! y_1, & l\equiv 1 \pmod 2.\end{cases}$$

用数学归纳法, 往证 $F_{m,1}$ 满足引理的结论.

当 $m\equiv 0 \pmod 2$ 时, 因为 $m\equiv m-2 \pmod 2$, 从 $F_{m,1}=(m-1)F_{m-2,1}$, 用归纳假设, $F_{m-2,1}=0$, 即得 $F_{m,1}=0$.

当 $m\equiv 1 \pmod 2$ 时, 令 $t=\lfloor l/2\rfloor$, 则 $m=2t+1$. 从 $F_{m,1}=(m-1)F_{m-2,1}$, 得 $F_{2t+1,1}=(2t)F_{2t-1,1}=F_{2(t-1)+1}$. 用归纳假设, $F_{2t-1,1}=2^{t-1}(t-1)!y_1$, 即得 $F_{2t+1,1}=(2t)(2^{t-1}(t-1)!y_1)=2^t t! y_1$. 这就是欲证的结论. □

由引理 10.1.5 和引理 10.1.6, 我们下面可以只讨论 $s\geqslant 2$ 而不失一般性.

引理 10.1.7 给定两个整数 $m\geqslant 2$ 和 $s\geqslant 2$. 如果对于任何整数 $l,\ r\geqslant 0$, 只要 $l+r\leqslant m+s-1$, 就有 $F_{l,r}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$, 则

$$\sum_{k=m}^{s+m-2} F_{k,s-k+m-2}y_{k-m+2}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}.$$

证明 因为对任何整数 $m\leqslant k\leqslant m+s-2$, $k+(s-k+m-2)=m+s-2\leqslant m+s-1$, 由给定的条件, $F_{k,s-k+m-2}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$. 从而, 考虑到 $y_{k-m+2}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$, 即得欲证的结论. □

现在, 看一看, 从 $m+s=0$ 开始, 随着逐一递增的次序, 如何用式 (10.1.11) 确定 $F_{m,s}$.

当 $m+s=0$ 时, 只有 $F_{0,0}=a$, 已经由引理 10.1.3 给出. 当 $m+s=1$ 时, 只有 $F_{1,0}=0$ 和 $F_{0,1}=0$, 分别由引理 10.1.5 和引理 10.1.3 给出.

当 $m+s=2$ 时, 除 $F_{2,0}=a$ 和 $F_{0,1}=0$ 已知外, 只剩下 $F_{1,1}$. 由式 (10.1.11), $F_{1,1}=y_1$.

当 $m+s=3$ 时, 除 $F_{3,0}=0$(引理 10.1.5) 和 $F_{0,3}=0$(引理 10.1.3) 已知外, 只剩下 $F_{2,1}$ 和 $F_{1,2}$. 由式 (10.1.11), 知 $F_{2,1}=0$ 和 $F_{1,2}=F_{1,0}y_2=0$.

定理 10.1.2 方程式 (10.1.2) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中有且仅有一个解.

证明 从上面的计算已经看出, 当 $m+s$ 较小时, $F_{m,s}$ 可以由式 (10.1.11) 确定. 当 $m+s$ 很大时, 可以假设对于任何整数 $s,l,t\geqslant 0$, 使得 $l+t\leqslant m+s-1$, $F_{l,t}$ 都已经被确定. 用数学归纳法, 往求 $F_{m,s}$.

当 $m=2$ 时, 因为对任何整数 $k\geqslant 0$, $k+(s-k)=s\leqslant 2+s-1=s+1$, 由式 (10.1.11) 的第一式, $F_{k,s-k}$ $(2\leqslant k\leqslant s)$ 可被确定, 从而对任何整数 $m,\ s\geqslant 0$, $2+s=m+s$, $F_{2,s}$ 都可以被确定.

当 $m\geqslant 3$ 时, 因为 $(m-2)+s\leqslant m+s-1$, 以及对于任何整数 $k\geqslant 0$, $k+(s-k+m-2)=s+m-2\leqslant m+s-1$, 故由归纳假设知, $F_{m-2,s}$ 和所有 $F_{k,s-k+m-2}$ $(m\leqslant k\leqslant s+m-2)$ 都已被确定. 从而, 由式 (10.1.11) 的第二式, 所有 $F_{m,s}$ $(m\geqslant 3,\ s\geqslant 0)$ 都可以被确定.

因为所得的这些 $F_{m,s}$ 满足方程组式 (10.1.8), 由定理 10.1.1 知, 方程式 (10.1.2) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中有一个解. 考虑到这个求解过程对于始条件的唯一性, 这个解是仅有的. □

为了求出方程式 (10.1.2) 解的更简单的正项和表示, 还需要探究这个解的内在结构.

引理 10.1.8 对任何整数 $m,\ s\geqslant 0$, 如果 $m+s\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$, 则 $F_{m,s}=0$.

证明　从上面的计算已经看出, 当 $m+s$ 较小时, $F_{m,s}=0$, $m\not\equiv s(\bmod\ 2)$.

当 $m+s$ 较大时, 可以假设对于任何整数 $l,t\geqslant 0$, 如果 $l+t\leqslant m+s-1$, $m\not\equiv s(\bmod\ 2)$, 则 $F_{l,t}=0$. 用数学归纳法, 往证对任何整数 $m,s\geqslant 0$, 只要 $m\not\equiv s(\bmod\ 2)$, 就有 $F_{m,s}=0$. 通过上面的一些引理, 我们可只讨论 $m,s\geqslant 2$.

当 $m=2$ 时, 对于 $s\geqslant 2$, $s\not\equiv 0(\bmod\ 2)$, 因为对于任何整数 $k\geqslant 0$, $k+(s-k)=s\not\equiv 0(\bmod\ 2)$, $k+(s-k)=s\leqslant 2+s-1=s+1$, 用归纳假设, 可知 $F_{k,s-k}$=0. 从而, 由式 (10.1.11) 的第一式, 知 $F_{2,s}=0$.

当 $m\geqslant 3$ 时, 因为 $m+s\equiv 1(\bmod\ 2)$, $(m-2)+s\equiv m+s(\bmod\ 2)$, $k+(s-k+m-2)=s+m-2\equiv m+s(\bmod\ 2)$, 由 $(m-2)+s=m+s-2\leqslant m+s-1$ 和 $k+(s-k+m-2)=s+m-2\leqslant m+s-1$, 用归纳假设, 可知 $F_{m-2,s}=0$, $F_{k,s-k+m-2}=0$. 由式 (10.1.11) 的第二式, 知 $F_{m,s}=0$, 即得欲证的结论. □

在求方程式 (10.1.2) 的解时, 这个引理可使我们减少一半的工作量.

引理 10.1.9　对任何整数 m, $s\geqslant 0$, 如果 $m+s\equiv 0(\bmod\ 2)$, 则 $F_{m,s}$ 与 y_i $(i\geqslant s+1)$ 无关.

证明　给定 $s\geqslant 2$, 对于任何整数 $m\geqslant 2$ 和向量 $\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}_m$, 有

$$s=\sum_{i\geqslant 1} in_i \quad (n_i\in\mathbb{Z}_+,\ i\geqslant 0).$$

假若存在一个 y_i $(i\geqslant s+1)$ 与 $F_{m,s}$ 有关, 即 $n_i\geqslant 1$, 则 $s\geqslant in_i\geqslant s+1$. 这个矛盾表明, 在 $\mathcal{J}_{m,s}$ 中, 没有一个向量含 $n_i>0(i\geqslant s+1)$, 即得结论. □

这个引理告诉我们, $F_{m,s}$ 是一个 s 变元 $\boldsymbol{y}_s=(y_1,y_2,y_3,\cdots,y_s)$ 的函数.

引理 10.1.10　对任何整数 m, $s\geqslant 0$, 如果 $m+s\equiv 0(\bmod\ 2)$, 则 $F_{m,s}$ 是 $\boldsymbol{y}_s$ 的至多 s 次多项式.

证明　实际上, 就是证明, 对于任何 $\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}_{m,s}$, 有 $|\boldsymbol{n}|\leqslant s$. 令 $\mathcal{H}=\{\boldsymbol{n}|\boldsymbol{u}\geqslant\mathbf{0},\boldsymbol{in}^{\mathrm{T}}=s\}$. 因为

$$\max\{|\boldsymbol{n}|\forall\boldsymbol{n}\in\mathcal{H}\}=|s\mathbf{1}_1|=s,$$

$\mathcal{J}_{m,s}\subseteq\mathcal{H}$, 所以 $F_{m,s}$ 是 $\boldsymbol{y}$ 的一个至多 s 次多项式. □

引理 10.1.11　对任何整数 m, $s\geqslant 0$, $F_{m,s}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$ 当且仅当 $a\in\mathcal{R}_+$.

证明　当 $m+s$ 较小时, 已经计算出 $F_{m,s}$. 并且, 已经看出 $F_{m,s}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$ 当且仅当 $a\in\mathcal{R}_+$.

当 $m+s$ 较大时, 可以假设对于任何整数 $l,t\geqslant 0$, $l+t\leqslant m+s-1$, $F_{l,t}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$ 当且仅当 $a\in\mathcal{R}_+$. 用数学归纳法, 往证 $F_{m,s}$ 满足欲证的结论.

在式 (10.1.11) 的基础上, 用归纳假设和引理 10.1.1、引理 10.1.2 和引理 10.1.7, 即得 $F_{m,s}$ 满足欲证的结论. □

上面三个引理告诉我们, 对于任何两个给定的整数 m, $s\geqslant 0$, $F_{m,s}$ 是 $\boldsymbol{y}_s$ 的至多 s 次多项式, 并且当 $\boldsymbol{a}\in\mathcal{R}_+$ 时, $F_{m,s}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$.

定理 10.1.3 令 $\widetilde{f}^{\mathrm{el}}$ 为方程式 (10.1.2) 的一个解. 对于整数 m, $s\geqslant 0$, 记 $\widetilde{F}^{\mathrm{el}}_{m,n}=\left[\widetilde{f}^{\mathrm{el}}\right]^s_{\boldsymbol{y}}$ $(=E_{m,s})$, 则 $E_{m,s}$ 有如下有限正项和表示：

$$E_{m,s}=\begin{cases}a\delta_{0,s}, \quad s\geqslant 0,\ m=0,\\ 0, \quad m=0,\ s\geqslant 1, \text{或}\ m=1,\ s\geqslant 2,\ s\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2),\\ \qquad \text{或}\ s\geqslant 0,\ m\not\equiv s(\mathrm{mod}\ 2),\\ \dfrac{am!}{2^t t!}, \quad s=0, m=2t,\ t\geqslant 1,\\ y_1, \quad s=1,\ m=1,\\ 2^t t! y_1, \quad s=1,\ m=2t+1,\ t\geqslant 1,\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{s-1}E_{k,s-k-1}y_{k+1}, \quad s\geqslant 3(s\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)),\ m=1,\\ \displaystyle\sum_{k=2}^{s}E_{k,s-k}y_k, \quad s\geqslant 2\ (s\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)),\ m=2,\\ (m-1)E_{m-2,s}+\displaystyle\sum_{k=m}^{s+m-2}E_{k,s-k+m-2}y_{k-m+2},\\ \qquad m\geqslant 3,\ s\geqslant 2,\ m\equiv s(\mathrm{mod}\ 2).\end{cases} \tag{10.1.13}$$

证明 当 $s\geqslant 0$, $m=0$ 时, 利用引理 10.1.3. 当 $m=0$, $s\geqslant 1$, 或 $m=1$, $s\geqslant 2$, $s\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$, 或 $s\geqslant 0$, $m\not\equiv s(\mathrm{mod}\ 2)$ 时, 分别利用引理 10.1.3、引理 10.1.5 或引理 10.1.8. 当 $s=0$ 且 $m=2t$, $t\geqslant 1$ 时, 利用引理 10.1.5. 当 $s=1$ 且 $m=2t+1$, $t\geqslant 0$ 时, 利用引理 10.1.7. 当 $s\geqslant 3$ $(s\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2))$, $m=1$ 时, 利用引理 10.1.4. 当 $s\geqslant 2$ $(s\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2))$, $m=2$ 或 $m\geqslant 3$, $s\geqslant 2$, $m\equiv s(\mathrm{mod}\ 2)$ 时, 利用式 (10.1.11). □

继续看一看, 当 $4\leqslant m+s\leqslant 6$ 时, 如何利用式 (10.1.13) 求 $F_{m,s}$ $(=E_{m,s})$ 的值.

当 $m+s=4$ 时, 因为 $F_{4,0}=\dfrac{a4!}{2^t t!}=3a$ 和 $F_{0,4}=0$, 只需求 $F_{1,3}$, $F_{2,2}$ 和 $F_{3,1}$.

求 $F_{1,3}$. 由

$$F_{1,3}=\sum_{k=1}^{3-1}F_{k,2-k}y_{k+1}=F_{1,1}y_2+F_{2,0}y_3=y_1y_2+ay_3,$$

得 $F_{1,3}=y_1y_2+ay_3$.

求 $F_{2,2}$. 由

$$F_{2,2}=\sum_{k=2}^{2}F_{k,2-k}y_k=F_{2,0}y_2=ay_2,$$

得 $F_{2,2}=ay_2$.

求 $F_{3,1}$. 由

$$\begin{aligned}F_{3,1}&=2F_{1,1}+\sum_{k=3}^{1+3-2}F_{k,2-k}y_k\\&=2F_{1,1}=2y_1,\end{aligned}$$

得 $F_{3,1}=2y_1$.

当 $m+s=5$ 时, 由 $m\not\equiv s(\text{mod }2)$, 得 $F_{m,s}=0$.

当 $m+s=6$ 时, 因为 $F_{6,0}=\dfrac{a6!}{2^3 3!}=15a$, $F_{5,1}=2^2 2!y_1=8y_1$ 和 $F_{0,6}=0$, 故只需求 $F_{1,5}$, $F_{2,4}$, $F_{3,3}$ 和 $F_{4,2}$.

求 $F_{1,5}$. 由

$$\begin{aligned}F_{1,5}&=\sum_{k=1}^{5-1}F_{k,4-k}y_{k+1}\\&=F_{1,3}y_2+F_{2,0}y_3+F_{3,1}y_4+F_{4,0}y_5\\&=y_1y_2^2+(a+a)y_2y_3+2y_1y_4+2ay_5,\end{aligned}$$

得 $F_{1,5}=y_1y_2^2+2ay_2y_3+2y_1y_4+2ay_5$.

求 $F_{2,4}$. 由

$$\begin{aligned}F_{2,4}&=\sum_{k=2}^{4}F_{k,4-k}y_k\\&=F_{2,2}y_2+F_{3,1}y_3+F_{4,0}y_4\\&=(ay_2)y_2+(2y_1)y_3+(3a)y_4,\end{aligned}$$

得 $F_{2,4}=ay_2^2+2y_1y_3+3ay_4$.

求 $F_{3,3}$. 由

$$\begin{aligned}F_{3,3} &= 2F_{1,3} + \sum_{k=3}^{3+1} F_{k,3-k+1}y_{k-1} = F_{3,1}y_2 + F_{4,0}y_3 \\ &= 2(y_1y_2 + y_3) + (2y_1)y_2 + (3a)y_3,\end{aligned}$$

得 $F_{3,3} = 4y_1y_2 + (3a+2)y_3$.

求 $F_{4,2}$. 由

$$F_{4,2} = 3F_{2,2} + \sum_{k=4}^{6-2} F_{k,4-k}y_{k-2} = 3(ay_2) + F_{4,0}y_2,$$

得 $F_{4,2} = (3a+3a)y_2 = 6ay_2$.

例 10.1.1 联端的地图在曲面上以根点次和非根点剖分向量为参数的根同构分类. 所谓联端, 是指与根面关联的悬挂顶点. 方程式 (10.1.2), 如果取 $a=1$, 就变成了方程式 (10.1.1) . 因此, 若方程式 (10.1.1) 的解记为 $\widetilde{f}$, 就有 $\widetilde{f} = \widetilde{f}^{\mathrm{el}}\big|_{a=1}$. 对于任何整数 m, $s \geqslant 0$, 若记 $\widetilde{F}_{m,s} = \left[\partial_x^m \widetilde{f}\right]_{\boldsymbol{y}}^s$, 则由式 (10.1.13), 有

$$\widetilde{F}_{m,s} = \begin{cases} 1, & m=s=0, \\ 0, & m=0,\ s\geqslant 1 \text{ 或 } m \not\equiv s(\bmod 2)\ , \\ \dfrac{m!}{t!(t+1)!}, & s=0, m=2t,\ t\geqslant 1, \\ y_1, & m=s=1, \\ 2^t t! y_1, & s=1,\ m=2t+1,\ t\geqslant 1, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{s-1} \widetilde{F}_{k,s-k-1}y_{k+1}, & m\equiv 1,\ s\geqslant 2,\ s\equiv 1(\bmod 2), \\ \displaystyle\sum_{k=2}^{s} \widetilde{F}_{k,s-k}y_k, & m\equiv 2,\ s\geqslant 2,\ s\equiv 0(\bmod 2), \\ (m-1)\widetilde{F}_{m-2,s} + \displaystyle\sum_{k=m}^{s+m-2} \widetilde{F}_{k,s-k+m-2}y_{k-m+2}, & \\ & m\geqslant 3,\ s\geqslant 1,\ m\equiv s(\bmod 2). \end{cases} \tag{10.1.14}$$

例如, 前面已经得到 $F_{1,1} = y_1$, $F_{1,3} = y_1y_2 + ay_3$ 和 $F_{1,5} = y_1y_2^2 + 2ay_2y_3 + 2y_1y_4 + 2ay_5$. 取 $a=1$, 即得 $\widetilde{F}_{1,1} = y_1$, $\widetilde{F}_{1,3} = y_1y_2 + y_3$ 和 $\widetilde{F}_{1,5} = y_1y_2^2 + 2y_2y_3 + 2y_1y_4 + 2y_5$. 在图 10.1.1 中, $a = y_1 = \widetilde{F}_{1,1}$, $b+c = y_1y_2 + y_3 = \widetilde{F}_{1,3}$ 和 $d+(e+f)+2g+(i+j+k) = y_1y_2^2 + (2y_1y_3) + 2y_1y_4 + (3y_5) = \widetilde{F}_{1,5}$. 注意, 虽然 $h = y_1y_4$, 但因为有一个悬挂点不在根面上, 即不是联端, 故不在 $\widetilde{F}_{1,5}$ 中.

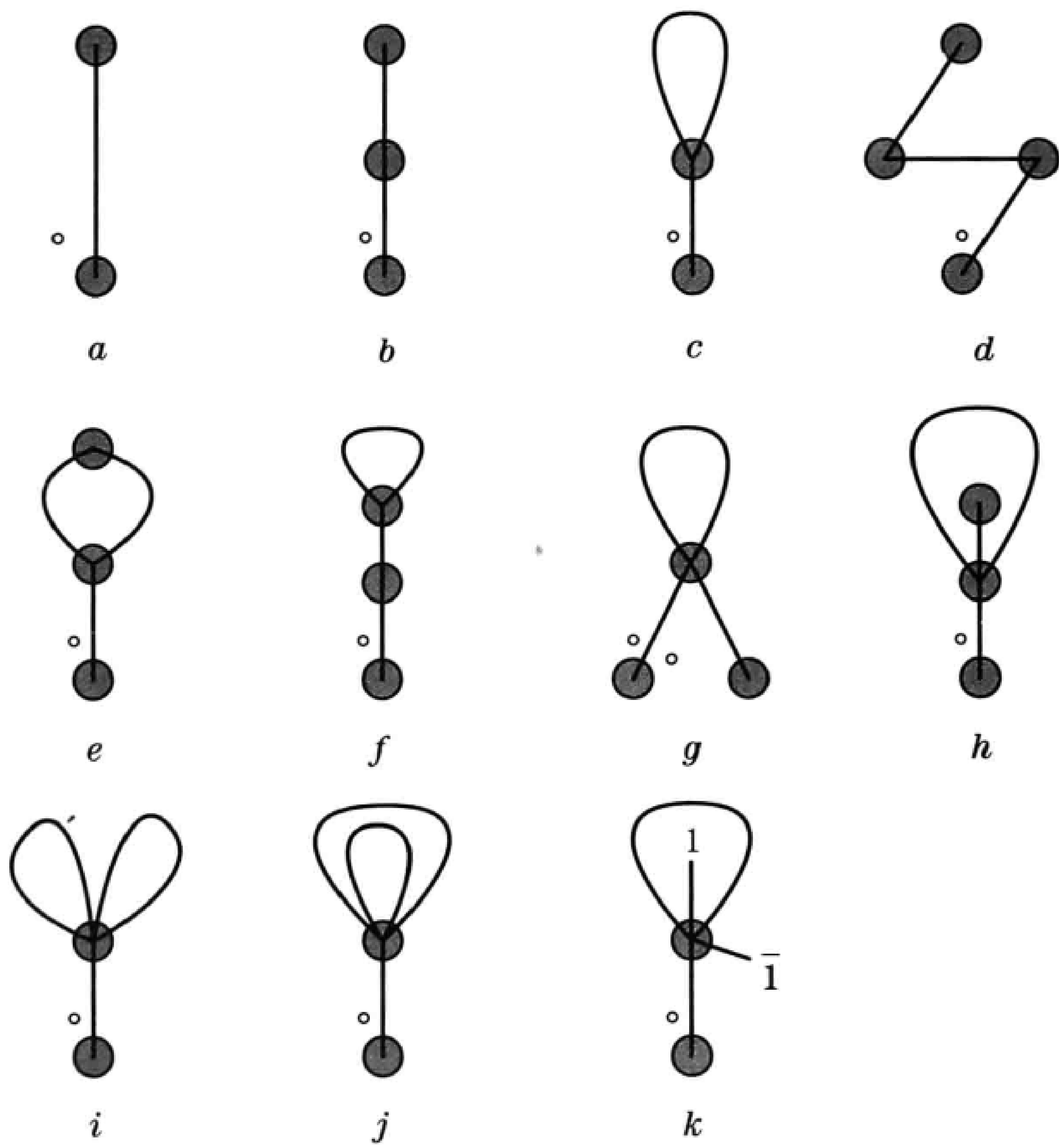


图 10.1.1　联端地图在曲面上依顶点剖分向量的根同构类

10.2　曲面无桥型

对于函数 $g \in \mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$, 考察方程

$$\begin{cases} x\int_{\boldsymbol{y}} y\big(\partial_{x,y}(g-a)\big|_{u=x}\big) = (1-x^2)g - x^3\dfrac{\partial g}{\partial x} - b, \\ g|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = a. \end{cases} \tag{10.2.1}$$

其中 $a,\ b \in \mathbb{Z}_+ \subseteq \mathcal{R}_+$.

在文献[65](180 页) 中, 可以看到形如式 (10.2.1) 的方程. 不过要注意, 在那里, 偏微分项的系数不是 x^2, 而是 x^3; 斜差分号 $\partial_{x,y}$ 下的 f 应为 $f-1$. 事实上, 方程式 (10.2.1) 与方程式 (10.1.1) 之间的不同, 除在介子泛函下的部分外, 还有

常数项. 方程式 (10.1.1) 的 $y\big(1+\partial_{x,y}(f-1)\big|_{u=x}\big)$, 在方程式 (10.2.1) 中变成了 $y\big(\partial_{x,y}(g-1)\big|_{u=x}\big)$.

对于整数 $m\geqslant 0$, 令 $G_m=\partial_x^m f$.

引理 10.2.1 如果 $b\neq a$, 则方程式 (10.2.1) 无解.

证明 设 g 的常数项为 G_0. 因为方程式 (10.2.1) 左端有因子 x, 常数项为 0, 右端的常数项为 G_0-b, 所以 $G_0-b=0$, 即 $G_0=b$. 然而, 由始条件, $G_0=a$. 因此, 当 $b\neq a$ 时, 方程式 (10.2.1) 无解. □

由这个引理, 我们可只讨论 $b=a$ 时的情形, 即方程

$$\begin{cases} x\displaystyle\int_y y\big(\partial_{x,y}(g-a)\big|_{u=x}\big)=(1-x^2)g-x^3\frac{\partial g}{\partial x}-a, \\ g|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=a. \end{cases} \tag{10.2.2}$$

为了便于求正项和形式的解, 将方程式 (10.2.1) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上等价地变为

$$\begin{cases} g=a+x^2g+x^3\dfrac{\partial g}{\partial x}+x\displaystyle\int_y y\big(\partial_{x,y}(g-a)\big|_{u=x}\big), \\ g|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=a. \end{cases} \tag{10.2.3}$$

对于整数 $m\geqslant 0$, 令 $G'_m=\partial_x^m\dfrac{\partial g}{\partial x}$, 则

$$G'_m=\begin{cases} G_1, & m=0, \\ (m+1)G_{m+1}, & m>0. \end{cases} \tag{10.2.4}$$

引理 10.2.2 对于任何整数 $m\geqslant 0$, 如果 $G_l\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}(0\leqslant l\leqslant m)$, 则 $G'_{m-1}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$.

证明 用式 (10.2.4), 得 $G'_{m-1}=mG_m$. 由前提条件, 知 $G_m\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$. 从而, $G'_{m-1}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$. 这就是所要证明的. □

令 $\Lambda_i=\partial_x^i\big(\partial_{x,y}G\big|_{u=x}\big)$ $(i\geqslant 0)$. 对于整数 $k\geqslant 1$,

$$\partial_{x,y}u^k=\frac{yx^k-xy^k}{x-y}=\sum_{j=0}^{k-2}x^{j+1}y^{k-1-j}=\sum_{j=1}^{k-1}x^jy^{k-j}.$$

注意, $\partial_{x,y}1=-1$. 由算子 $\partial_{x,y}$ 的线性性, 对于整数 $m\geqslant 0$, 有

$$\partial_x^m\big(y\partial_{x,y}(G-a)\big|_{u=x}\big)=\begin{cases} 0, & m=0,1 \\ \displaystyle\sum_{k\geqslant m+1}G_ky^{k-m+1}, & m\geqslant 2. \end{cases} \tag{10.2.5}$$

从而, 由介子泛函的线性性, 对于 $m \geqslant 0$, 有

$$\left[\int_y y\big(\partial_{x,y}(G-a)\big)\right]_x^m = \begin{cases} 0, & m=0,1, \\ \displaystyle\sum_{k\geqslant m+1} G_k y_{k-m+1}, & m\geqslant 1. \end{cases} \tag{10.2.6}$$

定理 10.2.1　在 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 上, 方程式 (10.2.3) 与关于 G_m $(m\geqslant 0)$ 的方程组

$$G_m = \begin{cases} a, & m=0, \\ 0, & m=1, \\ a+\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} G_k y_k, & m=2, \\ (m-1)G_{m-2}+\displaystyle\sum_{k\geqslant m} G_k y_{k-m+2}, & m\geqslant 3 \end{cases} \tag{10.2.7}$$

等价.

证明　因为在方程式 (10.2.3) 中, $x\big|(g-a)$, 故 $G_0=a$. 这就是方程的始条件. 当 $m=0$ 时, 式 (10.2.7) 成立. 由式 (10.2.6),

$$x^2\Big|\int_y y\big(\partial_{x,y}(G-a)\big).$$

从方程式 (10.2.3), 可知 $x^2\big|(g-a)$. 这就意味着 $G_1=[g]_x^1=0$. 当 $m=1$ 时, 式 (10.2.7) 成立. 对于 $m\geqslant 2$, 在式 (10.2.4) ~ 式 (10.2.6) 的基础上, 用方程式 (10.2.3), 就将方程式 (10.2.3) 等价地变为方程组式 (10.2.7).　□

为了能解出这个具有无穷未定元 G_m $(m\geqslant 0)$ 的方程组, 还需要引进一个新的参数 s, 使得将 G_m 中的项按照 s 所分类的计数函数都是多项式.

令 $\mathcal{J}_m$ 为由在 G_m 中有含 $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}$ $(\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3,\cdots))$ 的项的集合. 记 $\mathcal{J}_{m,s}=\{\boldsymbol{n}|\pi(\boldsymbol{n})=s\}\subseteq\mathcal{J}_m$, 则

$$\mathcal{J}_m=\sum_{s\geqslant 0}\mathcal{J}_{m,s}, \tag{10.2.8}$$

其中 $\pi(\boldsymbol{n})=\boldsymbol{i}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{i}=(1,2,3,\cdots,i,\cdots)$.

引理 10.2.3　对于任何整数 $s\geqslant 0$, 有

$$G_{0,s}=\begin{cases} a, & s=0, \\ 0, & s>0. \end{cases} \tag{10.2.9}$$

证明　因为 $G_0=a\in\mathcal{R}_+$ 是一个常数, 故 G_0 与 $s\geqslant 1$ 无关. 这就是 $G_{0,s}=0(s\geqslant 1)$.　□

若用 Kronecker 记号 $\delta_{s,t}$, 则由这个引理, $G_{0,s}=\delta_{0,s}$.

引理 10.2.4 对于任何整数 $s \geqslant 0$, 有 $G_{1,s}=0$.

证明 从方程组 (10.2.7) 的第二式, 即得欲证的结论. □

由上面的两个引理, 我们下面可只讨论 $m \geqslant 2$ 时的情形而不失一般性.

由式 (10.1.7), 对于任何给定的整数 $m \geqslant 2$ 和 $s \geqslant 0$, 有

$$G_{m,s}=\begin{cases} a\delta_{s,0}+\displaystyle\sum_{k=2}^{s} G_{k,s-k}y_k, & m=2, \\ (m-1)G_{m-2,s}+\displaystyle\sum_{k=m}^{s+m-2} G_{k,s-k+m-2}y_{k-m+2}, & m \geqslant 3. \end{cases} \tag{10.2.10}$$

引理 10.2.5 对于任何整数 $m \geqslant 2$, 有

$$G_{m,0}=\begin{cases} \dfrac{a(m)!}{2^t t!}, & m=2t, \\ 0, & m=2t+1, \end{cases} \tag{10.2.11}$$

其中整数 $t \geqslant 1$.

证明 由式 (10.2.10), 以及

$$\sum_{k=2}^{0} G_{k,s-k}y_k=0, \quad \sum_{k=m}^{m-2} G_{k,s-k+m-2}y_{k-m+2}=0,$$

对于 $m \geqslant 2$, 有

$$G_{m,0}=\begin{cases} a, & m=2, \\ (m-1)F_{m-2,0}, & m \geqslant 3. \end{cases}$$

由式 (10.2.9), 知 $G_{0,0}=a$. 由引理 10.2.4, 知 $G_{1,0}=0$.

对于任何整数 $m \geqslant 2$, 假设当 $0 \leqslant i \leqslant m-1$ 时, $G_{i,0}$ 满足欲证的结论. 往证 $i=m$ 时的情形. 因为 $G_{m,0}=(m-1)G_{m-2,0}$, 从 $m \equiv m-2 (\mathrm{mod}\ 2)$, 利用归纳假设知, 当 $m \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$ 时, $G_{m,0}=0$; 当 $m=2t$ 时,

$$G_{m,s}=(2t-1)\frac{a(2t-2)!}{2^{t-1}(t-1)!}=\frac{a(2t-1)!}{2^{t-1}(t-1)!}=\frac{am!}{2^t t!}.$$

从而, 引理的结论得证. □

由此可见, $G_{m,0} \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$ 当且仅当 $a \in \mathcal{R}_+$.

引理 10.2.6 对于任何整数 $m \geqslant 2$, 有 $G_{m,1}=0$.

证明　由引理 10.2.3 和引理 10.2.4, $G_{0,1}=G_{1,1}=0$. 当 $m=2$ 时, 由式 (10.2.10), 以及

$$\sum_{k=2}^{1}G_{k,1-k}y_k=0,\quad \sum_{k=m}^{m-1}G_{k,1-k+m-2}y_{k-m+2}=0,$$

当 $m=2$ 时, 有 $G_{2,1}=0$, 当 $m\geqslant 3$ 时, 有 $G_{m,1}=(m-1)G_{m-2,1}$. 假设对于任何整数 $0\leqslant l\leqslant m-1$, 都有 $G_{l,1}=0$. 用数学归纳法, 往证 $G_{m,1}=0$. 由归纳假设, $G_{m-2,1}=0$, 从而 $(m-1)G_{m-2,1}=0$, 即 $G_{m,1}=0$. □

由引理 10.2.5 和引理 10.2.6 允许, 我们下面可以只讨论 $s\geqslant 2$, 而不失一般性.

引理 10.2.7　给定两个整数 $m\geqslant 2$ 和 $s\geqslant 2$. 如果对于任何整数 l, $r\geqslant 0$, 只要 $l+r\leqslant m+s-1$, 就有 $G_{l,r}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$, 则

$$\sum_{k=m}^{s+m-2}G_{k,s-k+m-2}y_{k-m+2}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}.$$

证明　因为对任何整数 k, $m\leqslant k\leqslant m+s-2$, $k+(s-k+m-2)=m+s-2\leqslant m+s-1$, 由给定的条件, $G_{k,s-k+m-2}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$. 从而, 考虑到 $y_{k-m+2}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$, 即得欲证的结论. □

现在, 可以看一看, 如何从 $m+s=0$ 开始, 随着逐一递增的次序, 用式 (10.2.10) 确定 $G_{m,s}$.

当 $m+s=0$ 时, 只有 $G_{0,0}=a$, 已经由引理 10.2.3 给出. 当 $m+s=1$ 时, 有 $G_{1,0}=0$ 和 $G_{0,1}=0$, 分别由引理 10.2.4 和引理 10.2.3 给出.

当 $m+s=2$ 时, 除 $G_{2,0}=a$ 和 $G_{0,1}=0$ 已知外, 只剩下 $G_{1,1}$. 由引理 10.2.4, $G_{1,1}=0$.

当 $m+s=3$ 时, 除 $G_{3,0}=0$ (引理 10.2.4) 和 $G_{0,3}=0$ (引理 10.2.3) 已知外, 剩下 $G_{2,1}$ 和 $G_{1,2}$. 由式 (10.2.10), $G_{2,1}=0$; 由引理 10.2.6, $G_{1,2}=0$.

定理 10.2.2　方程式 (10.2.2) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中有且仅有一个解.

证明　从上面的计算已经看出, 当 $m+s$ 较小时, $G_{m,s}$ 可以由式 (10.2.10) 确定. 当 $m+s$ 很大时, 假设对于任何整数 $l,t\geqslant 0$ 使得 $l+t\leqslant m+s-1$, $G_{l,t}$ 都已经被确定. 用数学归纳法, 往求 $G_{m,s}$.

当 $m=2$ 时, 因为对任何整数 $k\geqslant 0$, $k+(s-k)=s\leqslant 2+s-1=s+1$, 由式 (10.2.10) 的第一式, $G_{k,s-k}$ $(2\leqslant k\leqslant s)$ 都已经被确定, 从而对任何整数 m, $s\geqslant 0$, $2+s=m+s$, $G_{2,s}$ 都可以被确定.

当 $m \geqslant 3$ 时, 因为 $(m-2)+s \leqslant m+s-1$ 且对于任何整数 $k \geqslant 0$, $k+(s-k+m-2)=s+m-2 \leqslant m+s-1$, 由归纳假设, $G_{m-2,s}$ 和所有 $G_{k,s-k+m-2}$ $(m \leqslant k \leqslant s+m-2)$ 都已被确定. 从而, 由式 (10.2.10) 的第二式, 所有 $G_{m,s}$ $(m \geqslant 3,\ s \geqslant 0)$ 都可以被确定.

因为所得的这些 $G_{m,s}$ 满足方程组式 (10.2.7), 由定理 10.2.1 知, 方程式 (10.2.2) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中有一个解. 考虑到求解过程对于始条件的唯一性, 这个解是仅有的. □

为了求出方程式 (10.2.2) 解的更简单的正项和表示, 还需要探究这个解的内在结构.

引理 10.2.8 对任何整数 $m,\ s \geqslant 0$, 如果 $m+s \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$, 则 $G_{m,s}=0$.

证明 从上面的计算已经看出, 当 $m+s$ 较小时, $G_{m,s}=0$, $m \not\equiv s(\mathrm{mod}\ 2)$.

当 $m+s$ 较大时, 假设对于任何整数 $l,t \geqslant 0$, 如果 $l+t \leqslant m+s-1$ 且 $m \not\equiv s(\mathrm{mod}\ 2)$, 则 $G_{l,t}=0$. 用数学归纳法, 往证对任何整数 $m,s \geqslant 0$, 只要 $m \not\equiv s(\mathrm{mod}\ 2)$, 就有 $G_{m,s}=0$. 通过上面的一些引理, 我们可只讨论 $m,s \geqslant 2$ 时的情形.

当 $m=2$ 时, 对于 $s \geqslant 2$, $s \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$, 因为对于任何整数 $k \geqslant 0$, $k+(s-k)=s \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$, $k+(s-k)=s \leqslant 2+s-1=s+1$, 用归纳假设, $G_{k,s-k}=0$. 从而, 由式 (10.2.10) 的第一式, $F_{2,s}=0$, $s \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$.

当 $m \geqslant 3$ 时, 因为 $m+s \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$, $(m-2)+s \equiv m+s(\mathrm{mod}\ 2)$, $k+(s-k+m-2)=s+m-2 \equiv m+s(\mathrm{mod}\ 2)$, 故由 $(m-2)+s=m+s-2 \leqslant m+s-1$ 和 $k+(s-k+m-2)=s+m-2 \leqslant m+s-1$, 用归纳假设, $G_{m-2,s}=0$, $G_{k,s-k+m-2}=0$. 由式 (10.2.10) 的第二式, $G_{m,s}=0$, 即得欲证的结论. □

求方程式 (10.2.2) 的解时, 这个引理可使我们减少一半的工作量.

引理 10.2.9 对任何整数 $m,\ s \geqslant 0$, 如果 $m+s \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$, 则 $G_{m,s}$ 与 y_1, y_i $(i \geqslant s+1)$ 无关.

证明 由引理 10.2.6 知, 所有 $G_{m,s}$ 都与 y_1 无关. 给定 $s \geqslant 2$, 对于任何整数 $m \geqslant 2$ 和向量 $\boldsymbol{n} \in \mathcal{J}_m$, 有

$$s=\sum_{i \geqslant 1} i n_i \quad (n_i \in \mathbb{Z}_+,\ i \geqslant 0).$$

假若存在一个 y_i $(i \geqslant s+1)$ 与 $G_{m,s}$ 有关, 即 $n_i \geqslant 1$, 则 $s \geqslant i n_i \geqslant (s+1)$. 这个矛盾表明, 在 $\mathcal{J}_{m,s}$ 中没有一个向量含 $n_i>0$ $(i \geqslant s+1)$, 即得欲证. □

这个引理告诉我们, $G_{m,s}$ 是 $\boldsymbol{y}_s=(0,y_2,y_3,\cdots,y_s)$ 的函数.

引理 10.2.10 对任何整数 m, $s \geqslant 0$, 如果 $m+s \equiv 0 \pmod 2$, 则 $G_{m,s}$ 是 $\boldsymbol{y}_s$ 的至多 s 次多项式.

证明 实际上, 就是证明, 对于任何 $\boldsymbol{n} \in \mathcal{J}_{m,s}$, 有 $|\boldsymbol{n}| \leqslant s$. 令 $\mathcal{H} = \{\boldsymbol{n}|\boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{0}, \boldsymbol{i}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}} = s\}$. 由

$$\max\{|\boldsymbol{n}| \forall \boldsymbol{n} \in \mathcal{H}\} = |s\mathbf{1}_1| = s,$$

$\mathcal{J}_{m,s} \subseteq \mathcal{H}$, 即知 $G_{m,s}$ 是 $\boldsymbol{y}$ 的一个至多 s 次多项式. □

结合上一个引理, 这个引理表明, 对于任何给定的整数 m, $s \geqslant 0$, $G_{m,s}$ 由有限项组成.

引理 10.2.11 对任何整数 m, $s \geqslant 0$, $G_{m,s} \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$ 当且仅当 $a \in \mathcal{R}_+$.

证明 当 $m+s$ 较小时, 已经计算出 $G_{m,s}$. 并且, 已经看出 $G_{m,s} \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$ 当且仅当 $a \in \mathcal{R}_+$.

当 $m+s$ 较大时, 假设对于任何整数 $l, t \geqslant 0$, $l+t \leqslant m+s-1$, $G_{l,t} \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$ 当且仅当 $a \in \mathcal{R}_+$. 用数学归纳法, 往证 $F_{m,s}$ 满足欲证的结论.

在式 (10.2.10) 的基础上, 用归纳假设、引理 10.2.1、引理 10.2.2 和引理 10.2.7, 即得 $G_{m,s}$ 满足欲证的结论. □

上面三个引理告诉我们, 对于任何两个给定的整数 m, $s \geqslant 0$, $G_{m,s}$ 是 $\boldsymbol{y}_s$ 的至多 s 次有限项多项式, 并且当 $a \in \mathcal{R}_+$ 时, $F_{m,s} \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$.

定理 10.2.3 令 $\widetilde{g}^{\mathrm{el}}$ 为方程式 (10.2.2) 的一个解. 对于整数 m, $s \geqslant 0$, 记 $\widetilde{G}^{\mathrm{el}}_{m,n} = \left[\widetilde{g}^{\mathrm{el}}\right]^s_{\boldsymbol{y}}$ $(= K_{m,s})$, 则 $K_{m,s}$ 有如下有限正项和表示:

$$K_{m,s} = \begin{cases} a\delta_{0,s}, \quad s \geqslant 0,\ m=0, \\ 0, \quad m=1,\ s\geqslant 1, \text{或 } s=1,\ m\geqslant 1, \text{或 } s\geqslant 0,\ m \not\equiv s \pmod 2, \\ \dfrac{am!}{2^t t!}, \quad s=0,\ m=2t,\ t\geqslant 1, \\ \displaystyle\sum_{k=2}^{s} K_{k,s-k} y_k, \quad s\geqslant 2\ (s\equiv 0 \pmod 2),\ m=2, \\ (m-1)K_{m-2,s} + \displaystyle\sum_{k=m}^{s+m-2} K_{k,s-k+m-2} y_{k-m+2}, \\ \qquad m\geqslant 3,\ s\geqslant 2\ (m\equiv s \pmod 2). \end{cases} \tag{10.2.12}$$

证明 由定理 10.2.2, 知 $K_{m,s} = G_{m,s}$. 当 $s \geqslant 0$, $m=0$ 时, 利用式 (10.2.9).

当 $m=1$, $s\geqslant 1$, 或 $s=1$, $m\geqslant 1$, 或 $s\geqslant 0$, $m\not\equiv s(\text{mod } 2)$ 时, 分别利用引理 10.2.4、引理 10.2.6 或引理 10.2.8. 当 $s=0$, $m=2t$, $t\geqslant 1$ 时, 利用引理 10.2.5.

当 $s\geqslant 2$ ($s\equiv 0(\text{mod } 2)$), $m=2$, 或 $m\geqslant 3$, $s\geqslant 2$, $m\equiv s(\text{mod } 2)$ 时, 分别利用式 (10.2.10) 的第一式和第二式. □

继续看一看, 当 $4\leqslant m+s\leqslant 6$ 时, 利用式 (10.2.12) 如何求 $G_{m,s}$ 的值.

当 $m+s=4$ 时, 因为 $F_{4,0}=\dfrac{a4!}{2^t t!}=3a$, $F_{3,1}=0$, $F_{1,3}$ 和 $F_{0,4}=0$, 只需求 $F_{2,2}$.

求 $F_{2,2}$. 由

$$F_{2,2}=\sum_{k=2}^{2}F_{k,2-k}y_k=F_{2,0}y_2=ay_2,$$

得 $F_{2,2}=ay_2$.

当 $m+s=5$ 时, 由 $m\not\equiv s(\text{mod } 2)$, 得 $F_{m,s}=0$.

当 $m+s=6$ 时, 因为 $F_{6,0}=\dfrac{a6!}{2^3 3!}=15a$, $F_{5,1}=0$, $F_{1,5}=0$ 和 $F_{0,6}=0$, 只需求 $F_{2,4}$, $F_{3,3}$ 和 $F_{4,2}$.

求 $F_{2,4}$. 由

$$F_{2,4}=\sum_{k=2}^{4}F_{k,4-k}y_k=F_{2,2}y_2+F_{3,1}y_3+F_{4,0}y_4=(ay_2)y_2+(3a)y_4,$$

得 $F_{2,4}=ay_2^2+3ay_4$.

求 $F_{3,3}$. 由

$$F_{3,3}=2F_{1,3}+\sum_{k=3}^{3+1}F_{k,3-k+1}y_{k-1}=F_{3,1}y_2+F_{4,0}y_3=2y_3+(3a)y_3,$$

得 $F_{3,3}=(3a+2)y_3$.

求 $F_{4,2}$. 由

$$F_{4,2}=3F_{2,2}+\sum_{k=4}^{6-2}F_{k,4-k}y_{k-2}=3(ay_2)+F_{4,0}y_2,$$

得 $F_{4,2}=(3a+3a)y_2=6ay_2$.

例 10.2.1 在曲面上, 无桥地图以根点次和非根点剖分向量为参数的根同构分类. 所谓无桥, 是指没有割棱. 若在方程式 (10.2.1) 中, 取 $a=1$, 则所得方程的解就提供了这类地图的根同构类数.

如果在方程式 (10.1.1) 中删去 y_1, 则它的解变为

$$\hat{G}_{m,s}=\begin{cases} a, \quad m=s=0, \\ 0, \quad m=0,\ s\geqslant 1, \text{或 } m\neq s(\bmod 2), \text{或 } m=1,\ s\geqslant 0, \text{或 } s=1,\ m\geqslant 0, \\ \dfrac{am!}{2^t t!}, \quad s=0, m=2t,\ t\geqslant 1, \\ \displaystyle\sum_{k=2}^{s}\hat{G}_{k,s-k}y_k, \quad m=2,\ s\geqslant 2, \\ (m-1)\hat{G}_{m-2,s}+\displaystyle\sum_{k=m}^{s+m-2}\hat{G}_{k,s-k+m-2}y_{k-m+2}, \quad m\geqslant 3,\ s\geqslant 1. \end{cases} \tag{10.2.13}$$

这与式 (10.2.12) 一致.

用式 (10.2.13), 对于 $0\leqslant m+s\leqslant 6$, 求 $H_{m,s}=\hat{G}_{m,s}\big|_{a=1}$, 即棱数 $(m+s)/2$, 以顶点剖分为参数的曲面无桥 (割棱) 地图的根同构类的分布.

当 $m+s=0$ 时, 只有 $H_{0,0}=1$.

当 $m+s=2$ 时, 只有 $H_{2,0}=1$.

当 $m+s=4$ 时, 有 $H_{4,0}=3$, $H_{2,2}=y_2$.

当 $m+s=6$ 时, 有 $H_{6,0}=15$, $H_{4,2}=6y_2$, $H_{3,3}=3y_3$, $H_{2,4}=y_2^2+3y_4$.

在图 10.2.1 中, 提供了两条棱和三条棱的无桥 (割棱) 地图的根同构类.

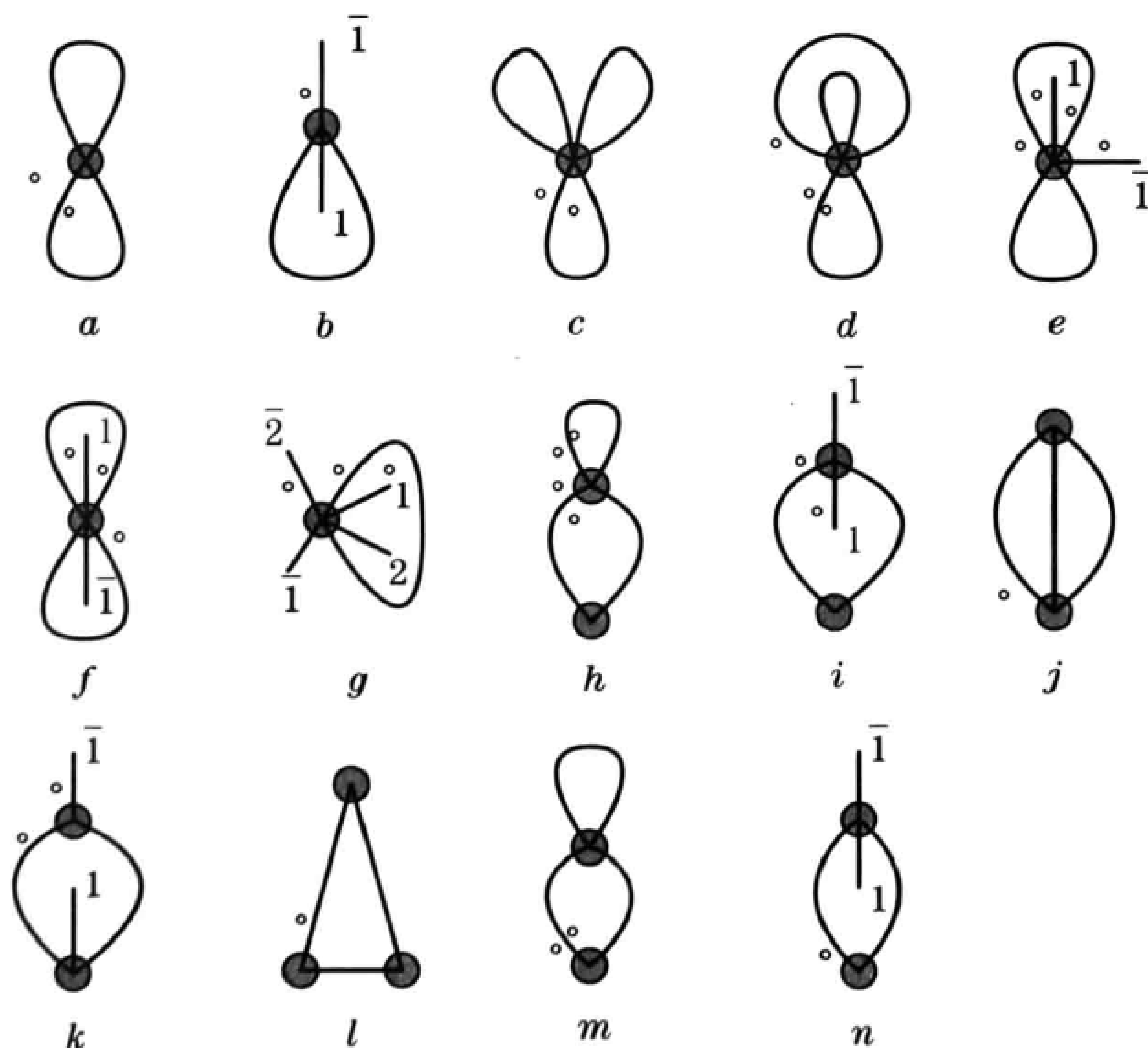


图 10.2.1　无桥地图在曲面上依顶点剖分向量的根同构类

例如, $2a+b=3=H_{4,0}$, $H_{2,2}=y_2$(未在图中画出), $2c+3d+4e+3f+3g=15=H_{6,0}$, $4h+i=4y_2+2y_2=6y_2=H_{4,2}$, $j+2k=y_3+2y_3=3y_3=H_{3,3}$, $l+2m+n=y_2^2+2y_4+y_4=y_2^2+3y_4=H_{2,4}$.

10.3 曲面无环型

对于函数 $f\in\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$, 讨论方程

$$\begin{cases} f=b+xf\int_y yf\big|_{x=y}+x\sum_{i\geqslant 1}\int_y y\Big(y\dfrac{\partial f\big|_{y_i=y^i}}{\partial y}\Big), \\ f|_{x=0\Rightarrow \boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=a, \end{cases} \tag{10.3.1}$$

其中 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3,\cdots)$, $a,\ b\in\mathcal{R}_+$.

在文献[67](204 页) 中的方程式 (7.4.8), 或本书方程式 (7.5.1) 的第一式, 是关于一个二元函数的偏微分方程. 这个函数与曲面上无环地图根同构分类有关. 方程式 (10.3.1) 则是关于无限个变元的函数. 因为同样与曲面上无环地图根同构分类有关, 而且两者源自同一个无限集合的分解原理, 故也称这个介子泛函方程为曲面无环型的.

引理 10.3.1 如果 $b\neq a$, 则方程式 (10.3.1) 无解.

证明 因为 $f-b$ 有一个因子 x, 故 $f-b$ 的常数项 F_0-b 只能为 0, 其中 F_0 是 f 的常数项. 这就导致 $F_0=b$. 然而, 由方程式 (10.3.1) 的始条件, $F_0=a$. 因此, 当 $b\neq a$ 时, 方程式 (10.3.1) 无解. □

因此, 下面凡提到方程式 (10.3.1), 均指 $b=a$. 这就是方程

$$\begin{cases} f=a+xf\int_y yf\big|_{x=y}+x\sum_{i\geqslant 1}\int_y y\Big(y\dfrac{\partial f\big|_{y_i=y^i}}{\partial y}\Big), \\ f|_{x=0\Rightarrow \boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=a\in\mathcal{R}_+. \end{cases} \tag{10.3.2}$$

因为 $f\in\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$, 故 f 由 $F_m=\partial_x^m f=[f]_x^m\in\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}(m\geqslant 0)$ 确定. 令

$$\alpha=xf\int_y yf\big|_{x=y},\quad \beta=x\sum_{i\geqslant 1}\int_y y\Big(y\frac{\partial f\big|_{y_i=y^i}}{\partial y}\Big), \tag{10.3.3}$$

则因为 $\alpha,\beta\in\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$, 只需要确定 $A_m=\partial_x^m\alpha\ (m\geqslant 0)$ 和 $B_m=\partial_x^m\beta\ (m\geqslant 0)$.

为此, 先要找出它们与 $F_m\ (m\geqslant 0)$ 的合适关系.

对于任何整数 $m\geqslant 0$,

$$A_m=\Big[x\int_y yf\big|_{x=y}\Big]_x^m=\Big[f\int_y yf\big|_{x=y}\Big]_x^{m-1}=F_{m-1}\int_y yf\big|_{x=y}.$$

通过展开介子泛函, 即得

$$A_m=\begin{cases}0, & m=0,\\ F_{m-1}\displaystyle\sum_{i\geqslant 1}F_{i-1}y_i, & m\geqslant 1.\end{cases}\tag{10.3.4}$$

为了求 β, 需要将介子下的部分展开. 由

$$\begin{aligned}\frac{\partial f\big|_{y_i=y^i}}{\partial y}&=\frac{\partial f\big|_{y_i=y^i}}{\partial y_i}\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}y}\quad\Big(\text{用 }\frac{\partial f\big|_{y_i=y^i}}{\partial y^i}=\frac{\partial f}{\partial y_i}\Big)\\&=iy^{i-1}\frac{\partial f}{\partial y_i},\end{aligned}$$

且 $B_0=B_1=0$, 对于任何整数 $m\geqslant 2$, 有

$$\begin{aligned}B_m&=\Big[\sum_{i\geqslant 1}\int_y y\Big(y\frac{\partial f\big|_{y_i=y^i}}{\partial y}\Big)\Big]_x^{m-1}\\&=\sum_{i\geqslant 1}\int_y y\Big(y\frac{\partial F_{m-1}\big|_{y_i=y^i}}{\partial y}\Big)\quad\Big(\text{用 }\frac{\partial f\big|_{y_i=y^i}}{\partial y}=iy^{i-1}\frac{\partial f}{\partial y_i}\Big)\\&=\sum_{i\geqslant 1}iy_{i+1}\frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_i}.\end{aligned}\tag{10.3.5}$$

定理 10.3.1 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上关于 f 的方程式 (10.3.2), 与在 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 上关于 $F_m\ (m\geqslant 0)$ 的方程组

$$F_m=\begin{cases}a, & m=0,\\ a\displaystyle\sum_{i\geqslant 1}F_{i-1}y_i, & m=1,\\ F_{m-1}\displaystyle\sum_{i\geqslant 1}F_{i-1}y_i+\sum_{i\geqslant 1}iy_{i+1}\frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_i}, & m\geqslant 2\end{cases}\tag{10.3.6}$$

等价.

证明 由方程 (10.3.2) 的第一式和式 (10.3.3), 知 $f=a+\alpha+\beta$. 从而, 对于任何整数 $m\geqslant 0$, 有 $F_m=a\delta_{0,m}+A_m+B_m$.

当 $m=0$ 时, 由 $A_0=B_0=0$ 和 $\delta_{0,0}=1$, 有 $F_0=a$, 这就是方程式 (10.3.2) 的始条件.

当 $m=1$ 时, 从式 (10.3.4), 知

$$A_1=F_0\sum_{i\geqslant 1}F_{i-1}y_i=a\sum_{i\geqslant 1}F_{i-1}y_i.$$

从式 (10.3.5), 知

$$\begin{aligned}B_1&=\sum_{i\geqslant 1}iy_{i+1}\frac{\partial F_0}{\partial y_i}\quad \left(\text{用 } F_0=a\Rightarrow\frac{\partial F_0}{\partial y_i}=0\right)\\&=0.\end{aligned}$$

从而, 得式 (10.3.6) 的第二式.

当 $m\geqslant 2$ 时, 用式 (10.3.4) 和式 (10.3.5), 即得式 (10.3.6) 的第三式.

从而, 定理的结论得证. □

因为 F_m $(m\geqslant 1)$ 都是无限和, 这给直接解方程组式 (10.3.6) 带来了困难. 如何引入一个新的参数 s, 使得 $F_{m,s}$ 成为有限和, 就是下面要讨论的.

对于任何整数 $m\geqslant 0$ 和 $s\geqslant 0$, 令 $F_{m,s}=\left[f\right]_x^m\big|_{\pi(\boldsymbol{y})=s}=\left[F_m\right]_{\boldsymbol{y}}^s$. 这里还是取 $s=\pi(\boldsymbol{y})$, 或 $\pi(\boldsymbol{n})=\boldsymbol{i}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}$, 其中, $\boldsymbol{n}$ 为 $\boldsymbol{y}$ 的幂向量. 因为 $F_m\in\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$, 故 $F_{m,s}\in\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}|\pi(\boldsymbol{y})=s\}$.

为了弄清 $F_{m,s}$, 先要考察 $A_{m,s}$ 和 $B_{m,s}$.

关于 $A_{m,s}$, 由式 (10.3.4) 的第一式, 对于任何整数 $s\geqslant 0$, $A_{0,s}=0$, 所以只需考虑 $m\geqslant 1$ 时的情形. 由式 (10.3.4) 的第二式,

$$\begin{aligned}A_{m,s}&=\left[F_{m-1}\sum_{i\geqslant 1}F_{i-1}y_i\right]_{\boldsymbol{y}}^s=\left[\sum_{i\geqslant 1}F_{m-1}F_{i-1}y_i\right]_{\boldsymbol{y}}^s\\&=\sum_{i\geqslant 1}\left[F_{m-1}F_{i-1}\right]_{\boldsymbol{y}}^{s-i}y_i\quad(\text{用 } s-i\geqslant 0\Rightarrow i\leqslant s)\\&=\sum_{i=1}^{s}\left[F_{m-1}F_{i-1}\right]_{\boldsymbol{y}}^{s-i}y_i\quad(\text{分配 } s-i \text{ 到 } F_{m-1} \text{ 和 } F_{i-1})\\&=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{s-i}F_{m-1,s-i-j}F_{i-1,j}y_i.\end{aligned}\tag{10.3.7}$$

引理 10.3.2 对于任何整数 $m,s\geqslant 0$, 如果 $F_{r,t}$ $(r+t\leqslant m+s-1,\ r,t\geqslant 0)$ 都已经得到, 则 $A_{m,s}$ 就被确定了.

证明 由式 (10.3.4) 即可看出. □

关于 $B_{m,s}$, 因为 $B_0=B_1=0$, 对于任何整数 $s\geqslant 0$, $B_{0,s}=B_{1,s}=0$, 故只需考虑 $m\geqslant 2$ 时的情形. 由式 (10.3.5), 对于整数 $s\geqslant 0$,

$$\begin{aligned} B_{m,s} &= \Big[\sum_{i\geqslant 1} iy_{i+1}\frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_i}\Big]_{\boldsymbol{y}}^{s} \\ &= \sum_{i\geqslant 1} iy_{i+1}\Big[\frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_i}\Big]_{\boldsymbol{y}}^{s-i-1} \quad (\text{用 } s-i-1\geqslant 0 \Rightarrow i\leqslant s-1) \\ &= \sum_{i=1}^{s-1} iy_{i+1}\Big[\frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_i}\Big]_{\boldsymbol{y}}^{s-i-1} \quad \Big(\text{由 } \pi\Big(\frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_i}\Big)=\pi(F_{m-1})-i\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{s-1} iy_{i+1}\frac{\partial F_{m-1,s-1}}{\partial y_i}. \end{aligned} \tag{10.3.8}$$

引理 10.3.3 对于任何整数 $m,s\geqslant 0$, 如果 $F_{r,t}$ $(r+t\leqslant m+s-1,\ r,t\geqslant 0)$ 都已经得到, 则 $B_{m,s}$ 就被确定了.

证明 由式 (10.3.5) 即可看出. □

在式 (10.3.7) 和式 (10.3.8) 的基础上, 对于整数 $m\geqslant 1$, 从 $F_m=A_m+B_m$, 即将方程组式 (10.3.6) 变为

$$F_{m,s}=\begin{cases} a\delta_{0,s}, & m=0, \\ a\displaystyle\sum_{i=1}^{s} F_{i-1,s-i}y_i, & m=1, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{s-i} F_{m-1,s-i-j}F_{i-1,j}y_i+\sum_{i=1}^{s-1} iy_{i+1}\frac{\partial F_{m-1,s-1}}{\partial y_i}, & m\geqslant 2. \end{cases} \tag{10.3.9}$$

在此基础上, 先求 $F_{m,s}$ $(m+s\leqslant 3,\ m,s\geqslant 0)$. 当 $m+s=0$ 时, 只能 $m=s=0$. 由式 (10.3.9) 的第一式, $F_{0,0}=a$.

当 $m+s=1$ 时, 因为 $F_{0,1}=0$, 只剩下 $F_{1,0}$. 由式 (10.3.9) 的第二式, $F_{1,0}=0$.

当 $m+s=2$ 时, 有 $F_{0,2}$, $F_{1,1}$ 和 $F_{2,0}$. 由式 (10.3.9) 的第一式, $F_{0,2}=0$; 由式 (10.3.9) 的第三式, $F_{2,0}=0$; 由式 (10.3.9) 的第二式, 有 $F_{1,1}=aF_{0,0}y_1=a^2y_1$.

当 $m+s=3$ 时, 有 $F_{0,3}$, $F_{1,2}$, $F_{2,1}$ 和 $F_{3,0}$. 由式 (10.3.9) 的第一式, $F_{0,3}=0$; 由式 (10.3.9) 的第二式, $F_{1,2}=F_{0,1}y_1+F_{1,0}y_2=0$; 由式 (10.3.9) 的第三式, $F_{2,1}=F_{1,0}F_{0,0}y_1=0$, $F_{3,0}=0$.

定理 10.3.2 方程式 (10.3.2) 在 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 中有且仅有一个解.

证明 首先, 求出一个满足式 (10.3.9) 的解, 从而由定理 10.3.1, 即得方程式 (10.3.2) 的一个解.

根据上面求 $F_{m,s}$ 的过程可以看出, 当 $m+s\leqslant 3$ 时, $F_{m,s}$ 都已经被确定. 对于 $m+s\geqslant 4$ 时的一般情形, 假设 $F_{r,t}$ $(r+t\leqslant m+s-1,\ m,s\geqslant 0)$ 都已被确定. 用数学归纳法, 往证 $F_{m,s}$ 可以被确定.

当 $m=0$ 时, 用式 (10.3.9) 的第一式, $s\geqslant 4$, $F_{0,s}=0$.

当 $m=1$ 时, 因为对于任何整数 $1\leqslant i\leqslant 5$, $(i-1)+(s-i)=s-1\leqslant s=(1+s)-1=m+s-1$, 由归纳假设, 用式 (10.3.9) 的第二式, 即得 $F_{1,s}$.

当 $m\geqslant 2$ 时, 因为对于 $1\leqslant i\leqslant s$ 和 $0\leqslant j\leqslant s-i$, $(m-1)+(s-i-j)=m+s-i-j-1\leqslant M+s-i-1\leqslant m+s-2\leqslant m+s-1$, $(i-1)+j\leqslant (i-1)+s-i=s-1\leqslant m+s-1$, 用归纳假设, 在式 (10.3.9) 的第三式中的第一项求和就被确定了. 由于 $(m-1)+(s-1)=m+s-2\leqslant m+s-1$, 用归纳假设, 在式 (10.3.9) 的第三式中的第二项求和就被确定了. 从而, $F_{m,s}$ 被确定了. 由 m 和 s 的任意性, 即得方程组式 (10.3.6) 的一组解. 由定理 10.3.1, 即得方程式 (10.3.2) 的一个解.

考虑到方程组式 (10.3.9) 的解对于始值的唯一性, 这个解是仅有的. □

为了看一看这个解中每一个 $F_{m,s}$ 是否有有限正项和表示, 还需要进一步地了解其内在结构.

引理 10.3.4 对于任何整数 $s\geqslant 0$, 有

$$F_{0,s}=\begin{cases} a, & s=0, \\ 0, & s\geqslant 1. \end{cases} \tag{10.3.10}$$

证明 这就是式 (10.3.9) 的第一式. □

由这个引理, 我们可以只讨论 $m\geqslant 1$ 而不失一般性.

引理 10.3.5 对于任何整数 $m\geqslant 0$, 有

$$F_{m,0}=\begin{cases} a, & m=0, \\ 0, & m\geqslant 1. \end{cases} \tag{10.3.11}$$

证明 由引理 10.3.4, 只需讨论 $m\geqslant 1$ 时的情形. 当 $m=1$ 时, 用式 (10.3.9) 的第二式, 知 $F_{1,0}=0$. 当 $m\geqslant 2$ 时, 因为式 (10.3.9) 的第三式中的两个和式都为 0, 故 $F_{m,0}=0$. □

由以上两个引理, 我们下面可只讨论 $m\geqslant 1$ 和 $s\geqslant 1$ 时的情形而不失一般性.

引理 10.3.6 对于任何整数 $m,s\geqslant 0$, 只要 $m+s\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$, 就有 $F_{m,s}=0$.

证明 当 $m=0$ 时, 由引理 10.3.4, 知 $F_{0,2t+1}=0$ $(t\geqslant 0)$. 当 $s=0$ 时, 由引理 10.3.5, 知 $F_{2t+1,0}=0$ $(t\geqslant 0)$. 当 $m+s\leqslant 3$ 时, 从已算出的结果, 可以验证欲证的

结论无误. 对于 $m+s\geqslant 4$ 时的一般情形, 假设 $F_{r,t}=0$, $r+t\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)(r+t\leqslant m+s-1,\ r,t\geqslant 0)$. 往证 $F_{m,s}=0$, $m+s\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$.

当 $m=1$ 时, 因为 $1+s\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)\Rightarrow s\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$, 故可令 $s=2l\ (l\geqslant 1)$. 由式 (10.3.9) 的第二式, 从 $(i-1)+(s-i)=s-1\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)\Rightarrow s\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$ 和 $s-1\leqslant (1+s)-1$, 根据归纳假设, 对于任何 $1\leqslant i\leqslant s$, 有 $F_{i-1,s-i}=0$, 从而 $F_{1,s}=F_{1,2l}=0$.

当 $m\geqslant 2$ 时, 用式 (10.3.9) 的第三式. 对于 $0\leqslant j\leqslant s-i$, $1\leqslant i\leqslant s$, $\big((m-1)+(s-i-j)\big)+\big((i-1)+j\big)=m+s-2$, $m+s\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)\Rightarrow m+s-2\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)\Rightarrow (m-1)+(s-i-j)\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$, 即 $(i-1)+j\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$. 由于 $(m-1)+(s-i-j)\leqslant m+s-1$ 和 $(i-1)+j\leqslant m+s-1$, 用归纳假设, $F_{m-1,s-i-j}F_{i-1,j}=0$. 这就导致第一个求和项为 0. 又因为 $(m-1)+(s-1)=m+s-2$, $m+s\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)\Rightarrow (m-1)+(s-1)\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$ 和 $(m-1)+(s-1)\leqslant m+s-1$, 用归纳假设, $F_{m-1,s-1}=0$. 这又导致第二个求和项为 0. 从而, $F_{m,s}=0$. □

这个引理使得求解的工作量减少了一半. 下面还可进一步减少工作量.

引理 10.3.7 对于任何整数 $m,s\geqslant 0$, 只要 $s\leqslant m-1$, 就有 $F_{m,s}=0$.

证明 已经知道, 当 $m=1$ 时, $F_{1,0}=0$, 当 $m=2$ 时, $F_{2,0}=F_{2,1}=0$. 对于任何整数 $m\geqslant 3$, 假设 $F_{r,0}=F_{r,1}=\cdots=F_{r,r-1}=0\ (0\leqslant r\leqslant m-1)$.

用数学归纳法, 往证 $F_{m,0}=F_{m,1}=\cdots=F_{m,m-1}=0$, 即 $F_{m,s}=0\ (s\leqslant m-1)$. 当 $m\geqslant 3$ 时, 用式 (10.3.9) 的第三式. 由 $m-s\geqslant 1$, 对于任何 $0\leqslant j\leqslant s-i$, $1\leqslant i\leqslant s$, 有

$$(m-1)-(s-i-j)=m-s+i+j-1\geqslant i+j.$$

用归纳假设, $F_{m-1,s-i-j}=0\ (0\leqslant j\leqslant s-i,\ 1\leqslant i\leqslant s)$. 从而,

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{s-i}F_{m-1,s-i-j}F_{i-1,j}y_i=0.$$

这就是式 (10.3.9) 的第三式中第一个求和项. 用归纳假设, $F_{m-1,s-1}=0$, 从而式 (10.3.9) 的第三式中第二个求和项为 0. 由此即得 $F_{m,s}=0\ (m-s\geqslant 1)$. □

在引理 10.3.6 的基础上, 这个引理又进一步减少了求 $F_{m,s}\ (m,s\geqslant 0)$ 近半的工作量.

引理 10.3.8 对于任何整数 $m,s\geqslant 0$, $F_{m,s}$ 与 $y_l(l\geqslant s+1)$ 无关.

证明 当 $m+s\leqslant 3$ 时, 从已经得到的结果可以看出, 这时所有 $F_{m,s}$ 都至多与 y_s 有关.

对于 $m+s\geqslant 4$ 时的一般情形, 假设 $F_{r,t}$ $(r+t\leqslant m+s-1,\ r,t\geqslant 0)$ 都至多与 y_t 有关. 用数学归纳法, 往证 $F_{m,s}$ 至多与 y_s 有关.

当 $m=0$ 时, 由始条件即知, 这种情形不足道. 当 $m=1$ 时, 利用式 (10.3.9) 的第二式. 因为对于任何 $1\leqslant i\leqslant s$, $(i-1)+(s-i)=s-1\leqslant(1+s)-1=s$, 由归纳假设, 所有 $F_{i-1,s-i}$ 至多与 y_{s-1} 有关. 但在

$$F_{1,s}=a\sum_{i=1}^{s}F_{i-1,s-i}y_i$$

中有 y_s, 即得 $F_{1,s}$ 至多与 y_s 有关.

当 $m\geqslant 2$ 时, 利用式 (10.3.9) 的第三式. 因为 $(m-1)+(s-i-j)=m+s-i-j-1\leqslant m+s-1$ 和 $(i-1)+j\leqslant(i-1)+(s-i)=s-1\leqslant m+s-1$, 由归纳假设, 在 $F_{m,s}$ 的第一个求和项

$$\Sigma_1=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{s-i}F_{m-1,s-i-j}F_{i-1,j}y_i$$

中, 每个 y_i 的系数都至多与 y_s 有关. 在这些 y_i 中, 下标最大的为 y_s. 从而, Σ_1 至多与 y_s 有关. 由于 $(m-1)+(s-1)=m+s-2\leqslant m+s-1$, 用归纳假设, $F_{m-1,s-1}$ 至多与 y_{s-1} 有关, 所以

$$\frac{\partial F_{m-1,s-1}}{\partial y_i}\ \text{至多与}\begin{cases} y_{s-1}\text{有关}, & \text{当 } i\neq s-1 \text{ 时},\\ y_s\ \text{有关}, & \text{当 } i=s-1 \text{ 时}.\end{cases}$$

从而, $F_{m,s}$ 的第二个求和项

$$\Sigma_2=+\sum_{i=1}^{s-1}iy_{i+1}\frac{\partial F_{m-1,s-1}}{\partial y_i}$$

至多与 y_s 有关. 由此, $F_{m,s}=\Sigma_1+\Sigma_2$ 至多与 y_s 有关. 这就是所要证明的. □

这个引理告诉我们, 对于任何两个给定的整数 $m,s\geqslant 0$, $F_{m,s}$ 至多是一个 s 变量 $\boldsymbol{y}_s=(y_1,y_2,\cdots,y_s)$ 的函数.

引理 10.3.9 对于任何整数 $m,s\geqslant 0$, $F_{m,s}$ 是 $\boldsymbol{y}$ 的一个至多 s 次多项式.

证明 当 $m+s\leqslant 3$ 时, 从已经得到的结果可以看出, 这时所有 $F_{m,s}$ 都是 $\boldsymbol{y}$ 的至多 s 次多项式.

对于 $m+s\geqslant 4$ 时的一般情形, 假设 $F_{r,t}$ $(r+t\leqslant m+s-1,\ r,t\geqslant 0)$ 都是 $\boldsymbol{y}$ 的至多 t 次多项式. 用数学归纳法, 往证 $F_{m,s}$ 是 $\boldsymbol{y}$ 的至多 s 次多项式.

当 $m=0$ 时, 由始条件即知, 这种情形不足道. 当 $m=1$ 时, 利用式 (10.3.9) 的第二式. 因为对于任何 $1 \leqslant i \leqslant s$, $(i-1)+(s-i)=s-1 \leqslant (1+s)-1=s$, 由归纳假设, 所有 $F_{i-1,s-i}$ 是 $\boldsymbol{y}$ 的至多 $s-1$ 次多项式. 但在

$$F_{1,s}=a\sum_{i=1}^{s}F_{i-1,s-i}y_i$$

中有 y_i, 即得 $F_{1,s}$ 是 $\boldsymbol{y}$ 的至多 s 次多项式.

当 $m \geqslant 2$ 时, 利用式 (10.3.9) 的第三式. 因为 $(m-1)+(s-i-j)=m+s-i-j-1 \leqslant m+s-1$, $(i-1)+j \leqslant (i-1)+(s-i)=s-1 \leqslant m+s-1$, 由归纳假设, 在 $F_{m,s}$ 的第一个求和项

$$\Sigma_1=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{s-i}F_{m-1,s-i-j}F_{i-1,j}y_i$$

中, 每个 y_i 的系数都是 $\boldsymbol{y}$ 的至多 $s-1$ 次多项式. 在这些 y_i 中, 使各项添加 1 次. 从而, Σ_1 是 $\boldsymbol{y}$ 的至多 $s-1$ 次多项式. 由于 $(m-1)+(s-1)=m+s-2 \leqslant m+s-1$, 用归纳假设, $F_{m-1,s-1}$ 是 $\boldsymbol{y}$ 的至多 $s-1$ 次多项式, 所以 第二个求和项

$$\Sigma_2=+\sum_{i=1}^{s-1}iy_{i+1}\frac{\partial F_{m-1,s-1}}{\partial y_i}$$

是 $\boldsymbol{y}$ 的至多 s 次多项式. 由此, $F_{m,s}=\Sigma_1+\Sigma_2$ 是 $\boldsymbol{y}$ 的至多 s 次多项式. 即得引理. □

这个引理与引理 10.3.8 一起表明, 对于任何两个给定的整数 $m,s \geqslant 0$, $F_{m,s}$ 是一个 s 变量 $\boldsymbol{y}_s=(y_1,y_2,\cdots,y_s)$ 的至多 s 次多项式.

引理 10.3.10　对于任何整数 $m,s \geqslant 0$, $F_{m,s} \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$ 当且仅当 $a \in \mathcal{R}_+$.

证明　由方程式 (10.3.2) 的始条件, 知 $a \in \mathcal{R}_+$. 这就是必要性. 反之, 从 $a \in \mathcal{R}_+$, 按照式 (10.3.9), 从已经推算的结果可以看出, 当 $m+s \leqslant 3$ 时, 所有 $F_{m,s} \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$.

对于 $m+s \geqslant 4$ 时的一般情形, 假设 $F_{r,t} \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}(r+t \leqslant m+s-1,\ r,t \geqslant 0)$. 用数学归纳法, 往证 $F_{m,s} \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$.

当 $m=0$ 时, 由始条件即知, 这种情形不足道. 当 $m=1$ 时, 利用式 (10.3.9) 的第二式. 因为对于任何 $1 \leqslant i \leqslant s$, $(i-1)+(s-i)=s-1 \leqslant (1+s)-1=s$, 由归纳假设, 所有 $F_{i-1,s-i} \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$. 从而,

$$F_{1,s}=a\sum_{i=1}^{s}F_{i-1,s-i}y_i \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}.$$

当 $m\geqslant 2$ 时, 利用式 (10.3.9) 的第三式. 因为 $(m-1)+(s-i-j)=m+s-i-j-1\leqslant m+s-1$, $(i-1)+j\leqslant (i-1)+(s-i)=s-1\leqslant m+s-1$, 由归纳假设, 在 $F_{m,s}$ 的第一个求和项

$$\Sigma_1=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{s-i}F_{m-1,s-i-j}F_{i-1,j}y_i$$

中, 每个 y_i 的系数都属于 $\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$. 从而, $\Sigma_1\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$. 由于 $(m-1)+(s-1)=m+s-2\leqslant m+s-1$, 用归纳假设, $F_{m-1,s-1}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$, 可知第二个求和项

$$\Sigma_2=+\sum_{i=1}^{s-1}iy_{i+1}\frac{\partial F_{m-1,s-1}}{\partial y_i}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}.$$

由此, $F_{m,s}=\Sigma_1+\Sigma_2\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$. 这就得到了充分性. □

这个引理与定理 10.3.2 一起, 为方程式 (10.3.2) 解的正项和表示提供了理论根据.

定理 10.3.3 令 f^{nl} 为方程式 (10.3.2) 的解. 对于任何整数 $m,s\geqslant 0$, 记 $N_{m,s}=\partial_x^m f^{\text{nl}}$, 则 $N_{m,s}$ 有如下正项和表示:

$$N_{m,s}=\begin{cases}a, & m=s=0,\\ 0, & m=0,s\geqslant 1,\text{ 或 } m\geqslant 1,s=0,\\ & \text{或 } m+s\equiv 1(\text{mod } 2),\text{ 或 } s\leqslant m-1\ ,\\ a\displaystyle\sum_{i=1}^{s}N_{i-1,s-i}y_i, & m=1,\ s=2l\ (l\geqslant 1),\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{s-i}N_{m-1,s-i-j}N_{i-1,j}y_i+\sum_{i=1}^{s-1}iy_{i+1}\frac{\partial N_{m-1,s-1}}{\partial y_i}, & \\ \quad m\geqslant 2,\ m\equiv s(\text{mod } 2),s\geqslant m. & \end{cases}\tag{10.3.12}$$

证明 当 $m=s=0$ 时, 用式 (10.3.10). 当 $m=0,s\geqslant 1$, 或 $m\geqslant 1,s=0$, 或 $m+s\equiv 1(\text{mod } 2)$, 或 $s\leqslant m-1$ 时, 分别用式 (10.3.10)、式 (10.3.11)、引理 10.3.6 或引理 10.3.7. 当 $m=1$, $s=2l$ $(l\geqslant 1)$ 时, 用式 (10.3.9) 的第二式. 对于最后一种情况, 用式 (10.3.9) 的第三式. □

由定理 10.3.2 可知, 对于任何整数 $m,s\geqslant 0$, $N_{m,s}=F_{m,s}$. 用定理 10.3.3, 继续求 $F_{m,s}$ $(4\leqslant m+s\leqslant 6)$. 因为当 $m+s=5$ 时, $F_{m,s}=0$, 故只需考虑 $m+s=4$ 和 $m+s=6$.

当 $m+s=4$ 时, 因为 $F_{4,0}=F_{3,1}=F_{0,4}=0$, 故只需考虑 $F_{1,3}$ 和 $F_{2,2}$.

求 $F_{1,3}$. 由式 (10.3.12) 的第三式,

$$F_{1,3}=a\sum_{i=1}^{3}F_{i-1,3-i}=F_{0,2}y_1+F_{1,1}y_2+F_{2,0}y_3=F_{1,1}y_2.$$

由 $F_{1,1}=a^2y_1$, 有 $F_{1,3}=a^2y_1y_2$.

求 $F_{2,2}$. 由式 (10.3.12) 的第四式,

$$F_{2,2}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=0}^{2-i}F_{2-1,2-i-j}F_{i-1,j}y_i+\sum_{i=1}^{1}iy_{i+1}\frac{\partial F_{1,s-1}}{\partial y_i}.$$

先求第一个和号. 对 i, 将它展开, 得

$$\sum_{j=0}^{1}F_{1,1-j}y_1=(F_{1,1}+F_{1,0})y_1=F_{1,1}y_1=a^2y_1^2.$$

再求第二个和号. 因为只有 $i=1$,

$$y_2\frac{\partial F_{1,1}}{\partial y_1}=a^2y_2,$$

所以 $F_{2,2}=a^2(y_1^2+y_2)$.

当 $m+s=6$ 时, 因为 $F_{6,0}=F_{5,1}=F_{4,2}=F_{0,6}=0$, 故只需考虑 $F_{1,5}$ 和 $F_{2,4},F_{3,3}$.

求 $F_{1,5}$. 用式 (10.3.12) 的第三式, 得

$$\begin{aligned}F_{1,5}&=a\sum_{i=1}^{5}F_{i-1,5-i}y_i\\&=F_{0,4}y_1+F_{1,3}y_2+F_{2,2}y_3+F_{3,1}y_4+F_{4,0}y_5\\&=F_{1,3}y_2+F_{2,2}y_3.\end{aligned}$$

由 $F_{1,3}=a^2y_1y_2$ 以及 $F_{2,2}=a^2(y_1^2+y_2)$, 有 $F_{1,5}=a^2y_1y_2^2+a^2(y_1^2y_3+y_2y_3)=a^2(y_1y_2^2+y_1^2y_3+y_2y_3)$.

求 $F_{2,4}$. 由式 (10.3.12) 的第四式,

$$F_{2,4}=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=0}^{4-i}F_{1,4-i-j}F_{i-1,j}y_i+\sum_{i=1}^{3}iy_{i+1}\frac{\partial F_{1,4-1}}{\partial y_i}.$$

先求第一项和式, 记为 Σ_1. 因为 y_3 和 y_4 的系数是 0, 所以

$$\begin{aligned}\Sigma_1&=\sum_{j=0}^{3}F_{1,3-j}F_{0,j}y_1+\sum_{j=0}^{2}F_{1,2-j}F_{1,j}y_2\\&=F_{1,3}F_{0,0}y_1+F_{1,1}F_{1,1}y_2=(1+a)a^3y_1^2y_2.\end{aligned}$$

再求第二项和式, 记为 Σ_2. 因为在 $F_{1,3}$ 中不含 y_3, 所以有

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &= y_2\frac{\partial F_{1,3}}{\partial y_1}+2y_3\frac{\partial F_{1,3}}{\partial y_2}\\ &= y_2(a^2y_2)+2y_3(a^2y_1)=a^2(2y_1y_3+y_2^2).\end{aligned}$$

从而, $F_{2,4}=a^2(2y_1y_3+y_2^2)+(1+a)a^3y_1^2y_2$.

求 $F_{3,3}$. 由式 (10.3.12) 的第四式,

$$F_{3,3}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=0}^{3-i}F_{2,s-i-j}F_{i-1,j}y_i+\sum_{i=1}^{2}iy_{i+1}\frac{\partial F_{2,2}}{\partial y_i}.$$

先求第一项和式, 记为 Λ_1. 因为 y_3 的系数是 0, 所以有

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= \sum_{j=0}^{2}F_{2,2-j}F_{0,j}y_1+\sum_{j=0}^{1}F_{2,1-j}F_{1,j}y_2\\ &= F_{2,2}F_{0,0}y+1=a^3y_1(y_1^2+y_2).\end{aligned}$$

再求第二项和式, 记为 Λ_2. 因为已知 $F_{2,2}=a^2(y_1^2+y_2)$, 所以

$$\begin{aligned}\Lambda_2 &= y_2\frac{\partial F_{2,2}}{\partial y_1}+2y_3\frac{\partial F_{2,2}}{\partial y_2}\\ &= y_2(2a^2y_1)+2y_3(a^2)=2a^2(y_1y_2+y_3).\end{aligned}$$

从而, $F_{3,3}=a^3y_1(y_1^2+y_2)+2a^2(y_1y_2+y_3)=a^3y_1^3+a^2(2+a)y_1y_2+2a^2y_3$.

例 10.3.1 在曲面上, 无环地图以根点次和非根点剖分向量为参数的根同构分类. 在方程式 (10.3.2) 中, 取 $a=1$, 则有

$$\begin{cases} f=1+x^2f\displaystyle\int_y yf\big|_{x=y}+x\sum_{i\geqslant 1}\int_y y\Big(y\frac{\partial f\big|_{y_i=y^i}}{\partial y}\Big), \\ f\big|_{x=0\Rightarrow \boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=1. \end{cases} \tag{10.3.13}$$

这就是曲面无环地图以根点次和非根点剖分向量为参数的根同构分类的方程. 在它的解 $\widetilde{f}\in\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中, 项 $x^m\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}(\pi(\boldsymbol{n})=s)$ 的系数 $\widetilde{F}_{m,s}$ 就是根点次为 m、半度为 s 的根同构类数即点剖分向量的分布. 方程式 (10.3.13) 是从文献 [68](202~203 页) 提供的分解原理中提取出来的.

例如, 前面已经得到 $F_{1,1}=a^2y_1$, $F_{1,3}=a^2y_1y_2$, $F_{2,2}=a^2(y_1^2+y_2)$ 和 $F_{1,5}=a^2(y_1y_2^2+y_1^2y_3+y_2y_3)$, $F_{2,4}=a^2(2y_1y_3+y_2^2)+(1+a)a^3y_1^2y_2$, $F_{3,3}=a^3y_1^3+a^2(2+a)y_1y_2+2a^2y_3$. 取 $a=1$, 即得 $\widetilde{F}_{1,1}=y_1$, $\widetilde{F}_{1,3}=y_1y_2$ 和 $\widetilde{F}_{1,5}=y_1y_2^2+y_1^2y_3+y_2y_3$. 在图 10.3.1 中, $\widetilde{F}_{1,3}=y_1y_2=a$, $\widetilde{F}_{2,2}=y_1^2(=a)+y_2(=b)$. 这两个是两条棱的情形; $\widetilde{F}_{1,5}=d+c+e=y_1y_2^2+y_1^2y_3+y_2y_3$, $\widetilde{F}_{2,4}=2d+2+fe=2y_1^2y_2+2y_1y_3+y_2^2$ 和 $\widetilde{F}_{3,3}=3e+(g+h)=3y_1y_2+2y_3$. 这三个是三条棱的情形.

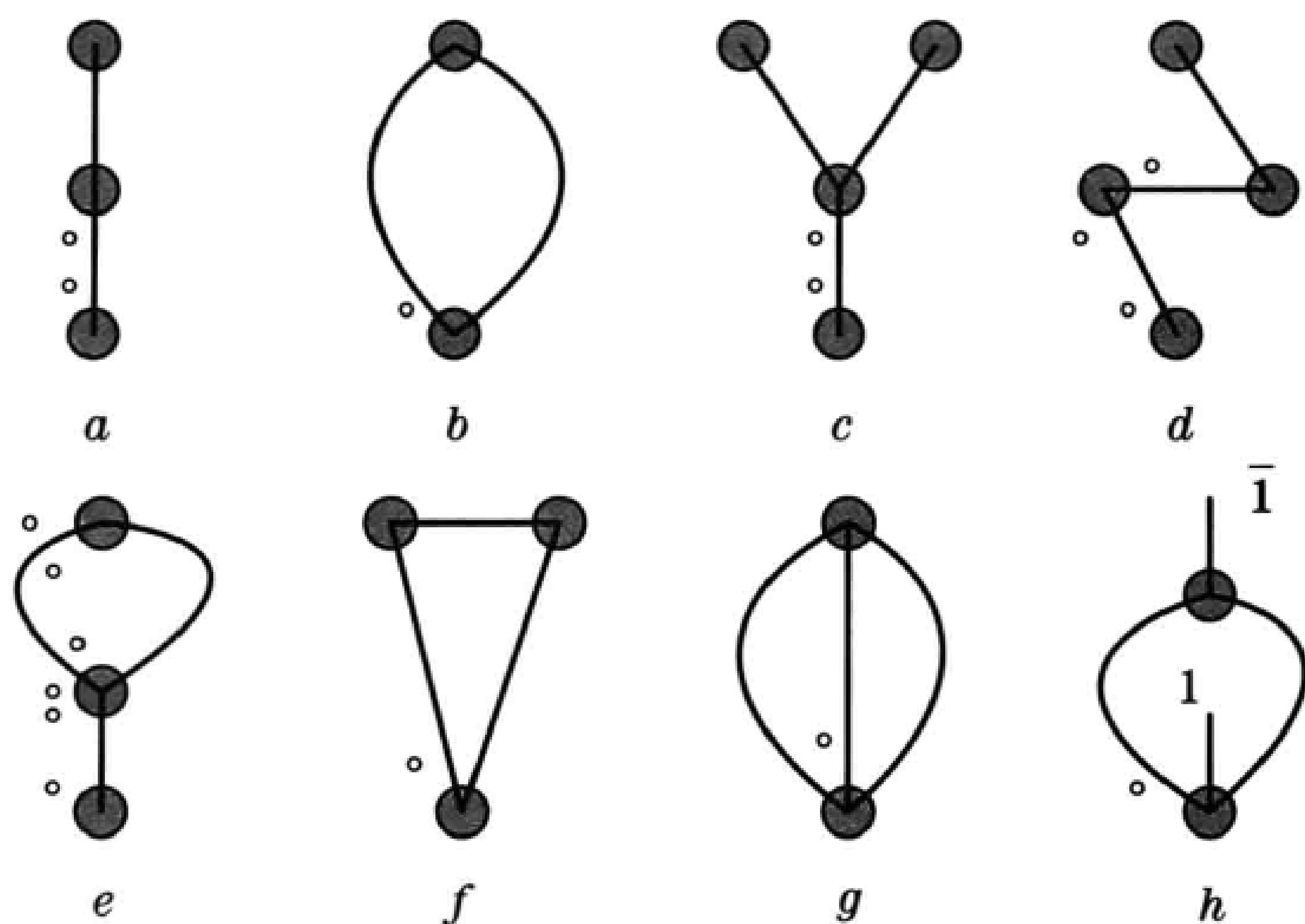


图 10.3.1　无环地图在曲面上依顶点剖分向量的根同构类

10.4　曲面 Euler 型

在文献[67](142 页) 中, 可以看到方程

$$\begin{cases} 2x^4\dfrac{\partial g}{\partial x^2} = -b+(1-x^2)g - x^2\displaystyle\int_y y^2\delta_{x^2,y^2}g\Big|_{u=x^2}, \\ g|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = a, \end{cases} \tag{10.4.1}$$

其中 $a,\ b\in\mathbb{Z}_+\subseteq\mathcal{R}_+$.

引理 10.4.1　如果 $b\neq a$, 则方程式 (10.4.1) 无解.

证明　设 g 的常数项为 G_0. 因为方程式 (10.4.1) 左端有因子 x, 即常数项为 0, 右端的常数项为 $-b+G_0$, 则 $G_0-b=0$, 即 $G_0=b$. 然而, 由始条件, $G_0=a$. 因此, 当 $b\neq a$ 时, 方程式 (10.4.1) 无解. □

因此, 下面凡提到方程式 (10.4.1), 都有 $b=a$.

为了便于处理, 需要先对方程式 (10.4.1) 作等价变换, 使得 g 本身在等号一端, 而其他项全在另一端. 这就是

$$\begin{cases} g = a + x^2 g + 2x^4\dfrac{\partial g}{\partial x^2} + x^2\displaystyle\int_y y^2\delta_{x^2,y^2}g\Big|_{u=x^2}, \\ g|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = a, \end{cases} \tag{10.4.2}$$

其中 $a\in\mathbb{Z}_+\subseteq\mathcal{R}_+$.

由引理 10.4.1 知, 方程式 (10.4.1) 与方程式 (10.4.2) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上等价. 因而, 我们总是讨论方程式 (10.4.2), 而不必讨论方程式 (10.4.1).

从方程式 (10.4.2) 可以看出, g 是 x 的偶函数. 其理由是, 在这个方程中的各项系数中没有 x 的奇次方. 因此, 我们可将 g 视为 x^2 的函数.

g 由无限集 $\{G_m\big|G_m=[g]_{x^2}^m, 0\leqslant m\in\mathbb{Z}_+\}$ 确定, 其中 $[g]_{x^2}^m=\partial_{x^2}^m g$, 或者说, 在 g 中 x^{2m} 项的系数.

对于任何整数 $i\geqslant 0$, 令 $G_i'=\big[\dfrac{\partial g}{\partial x^2}\big]_{x^2}^i$, 则由

$$\left[x^2\frac{\partial g}{\partial x^2}\right]_{x^2}^i=iG_i,$$

有

$$G_m'=(m+1)G_{m+1}, \tag{10.4.3}$$

其中整数 $m\geqslant 0$.

引理 10.4.2 如果对于整数 $0\leqslant i\leqslant l$, $G_i\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$, 则对于整数 $0\leqslant j\leqslant l-1$, $G_j'\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$.

证明 因为 $G_l\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$ 已经被确定, 用式 (10.4.3), $G_{l-1}'=lG_l$, 从而 G_{l-1}' 也被确定. 这就得欲证的结论. □

令 $\delta=\delta_{x^2,y^2}g\big|_{u=x^2}$, 对于整数 $m\geqslant 0$, $\varDelta_m=[\delta]_{x^2}^m$, 则对于任何整数 $i\geqslant 0$,

$$\delta_{x^2,y^2}u^i=\frac{x^{2i}-y^{2i}}{x^2-y^2}=\sum_{j=0}^{i-1}x^{2(i-1-j)}y^{2j}.$$

当 $i=0$ 时, 其值规定为 0, 有

$$\varDelta_m=\begin{cases}0, & m=0,\\ \displaystyle\sum_{i\geqslant m+1}G_iy^{2(i-m-1)}, & m\geqslant 1.\end{cases} \tag{10.4.4}$$

若记 $\varLambda_m=\displaystyle\int_y y^2\varDelta_m$, 则对于 $m\geqslant 1$, 有

$$\varLambda_m=\sum_{i\geqslant m+1}G_iy_{2(i-m)}. \tag{10.4.5}$$

引理 10.4.3 函数 g 与所有 y_{2l+1} $(l\geqslant 0)$ 无关.

证明　从方程式 (10.4.2) 可以看出, 所有 $\boldsymbol{y}$ 均由一个 y 的函数产生. 因为这个 y 的函数由 x 的函数 g 产生, 且 g 是 x 的偶函数, 所以这个 y 的函数也是偶函数. 如式 (10.4.5) 所示, 通过介子泛函不可能在 g 中产生 y_{2i+1} $(i \geqslant 0)$. 从而, 即得欲证的结论. □

这就意味着, g 是一个只与 $\boldsymbol{y} = (0, y_2, 0, y_4, \cdots) = (y_2, y_4, y_6, \cdots)$ 有关的 x 的偶函数. 从而, 对于任何 $m \geqslant 0$, G_m 都只是这种 $\boldsymbol{y}$ 的函数. 由式 (10.4.4) 可以看出, 只用与 x 有关的参数不足以确定 g. 还必须引进与 $\boldsymbol{y}$ 有关的一个或一些参数.

对于任何整数 $m \geqslant 0$, 记 $\mathcal{J}_m = \{\boldsymbol{n} | \boldsymbol{n}$ 为 G_m 中 $\boldsymbol{y}$ 的一个幂向量$\}$. 对任何整数 $s \geqslant 0$, 令 $s = \pi(\boldsymbol{n})/2$, 其中 $\pi(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{i}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}$. 记 $\mathcal{J}_{m,s} = \{\boldsymbol{n} | \boldsymbol{n} \in \mathcal{J}_m,\ \pi(\boldsymbol{n}) = s\}$, 则有

$$\mathcal{J}_m = \sum_{s \geqslant 0} \mathcal{J}_{m,s}. \tag{10.4.6}$$

对于任何两个整数 m, $s \geqslant 0$, 令 $G_{m,s} = G_m\big|_{\pi(\boldsymbol{n})/2=s}$, 也就是 G_m 中所有项 $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}$ $(\pi(\boldsymbol{n})/2 = s)$ 组成的部分. 由式 (10.4.6), 知

$$G_m = \sum_{s \geqslant 0} G_{m,s}. \tag{10.4.7}$$

由式 (10.4.5), 对于任何整数 $s \geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned} \varLambda_{m,s} &= \sum_{i \geqslant m+1} G_{i,s-i+m} y_{2(i-m)} \quad (\text{用 } s-i+m \geqslant 0) \\ &= \sum_{i=m+1}^{s+m} G_{i,s-i+m} y_{2(i-m)} \quad (\text{用 } j = i-m \text{ 代替 } i) \\ &= \sum_{j=1}^{s} G_{j+m,s-j} y_{2(j)}. \end{aligned} \tag{10.4.8}$$

引理 10.4.4　给定两个整数 m, $s \geqslant 0$. 如果对于任何整数 r, $t \geqslant 0$, $r+t \leqslant m+s$, 所有 $G_{r,t}$ 已经被确定, 则 $\varLambda_{m,s}$ 就随之被确定.

证明　因为对于任何整数 $1 \leqslant j \leqslant s$, 都有 $(j+m)+(s-j) = m+s$, 可见 $G_{j+m,s-j}$ 由 $G_{r,t}$ $(r+t \leqslant m+s,\ r,t \geqslant 0)$ 确定. 根据式 (10.4.8), $\varLambda_{m,s}$ 就随之被确定. □

在方程式 (10.4.2) 的基础上, 由式 (10.4.3) 和式 (10.4.5), 即可导出关于 G_m $(m \geqslant 0)$ 的一个无限方程组.

定理 10.4.1 关于 $g\in\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 的方程式 (10.4.2) 与关于 $G_m\in\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}(m\geqslant 0)$ 的方程组

$$G_m=\begin{cases}a, & m=0,\\ a+\sum_{i\geqslant 1}G_iy_{2(i)}, & m=1,\\ (2m-1)G_{m-1}+\sum_{i\geqslant m}G_iy_{2(i-m+1)}, & m\geqslant 2\end{cases}\tag{10.4.9}$$

等价.

证明 当 $m=0$ 时, 从方程 (10.4.2) 的第一式, 可以看出 $x\big|(g-a)$. 这意味着 $G_0=a$. 又 $g\big|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=G_0$, 这就是方程式 (10.4.2) 的始条件.

当 $m=1$ 时, 由方程式 (10.4.2) 的第一式, 有

$$\begin{aligned}G_1&=G_0+\Lambda_0\quad (\text{用 } G_0=a \text{ 和式 } (10.4.5))\\ &=a+\sum_{i\geqslant 1}G_iy_{2(i)}.\end{aligned}$$

这就是方程组 (10.4.9) 的第二式.

当 $m\geqslant 2$ 时, 由方程式 (10.4.2) 的第一式, 有

$$\begin{aligned}G_m&=G_{m-1}+2\left[\frac{\partial g}{\partial x^2}\right]_{x^2}^{m-2}+\left[\int_y y^2\delta_{x^2,y^2}g\Big|_{u=x^2}\right]_{x^2}^{m-1}\\ &=G_{m-1}+2(m-1)G_{m-1}+\left[\int_y y^2\delta_{x^2,y^2}g\Big|_{u=x^2}\right]_{x^2}^{m-1}\\ &=(2m-1)G_{m-1}+\sum_{i\geqslant m}G_iy_{2(i-m+1)}.\end{aligned}$$

这就是方程组 (10.4.9) 的第三式.

综上所述, 即得欲证的结论. □

由这个方程, 看起来目前还不宜直接求出 G_m $(m\geqslant 0)$, 只能考虑 $G_{m,s}$ $(m,\ s\geqslant 0)$. 先看一看当 m 或 s 较小时的情况.

引理 10.4.5 对于任何整数 $s\geqslant 0$, 有

$$G_{0,s}=\begin{cases}a, & s=0,\\ 0, & s\geqslant 1.\end{cases}\tag{10.4.10}$$

证明 基于定理 10.4.1, 利用式 (10.4.9) 的第一式, 即得欲证的结论. □

由这个引理, 我们以后可只讨论 $m\geqslant 1$ 而不失一般性.

引理 10.4.6 对于任何整数 $m \geqslant 0$, 有

$$G_{m,0} = \begin{cases} a, & m=0, \\ \dfrac{a(2m)!}{2^m m!}, & m \geqslant 1. \end{cases} \tag{10.4.11}$$

证明 当 $m=0$ 时, 由引理 10.4.5, 得式 (10.4.11) 的第一式. 当 $m=1$ 时, 由式 (10.4.9), 有 $G_{1,0}=a$. 对于 $m \geqslant 2$ 时的一般情形, 我们假设已经得到

$$G_{m-1,0} = \frac{a(2m-2)!}{2^{m-1}(m-1)!}.$$

用数学归纳法, 往求 $G_{m,0}$. 由式 (10.4.9) 的第三式, 以及

$$\Big[\sum_{i \geqslant m} G_i y_{2(i-m+1)}\Big]_{\boldsymbol{y}}^0 = 0,$$

就得到

$$G_{m,0} = (2m-1)G_{m-1,0} = (2m-1)\frac{a(2m-2)!}{2^{m-1}(m-1)!} = \frac{a(2m)!}{2^m(m)!}.$$

这就是所要证明的结论. □

上面两个引理告诉我们, 下面只讨论 $m,\ s \geqslant 1$ 时的情形就够了. 根据式 (10.4.9), 对于任何整数 $m,\ s \geqslant 1$, 有

$$G_{m,s} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i \geqslant 1} G_{i,s-i} y_{2(i)} = \sum_{i=1}^{s} G_{i,s-i} y_{2(i)}, \quad m=1, \\ \displaystyle(2m-1)G_{m-1,s} + \sum_{i \geqslant m} G_{i,s-i+m-1} y_{2(i-m+1)} \\ \displaystyle\qquad = (2m-1)G_{m-1} + \sum_{i=m}^{s+m-1} G_{i,s-i+m-1} y_{2(i-m+1)} \\ \displaystyle\qquad = (2m-1)G_{m-1,s} + \sum_{j=0}^{s-1} G_{j+m,s-j-1} y_{2(j+1)}, \quad m>1. \end{cases}$$

即

$$G_{m,s} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{s} G_{i,s-i} y_{2(i)}, & m=1, \\ \displaystyle(2m-1)G_{m-1,s} + \sum_{j=0}^{s-1} G_{j+m,s-j-1} y_{2(j+1)}, & m>1. \end{cases} \tag{10.4.12}$$

现在, 拟按照 $m+s$ 逐一增加的顺序, 从 $G_{1,1}$ 开始, 先尝试求 $G_{m,s}$ ($2 \leqslant m+s \leqslant 3,\ m,\ s \geqslant 1$).

当 $m+s=2$ 时, 因为 $G_{2,0}=3a$ (引理 10.4.6), $G_{0,2}=0$ (引理 10.4.5), 故只需求 $G_{1,1}$. 由式 (10.4.12) 的第一式,

$$G_{1,1}=G_{1,0}y_2=ay_2,$$

即得 $G_{1,1}=ay_2$.

当 $m+s=3$ 时, 因为 $G_{3,0}=15a$(引理 10.4.6), $G_{0,3}=0$(引理 10.4.5), 故只需求 $G_{2,1}$ 和 $G_{1,2}$.

求 $G_{2,1}$. 由式 (10.4.12) 的第二式,

$$G_{2,1}=3G_{1,1}+G_{2,0}y_2=3ay_2+3ay_2,$$

即得 $G_{2,1}=6ay_2$.

求 $G_{1,2}$. 由式 (10.4.12) 的第一式,

$$G_{1,2}=G_{1,1}y_2+G_{2,0}y_4=ay_2^2+3ay_4,$$

即得 $G_{1,2}=ay_2^2+3ay_4$.

定理 10.4.2 方程式 (10.4.2) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中有且仅有一个解.

证明 当 $m+s\leqslant 3$ 时, 前面已经确定了 $G_{m,s}$. 这里只讨论 $m+s\geqslant 4$ 时的一般情形. 令 $m+s=n\geqslant 4$, 假设对于任何整数 $r,t\geqslant 1$, 当 $r+t\leqslant n-1$ 时, $G_{r,t}$ 已经求出. 用数学归纳法, 通过式 (10.4.12), 往求 $G_{m,s}=G_{m,n-m}$.

当 $m=1$ 时, $G_{1,s}=G_{1,n-1}$. 由式 (10.4.12) 的第一式,

$$G_{1,n-1}=\sum_{i=1}^{n-1}G_{i,n-1-i}y_{2(i)}.$$

因为对于任何整数 $1\leqslant i\leqslant n-1$, $i+(n-1-i)=n-1\leqslant n-1$, 用归纳假设, 所有 $G_{i,n-1-i}$ 已经给出. 从而, 即可求出 $G_{1,n-1}$.

当 $m\geqslant 2$ 时, $G_{m,s}=G_{m,n-m}$. 由式 (10.4.12) 的第二式,

$$G_{m,n-m}=(2m-1)G_{m-1,n-m}+\sum_{j=0}^{n-m-1}G_{j+m,n-m-j-1}y_{2(j+1)}.$$

因为 $(m-1)+(n-m)=n-1\leqslant n-1$, 由归纳假设, $G_{m-1,n-m}$ 已经给出, 从而第一项可以求出. 又对于任何整数 $0\leqslant j\leqslant n-m-1$, $(j+m)+(n-m-j-1)=n-1\leqslant n-1$, 用归纳假设, 所有 $G_{j+m,n-m-j-1}$ 已经给出. 从而, 第二项也可以求出. 这就导致 $G_{m,n-m}=G_{m,s}$ 可以求出.

由 n 的任意性, 对于任何整数 $m \geqslant 0$,

$$G_m = \sum_{s \geqslant 0} G_{m,s} \in \mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\} \quad (s = n - m)$$

都可以求出. 由定理 10.4.1, 所有这些 G_m 导出方程式 (10.4.2) 的一个解.

考虑到这个解在 $\mathcal{R}\{x, \boldsymbol{y}\}$ 中对于始值的唯一性, 方程式 (10.4.2) 的解只有它. □

下面, 再进一步考察 $G_{m,s}$ $(m,\ s \geqslant 0)$ 的一些结构性质.

引理 10.4.7　对于任何整数 $m,\ s \geqslant 0$, $G_{m,s}$ 仅与 y_{2i} $(1 \leqslant i \leqslant s)$ 有关.

证明　由引理 10.4.3, 可知 $G_{m,s}$ 只与 y_{2i} $(i \geqslant 0)$ 有关. 这里只需证明 $i \leqslant s$.

对于 $m+s \leqslant 3$, 容易验证 $i \leqslant s$. 对于 $m+s \geqslant 4$ 的一般情形, 可以假设, 只要 $r+t \leqslant m+s-1$, $G_{r,t}$ 就仅与 y_{2i} $(i \leqslant t)$ 有关. 用数学归纳法, 往证 $G_{m,s}$ 只与 y_{2i} $(i \leqslant s)$ 有关.

在式 (10.4.12) 的基础上, 当 $m=1$ 时, 因为对于任何整数 $1 \leqslant i \leqslant s$, $i+(s-i)=s \leqslant m+s-1$ 由归纳假设, $G_{i,s-i}$ 至多与 y_{2s-i} 有关. 因为 $i \geqslant 1$, 故 $G_{i,s-i}$ 至多与 $y_{2(s-1)}$ 有关. 考虑到 $i \leqslant s$, y_{2i} 至多为 y_{2s}. 从而, 用式 (10.4.12) 的第一式, $G_{1,s}$ 至多与 y_{2s} 有关.

当 $m \geqslant 2$ 时, 利用式 (10.4.12) 的第二式. 因为 $(m-1)+s \leqslant m+s-1$, 用归纳假设, 已经知道 $G_{m-1,s}$ 至多与 y_{2s} 有关. 第一项不必考虑. 在第二项中, 因为对于任何整数 $0 \leqslant j \leqslant s-1$, $(j+m)+(s-j-1) \leqslant m+s-1$ 用归纳假设, $G_{j+m,s-j-1}$ 至多与 $y_{2(s-j-1)}$ 有关. 因为 $j \geqslant 0$, 故所有 $G_{j+m,s-j-1}$ 至多与 $y_{2(s-1)}$ 有关. 再考虑到 $j \leqslant s-1$, $y_{2(j+1)}$ 至多为 y_{2s}. 从而, 第二项也至多与 y_{2s} 有关.

综上所述, 就得到了欲证的结论. □

这个引理告诉我们, 对于任何给定的整数 m 和 s, $G_{m,s}$ 只是 s 个变元 $\boldsymbol{y}_{2s}$ 的一个函数. 注意: s 不依赖 m. 由此可见, 可以按 s 由小到大的次序进行求 $G_{m,s}$.

引理 10.4.8　对于任何整数 $m,\ s \geqslant 0$, $G_{m,s}$ 是 $\boldsymbol{y}_{2s}$ 的一个至多 s 次多项式.

证明　对于 $m+s \leqslant 3$, 容易验证 $G_{m,s}$ 是 $\boldsymbol{y}_{2s}$ 的一个至多 s 次多项式. 对于 $m+s \geqslant 4$ 时的一般情形, 可以假设 $G_{r,t}$ $(r+t \leqslant m+s-1)$ 就是 $\boldsymbol{y}_{2t}$ 的一个至多 t 次多项式. 用数学归纳法, 往证 $G_{m,s}$ 是 $\boldsymbol{y}_{2s}$ 的一个至多 s 次多项式.

在式 (10.4.12) 的基础上, 当 $m=1$ 时, 因为对于任何整数 $1 \leqslant i \leqslant s$, $i+(s-i)=s \leqslant m+s-1$, 由归纳假设, $G_{i,s-i}$ 为 $\boldsymbol{y}_{2(s-i)}$ 的一个至多 $s-i$ 次多项式. 因为 $i \geqslant 1$, $G_{i,s-i}$ 至多是 $\boldsymbol{y}_{2(s-1)}$ 的一个 $s-1$ 次多项式. 考虑到 y_{2i} $(i \leqslant s)$ 至多为 $\boldsymbol{y}_{2s}$

的一个 s 次多项式, 从而, 用式 (10.4.12) 的第一式, $G_{1,s}$ 至多是 $\boldsymbol{y}_{2s}$ 的一个 s 次多项式.

当 $m \geqslant 2$ 时, 利用式 (10.4.12) 的第二式. 因为 $(m-1)+s \leqslant m+s-1$, 用归纳假设, 已经知道 $G_{m-1,s}$ 为 $\boldsymbol{y}_{2s}$ 的至多 s 次多项式. 第一项不必考虑. 在第二项中, 因为对于任何整数 $0 \leqslant j \leqslant s-1$, $(j+m)+(s-j-1) \leqslant m+s-1$, 用归纳假设, $G_{j+m,s-j-1}$ 是 $\boldsymbol{y}_{2s-j-1}$ 的一个至多 $s-j-1$ 次多项式. 因为 $j \geqslant 0$, 故所有 $G_{j+m,s-j-1}$ 至多是 $\boldsymbol{y}_{2(s-1)}$ 的一个 $s-1$ 次多项式. 再考虑到 $j \leqslant s-1$, 它也至多为 $\boldsymbol{y}_{2s}$ 的一个 s 次多项式. 从而, 第二项也至多是 $\boldsymbol{y}_{2s}$ 的一个 s 次多项式.

综上所述, 就得欲证的结论. □

这个引理连同上一个引理表明, 对于任何两个给定的整数 m, $n \geqslant 0$, $G_{m,s}$ 都只是有限个未定元的一个多项式. 从理论上, 这保证了求解过程的可实现性.

引理 10.4.9 对于任何整数 m, $s \geqslant 0$, $G_{m,s} \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$ 当且仅当 $a \in \mathcal{R}_+$.

证明 如果对于任何整数 m, $s \geqslant 0$, $G_{m,s} \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$ 但 $a \notin \mathcal{R}_+$, 则 $G_{0,0} = a$, 这与方程式 (10.4.2) 始条件中的 $a \in \{\mathcal{R}\}_+$ 矛盾. 从而, 必要性得证.

反之, 对于 $a \in \{\mathcal{R}\}_+$, 从已经求出的 $G_{m,s}$ $(0 \leqslant m+s \leqslant 3)$ 中可以看出, 这些 $G_{m,s} \in \mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$. 关于 $m+s \geqslant 4$ 时的一般情形, 假设对于任何整数 $r, t \geqslant 0$, 当 $r+t \leqslant m+s-1$ 时, $G_{r,t} \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$. 用数学归纳法, 往证 $G_{m,s} \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$.

在式 (10.4.12) 的基础上, 当 $m=1$ 时, 因为对于任何整数 $1 \leqslant i \leqslant s$, $i+(s-i) = s \leqslant m+s-1$, 由归纳假设, $G_{i,s-i} \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$. 从而, 用式 (10.4.12) 的第一式, $G_{1,s} \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$.

当 $m \geqslant 2$ 时, 利用式 (10.4.12) 的第二式. 因为 $(m-1)+s \leqslant m+s-1$, 用归纳假设, 已经知道 $G_{m-1,s} \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$. 第一项属于 $\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$. 在第二项中, 因为对于任何整数 $0 \leqslant j \leqslant s-1$, $(j+m)+(s-j-1) \leqslant m+s-1$, 用归纳假设, $G_{j+m,s-j-1} \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$. 从而, 第二项也属于 $\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$.

综上所述, 即得欲证的结论. □

因为在方程式 (10.4.2) 中, $a \in \mathcal{R}_+$, 这个引理告诉我们, 它的解总是在 $\mathcal{R}_+\{x, \boldsymbol{y}\}$ 中.

定理 10.4.3 令 $\tilde{g}^{\mathrm{El}}$ 是方程式 (10.4.2) 的解. 对于任何整数 m, $s \geqslant 0$, 记

$$\tilde{G}^{\mathrm{El}}_{m,s} = \left[\partial_x^{2m} \tilde{g}^{\mathrm{El}}\right]_{\boldsymbol{y}}^{2s} = G_{m,s},$$

则 $\tilde{G}^{\mathrm{El}}_{m,s} \in \mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$ 有如下有限正项和表示:

$$\tilde{G}^{\mathrm{El}}_{m,s}=\begin{cases}a\delta_{0,s}, & s\geqslant 0,\ m=0,\\ \dfrac{a(2m)!}{2^m m!}, & s=0,\ m\geqslant 1,\\ \sum\limits_{i=1}^{s}G^{\mathrm{El}}_{i,s-i}y_{2(i)}, & s\geqslant 1,\ m=1,\\ (2m-1)G^{\mathrm{El}}_{m-1,s}+\sum\limits_{j=0}^{s-1}G^{\mathrm{El}}_{j+m,s-j-1}y_{2(j+1)}, & s>1, m>1.\end{cases}\tag{10.4.13}$$

证明　当 $s\geqslant 0$, $m=0$ 时, 由引理 10.4.5 给出. 当 $s=0$, $m\geqslant 1$ 时, 由引理 10.4.6 给出. 当 $s\geqslant 1$, $m=1$ 时, 由式 (10.4.12) 的第一式给出. 其他情形由式 (10.4.12) 的第二式给出. □

从式 (10.4.13) 出发, 继续做 $m+s=4$ 时的 $G_{m,s}=G^{\mathrm{El}}_{m,s}$. 因为已经知道 $G_{4,0}=\dfrac{a8!}{2^4 4!}=105a$(第二式) 和 $F_{0,4}=0$(第一式), 故只需求 $G_{3,1}$, $G_{2,2}$ 和 $G_{1,3}$.

求 $G_{3,1}$. 用式 (10.4.13) 的第四式, 以及 $G_{2,1}=6ay_2$, $G_{3,0}=15a$, 有

$$G_{3,1}=5G_{2,1}+G_{3,0}y_2=30ay_2+15ay_2,$$

即 $G_{3,1}=45ay_2$.

求 $G_{2,2}$. 用式 (10.4.13) 的第四式, 以及 $G_{1,2}=ay_2^2+3ay_4$, $G_{2,1}=6ay_2$, $G_{1,0}=a$, 有

$$G_{2,2}=3G_{1,2}+(G_{2,1}y_2+G_{1,0}y_4)=3(ay_2^2+3ay_4)+6ay_2^2+ay_4,$$

即 $G_{2,2}=9ay_2^2+10ay_4$.

求 $G_{1,3}$. 用式 (10.4.13) 的第三式, 以及 $G_{1,2}=ay_2^2+3ay_4$, $G_{2,1}=6ay_2$, $G_{3,0}=15a$, 有

$$G_{1,3}=G_{1,2}y_2+G_{2,1}y_4+G_{3,0}y_6=(ay_2^2+3ay_4)y_2+6ay_2y_4+15ay_6,$$

即 $G_{1,3}=ay_2^3+9ay_2y_4+15ay_6$.

例 10.4.1　在曲面上, Euler 地图以根点次和非根点剖分向量为参数的根同构分类. 记 $F_{m,s}=G^{\mathrm{El}}_{m,s}\big|_{a=1}$, 则 $F_{m,s}$ 为根点次为 $2m$、非根点剖分向量为 $\boldsymbol{n}$, 且满足 $s=\pi(\boldsymbol{n})/2$ 的曲面 Euler 地图的根同构分类数的分布.

例如, 前面已经得到 $F_{1,1}=G_{1,1}\big|_{a=1}=y_2$, $F_{2,1}=G_{2,1}\big|_{a=1}=6y_2$ 和 $F_{1,2}=G_{1,2}\big|_{a=1}=y_2^2+3y_4$.

在图 10.4.1 中, 因为 $F_{1,1}$ 的 y_2 表示根点次为 2, 只有一个非根顶点, 它的次为 2. 这就是两条棱的杆束, 即平面上两条边的圈; $F_{1,2}$ 中的 y_2^2 就是平面上三条边的圈, 不必在图中标出. 剩下的就是 $F_{2,1}=4a+2b=6y_2$ 和 $F_{1,2}$ 中的 $3y_4=2c+d$.

从已经得到的 $G_{3,1}=45ay_2$, $G_{2,2}=9ay_2^2+10ay_4$, $G_{1,3}=ay_2^3+9ay_2y_4+15ay_6$ 中, 可以看出 $F_{3,1}=45y_2$, $F_{2,2}=9y_2^2+10y_4$, $F_{1,3}=y_2^3+9y_2y_4+15y_6$.

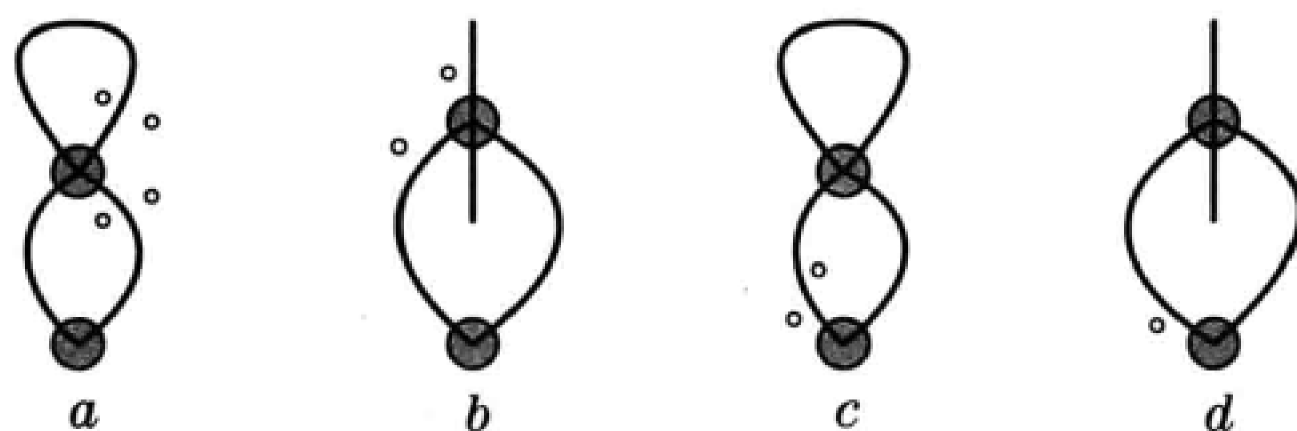


图 10.4.1 在曲面上, Euler 地图依顶点剖分向量的根同构类 (度为 3)

在图 10.4.2 中, 为了减少图所占的篇幅, 这里给出了 $F_{1,3}$ 的前两项, 即 y_2^3 和 $9y_2y_4$ 的解释. 其他项可类推. 前者表示, 在曲面上, 带 4 条棱 (即度为 4) 的 Euler 地图, 依顶点剖分向量 $\boldsymbol{n}=3\mathbf{1}_2$ 的根同构类只有 1 个, 如 a 所示. 后者表示, 在曲面上, 带 4 条棱的 Euler 地图, 依顶点剖分向量 $\boldsymbol{n}=\mathbf{1}_2+\mathbf{1}_4$ 的根同构类有 9 个, 如 b, c 和 d 所示.

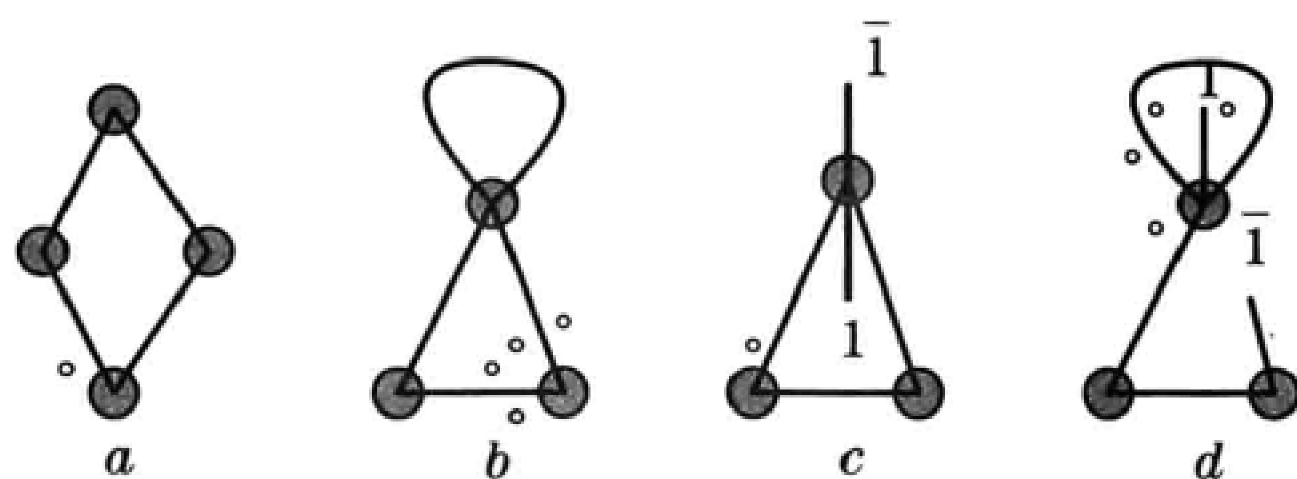


图 10.4.2 在曲面上, Euler 地图依顶点剖分向量的根同构类 (度为 4)

10.5 曲面普通型

在文献[76] 中, 提供了方程

$$\begin{cases} x^3\dfrac{\partial f}{\partial x}=-b+(1-x^2)f-x\displaystyle\int_y y\delta_{x,y}(uf\big|_{u=x}), \\ f_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=a, \end{cases} \tag{10.5.1}$$

其中 $a,\ b\in\mathbb{Z}_+\subseteq\mathcal{R}_+$.

引理 10.5.1 如果 $b\neq a$, 则方程式 (10.5.1) 无解.

证明 设 f 的常数项为 F_0. 因为方程式 (10.5.1) 左端有因子 x, 即常数项为 0, 右端的常数项为 $-b+F_0$, 所以 $F_0-b=0$, 即 $F_0=b$. 然而, 由始条件, $F_0=a$. 因此, 当 $b\neq a$ 时, 方程式 (10.5.1) 无解. □

因此, 下面凡提到方程式 (10.5.1), 都有 $b=a$.

为了便于处理, 需要先对方程式 (10.5.1) 作等价变换, 使得 f 本身在等号一端, 而其他项全在另一端. 这就是

$$\begin{cases} f=a+x^2f+x^3\dfrac{\partial f}{\partial x}+x\displaystyle\int_y y\delta_{x,y}(uf\big|_{u=x}), \\ f|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=a, \end{cases} \tag{10.5.2}$$

其中 $a\in\mathbb{Z}_+\subseteq\mathcal{R}_+$.

由引理 10.5.1 知, 方程式 (10.5.1) 与方程式 (10.5.2) 在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 上等价. 因此我们总是讨论方程式 (10.5.2), 而不必讨论方程式 (10.5.1).

f 由无限集 $\{F_m\big|F_m=[f]_x^m, 0\leqslant m\in\mathbb{Z}_+\}$ 确定, 其中 $[f]_x^m=\partial_x^m f$, 或者说, 在 f 中 x^m 项的系数.

对于任何整数 $i\geqslant 0$, 令 $F_i'=\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right]_x^i$, 则由

$$\left[x\frac{\partial f}{\partial x}\right]_x^i=iF_i,$$

有

$$F_m'=(m+1)F_{m+1}, \tag{10.5.3}$$

其中整数 $m\geqslant 0$.

引理 10.5.2 如果对于整数 $0\leqslant i\leqslant l$, $F_i\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$, 则对于整数 $0\leqslant j\leqslant l-1$, $F_j'\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$.

证明 因为 $F_l\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$ 已经被确定, 用式 (10.5.3), $F_{l-1}'=lF_l$, 从而 F_{l-1}' 也被确定. 这就导致欲证的结论 □

令 $\delta=\delta_{x,y}(uf\big|_{u=x})$, 对于整数 $m\geqslant 0$, $\Delta_m=[\delta]_x^m$, 则对于任何整数 $i\geqslant 0$,

$$\delta_{x,y}u^{i+1}=\frac{x^{i+1}-y^{i+1}}{x-y}=\sum_{j=0}^{i}x^{i-j}y^j,$$

从而有

$$\Delta_m = \begin{cases} F_0 = a, & m = 0, \\ \sum\limits_{i \geqslant m} F_i y^{i-m}, & m \geqslant 1. \end{cases} \tag{10.5.4}$$

若记 $\Lambda_m = \int_y y\Delta_m$, 则对于 $m \geqslant 1$, 有

$$\Lambda_m = \sum_{i \geqslant m} F_i y_{i-m+1}. \tag{10.5.5}$$

定理 10.5.1 关于 $f \in \mathcal{R}\{x, \boldsymbol{y}\}$ 的方程式 (10.5.2) 与关于 $F_m \in \mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}(m \geqslant 0)$ 的方程组

$$F_m = \begin{cases} a, & m = 0, \\ \sum\limits_{i \geqslant 0} F_i y_{i+1}, & m = 1, \\ a + \sum\limits_{i \geqslant 1} F_i y_i, & m = 2, \\ (m-1)F_{m-2} + \sum\limits_{i \geqslant m-1} F_i y_{i-m+2}, & m \geqslant 3 \end{cases} \tag{10.5.6}$$

等价.

证明 当 $m = 0$ 时, 从方程式 (10.5.2) 的第一式, 可以看出 $x \big| (f - a)$. 这意味着 $F_0 = a$. 易知 $f\big|_{x=0, \boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}} = F_0$. 这就是方程式 (10.5.2) 的始条件.

当 $m = 1$ 时, 由方程式 (10.5.2) 的第一式, 有

$$\begin{aligned} F_1 &= \Lambda_0 \quad (\text{用式 } (10.5.5)) \\ &= \sum_{i \geqslant 0} F_i y_{i+1}. \end{aligned}$$

这就是方程组 (10.5.6) 的第二式.

当 $m = 2$ 时, 由方程 (10.5.2) 的第一式, 有

$$F_2 = F_0 + \Lambda_1 = a + \sum_{i \geqslant 1} F_i y_i.$$

这就是方程组 (10.5.6) 的第三式.

当 $m \geqslant 3$ 时, 由方程 (10.5.2) 的第一式, 有

$$\begin{aligned}F_m &= F_{m-2} + \left[\frac{\partial g}{\partial x}\right]_x^{m-3} + \left[\int_y y\delta_{x,y} f\Big|_{u=x}\right]_x^{m-1} \quad (\text{用式 } (10.5.3))\\ &= (m-1)F_{m-2} + \left[\int_y y\delta_{x,y} f\Big|_{u=x}\right]_x^{m-1} \quad (\text{用式 } (10.5.5))\\ &= (m-1)F_{m-2} + \sum_{i\geqslant m-1} G_i y_{i-m+2}.\end{aligned}$$

这就是方程组 (10.5.6) 的第四式.

综上所述, 即得欲证的结论. □

由方程组 (10.5.6) 可以看出, 只用与 x 有关的参数不足以确定 f. 还必须引进与 $\boldsymbol{y}$ 有关的一个或一些参数.

对于任何整数 $m \geqslant 0$, 记 $\mathcal{J}_m = \{\boldsymbol{n} | \boldsymbol{n}\text{为 } F_m \text{ 中 } \boldsymbol{y} \text{ 的一个幂向量}\}$. 对于任何整数 $s \geqslant 0$, 令 $s = \pi(\boldsymbol{n})$, 其中 $\pi(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{i}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}$. 记 $\mathcal{J}_{m,s} = \{\boldsymbol{n} | \boldsymbol{n} \in \mathcal{J}_m,\ \pi(\boldsymbol{n}) = s\}$, 则有

$$\mathcal{J}_m = \sum_{s\geqslant 0} \mathcal{J}_{m,s}. \tag{10.5.7}$$

对于任何两个整数 $m,\ s \geqslant 0$, 令 $F_{m,s} = F_m\big|_{\pi(\boldsymbol{n})=s}$, 也就是 F_m 中所有项 $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}$ $(\pi(\boldsymbol{n}) = s)$ 组成的部分. 由式 (10.5.7), 知

$$F_m = \sum_{s\geqslant 0} F_{m,s}. \tag{10.5.8}$$

引理 10.5.3　给定两个整数 $m,\ s \geqslant 0$. 如果对于任何整数 $r,\ t \geqslant 0,\ r+t \leqslant m+s$, 所有 $F_{r,t}$ 已被确定, 则 $\Lambda_{m,s}$ 也被确定.

证明　由式 (10.5.5), 有

$$\begin{aligned}\Lambda_{m,s} &= \sum_{i\geqslant m} F_{i,s-i+m-1} y_{i-m+1} \quad (\text{用 } s-i+m-1 \geqslant 0)\\ &= \sum_{i\geqslant m}^{s+m-1} F_{i,s-i+m-1} y_{i-m+1} \quad (\text{用 } j = i-m \text{ 代替 } i)\\ &= \sum_{j\geqslant 0}^{s-1} F_{j+m,s-j-1} y_{j+1}.\end{aligned}$$

对于任何 $0 \leqslant j \leqslant s-1$, $(j+m)+(s-j-1) = m+s-1 \leqslant m+s$, 故所有 $F_{j+m,s-j-1}$ 都被确定. 从上式, 即知 $\Lambda_{m,s}$ 可被确定. □

由此可见, $F_{m,s}$ 能够从满足 $r+t < m+s$ 的一些 $F_{r,t}$ 导出.

引理 10.5.4 在 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 上的关于 $F_{m,s}(m,\ s\geqslant 0)$ 的方程组

$$\begin{cases} F_{0,s}=a\delta_{0,s}, & s\geqslant 0,\\ F_{1,s}=\displaystyle\sum_{i=0}^{s-1}F_{i,s-i-1}y_{i+1}, & s\geqslant 0,\\ F_{2,s}=a\delta_{0,s}+\displaystyle\sum_{i=1}^{s}F_{i,s-i}y_i, & s\geqslant 0,\\ F_{m,s}=(m-1)F_{m-2,s}+\displaystyle\sum_{i=1}^{s}F_{i+m-2,s-i}y_i, & m\geqslant 3,\ s\geqslant 0 \end{cases} \tag{10.5.9}$$

与关于 $F_m\in\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}(m\geqslant 0)$ 的方程组 (10.5.6) 等价.

证明 当 $m=0$ 时, 对于任何整数 $s\geqslant 0$, 由式 (10.5.6) 的第一式给出.

当 $m=1$ 时, 对于任何整数 $s\geqslant 0$, 由式 (10.5.6) 的第二式, 有

$$\begin{aligned} F_{1,s}&=\sum_{i\geqslant 0}F_{i,s-i-1}y_{i+1}\quad (\text{用 } s-i-1\geqslant 0)\\ &=\sum_{i=0}^{s-1}F_{i,s-i-1}y_{i+1}. \end{aligned}$$

这就是式 (10.5.9) 的第二式.

当 $m=2$ 时, 对于任何整数 $s\geqslant 0$, 由式 (10.5.6) 的第三式, 有

$$\begin{aligned} F_{2,s}&=a\delta_{0,s}+\sum_{i\geqslant 1}F_{i,s-i}y_i\quad (\text{用 } s-i\geqslant 0)\\ &=a\delta_{0,s}+\sum_{i=1}^{s}F_{i,s-i}y_i. \end{aligned}$$

这就是式 (10.5.9) 的第三式.

当 $m\geqslant 3$ 时, 对于任何整数 $s\geqslant 0$, 由式 (10.5.6) 的第四式, 有

$$\begin{aligned} F_{m,s}&=(m-1)F_{m-2,s}+\sum_{i\geqslant m-1}F_{i,s-i+m-2}y_{i-m+2},\\ &=(m-1)F_{m-2,s}+\sum_{i=m-1}^{s+m-2}F_{i,s-i+m-2}y_{i-m+2},\\ &=(m-1)F_{m-2,s}+\sum_{j=1}^{s}F_{j+m-2,s-j}y_j, \end{aligned}$$

这就是式 (10.5.9) 的第四式. □

现在, 可以尝试从 $m+s=0$ 起, 在式 (10.5.9) 的基础上, 按照逐一递增的次序确定 $F_{m,s}$.

当 $m+s=0$ 时, 因为 $m,\ s\geqslant 0$, 故只有 $F_{0,0}$. 由式 (10.5.9) 的第一式, 有 $F_{0,0}=a$.

当 $m+s=1$ 时, 需求 $F_{1,0}$ 和 $F_{0,1}$. 分别用式 (10.5.9) 的第二式和第一式, 得 $F_{1,0}=0$ 和 $F_{0,1}=0$.

当 $m+s=2$ 时, 需求 $F_{2,0}$, $F_{1,1}$ 和 $F_{0,2}$. 分别用式 (10.5.9) 的第三式和第一式, 得 $F_{2,0}=a$ 和 $F_{0,2}=0$. 只剩下 $F_{1,1}$. 用式 (10.5.9) 的第一式, 得

$$F_{1,1}=\sum_{i=0}^{1-1}F_{i,1-i-1}y_{i+1}=F_{0,0}y_1=ay_1.$$

定理 10.5.2　方程式 (10.5.2) 在 $\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$ 中有且仅有一个解.

证明　因为当 $m+s\leqslant 2$ 时, 上面已经确定了 $F_{m,s}$, 这里只讨论 $m+s\geqslant 3$ 时的一般情形. 令 $m+s=n\geqslant 3$, 假设对于任何整数 $r,t\geqslant 0$, 当 $r+t\leqslant n-1$ 时, $F_{r,t}$ 已经求出. 用数学归纳法, 通过式 (10.5.9) , 往求 $F_{m,s}=F_{m,n-m}$.

当 $m=0$ 时, 自然 $F_{0,s}$ 已经由式 (10.5.9) 的第一式确定.

当 $m=1$ 时, $F_{1,s}=F_{1,n-1}$. 由式 (10.5.9) 的第二式, 有

$$F_{1,n-1}=\sum_{i=0}^{n-2}F_{i,n-2-i}y_{i+1}.$$

因为对于任何整数 $0\leqslant i\leqslant n-2$, $i+(n-2-i)=n-2\leqslant n-1$, 用归纳假设, 所有 $F_{i,n-2-i}$ 已经给出. 从而, 即可求出 $F_{1,n-1}$.

当 $m=2$ 时, $F_{2,s}=F_{2,n-2}$. 由式 (10.5.9) 的第三式, 只需讨论 $s\geqslant 1$,

$$F_{2,n-2}=\sum_{i=1}^{n-2}F_{i,n-i-2}y_i.$$

因为 $i+(n-i-2)=n-2\leqslant n-1$, 由归纳假设, $F_{i,n-i-2}$ 都已经给出, 由此即可求出 $F_{2,n-2}$.

当 $m\geqslant 3$ 时, $F_{m,s}=F_{m,n-m}$. 由式 (10.5.9) 的第四式, 有

$$F_{m,n-m}=(m-1)F_{m-2,n-m}+\sum_{i=0}^{n-m}F_{i+m-2,n-m-i}y_i.$$

因为 $(m-1)+(n-m)=n-1\leqslant n-1$, 由归纳假设, $G_{m-1,n-m}$ 已经给出, 从而第一项可以求出. 因为对于任何整数 $0\leqslant j\leqslant n-m-1$, $(j+m)+(n-m-j-1)=$

$n-1 \leqslant n-1$, 用归纳假设, 所有 $F_{j+m,n-m-j-1}$ 已经给出. 从而, 第二项也可以求出. 这就导致 $F_{m,n-m}=F_{m,s}$ 可以求出. 由定理 10.5.1 和引理 10.5.4, 所有这些 $F_{m,s}$ 导出方程式 (10.5.2) 的一个解.

考虑到这个解在 $\mathcal{R}\{x,\boldsymbol{y}\}$ 中对始值的唯一性, 方程 (10.5.2) 的解只有它. □

为了求解过程更简捷, 也使所求的解在计算上具有更有效的表达式, 还要进一步了解这个解的结构特征.

引理 10.5.5 对于任何整数 $m,s \geqslant 0$, 如果 $m+s \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$, 则 $F_{m,s}=0$.

证明 当 $m+s \leqslant 2$ 时, 只有 $m+s=1$. 上面的计算已经得到这时的 $F_{m,s}=0$. 引理的结论成立.

对于 $m+s \geqslant 3$ 时的一般情形, 假设当 $r+t \leqslant m+s-1$ 时, 已经得到, 只要 $r+t \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$, 就有 $F_{r,t}=0$. 用数学归纳法, 往证只要 $m+s \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$, 就有 $F_{m,s}=0$.

在式 (10.5.9) 的基础上, 当 $m=0$ 时, 由第一式, 可以看出满足欲证的结论.

当 $m=1$ 时, 由第二式, 因为对于任何整数 $0 \leqslant i \leqslant s-1$, $i+(s-i-1)=s-1 \leqslant (1+s)-1$, $1+s \equiv s-1 (\mathrm{mod}\ 2)$, 利用归纳假设, 只要 $1+s \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$, 就有

$$F_{1,s}=\sum_{i=0}^{s-1} F_{i,s-i-1} y_{i+1}=0.$$

当 $m=2$ 时, 由第三式, 因为对于任何整数 $1 \leqslant i \leqslant s$, $i+(s-i)=s \leqslant (2+s)-1$, $s \equiv s+21 (\mathrm{mod}\ 2)$, 利用归纳假设, 只要 $2+s \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$, 就有

$$F_{2,s}=\sum_{i=1}^{s} F_{i,s-i} y_i=0.$$

当 $m \geqslant 3$ 时, 由第四式, 因为 $(m-2)+s=m+s-2 \leqslant m+s-1$, $m+s-2 \equiv m+s (\mathrm{mod}\ 2)$, 利用归纳假设, 只要 $m+s \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$, 就有 $F_{m-2,s}=0$. 因为对于任何整数 $1 \leqslant i \leqslant s$, $(i+m-2)+(s-i)=m+s-2 \leqslant (m+s)-1$, $m+s-2 \equiv m+s (\mathrm{mod}\ 2)$, 利用归纳假设, 只要 $m+s \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$, 就有

$$\sum_{i=1}^{s} F_{i+m-2,s-i} y_i=0.$$

从而, 只要 $m+s \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$, 就有

$$F_{m,n}=(m-1)F_{m-2,s}+\sum_{i=1}^{s} F_{i+m-2,s-i} y_i=0.$$

综上所述, 即得欲证的结论. □

在求解的过程中, 这个引理使我们减少了一半的工作量.

引理 10.5.6 对于任何整数 $m \geqslant 0$, 有

$$F_{m,0} = \begin{cases} a, & m=0, \\ 0, & m=2t+1,\ t \geqslant 0, \\ \dfrac{am!}{2^t t!}, & m=2t,\ t \geqslant 1. \end{cases} \tag{10.5.10}$$

证明 当 $m=0$ 时, 由式 (10.5.9) 的第一式给出. 当 $m \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$ 时, 由引理 10.5.5 给出. 当 $m \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$ 时, 用式 (10.5.9). 首先, $F_{0,0}=a$ 和 $F_{2,0}=a$ 分别由第一式和第二式给出. 对于 $m=2t$, 假设当 $m=2(t-1)$ 时, 有 $F_{2(t-1),0} = \dfrac{a(2t-2)!}{2^{t-1}(t-1)!}$. 用数学归纳法, 往证 $F_{2t,0} = \dfrac{am!}{2^t t!}$.

由式 (10.5.9) 的第四式,

$$\begin{aligned} F_{2t,0} &= (2t-1)F_{2t-2,0} \\ &= (2t-1)\frac{a(2t-2)!}{2^{t-1}(t-1)!} = \frac{a(2t)!}{2^t t!}. \end{aligned}$$

这就是所要证明的. □

当 $s=0$ 时, 这个引理可使我们直接确定 $F_{m,s}$ $(m \geqslant 0)$.

引理 10.5.7 对于任何整数 $m \geqslant 0$, 有

$$F_{m,1} = \begin{cases} 0, & m=2t,\ t \geqslant 0, \\ ay_1, & m=1, \\ (m-1)F_{m-2,1} + \dfrac{a(m-1)!}{2^t t!}y_1, & m=2t+1,\ t \geqslant 1. \end{cases} \tag{10.5.11}$$

证明 当 $m \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$ 时, 由引理 10.5.5 给出. 当 $m=1$ 时, 由式 (10.5.9) 的第二式,

$$F_{1,1} = F_{0,0}y_1 = ay_1,$$

即得式 (10.5.11) 的第二式. 当 $m=2t+1$, $t \geqslant 1$ 时, 用式 (10.5.9) 的第四式,

$$\begin{aligned} F_{2t+1,1} &= (2t)F_{2t-1,1} + F_{2t,0}y_1 \\ &= (2t)F_{2t-1,1} + \frac{a(2t)!}{2^t t!}, \end{aligned}$$

这就是式 (10.5.11) 的第三式. □

当 $s=1$ 时, 这个引理给我们提供了确定 $F_{m,s}$ 所有情形的方法.

引理 10.5.8 对于任何整数 $m \geqslant 0$, 有

$$F_{m,2} = \begin{cases} 0, & m=0, \text{或 } m \equiv 1 \pmod 2, \\ ay_1^2 + ay_2, & m=2, \\ (m-1)F_{m-2,2} + F_{m-1,1}y_1 + \dfrac{a(m)!}{2^t t!}y_2, & m=2t,\ t \geqslant 2, \end{cases} \tag{10.5.12}$$

其中 $F_{m-1,1}$ 已由式 (10.5.11) 给出.

证明 当 $m=0$ 或 $m \equiv 1 \pmod 2$ 时, 分别由引理 10.5.6 或引理 10.5.5 给出. 当 $m=2$ 时, 由式 (10.5.9) 的第三式,

$$F_{2,2} = F_{1,1}y_1 + F_{2,0}y_2 = ay_1^2 + F_{2,0}y_2 = ay_1^2 + ay_2,$$

即得式 (10.5.12) 的第二式. 当 $m=2t$, $t \geqslant 2$ 时, 用式 (10.5.9) 的第四式,

$$\begin{aligned} F_{2t,2} &= (2t-1)F_{2t-2,2} + F_{2t-1,1}y_1 + F_{2t,0}y_2 \\ &= (2t-1)F_{2t-2,2} + F_{2t-1,1}y_1 + \frac{a(2t)!}{2^t t!}y_2, \end{aligned}$$

这就是式 (10.5.12) 的第三式. □

当 $s=2$ 时, 这个引理给我们提供了确定 $F_{m,s}$ 所有情形的方法. 由上面三个引理, 我们看到, 可以依 s 逐一递增的次序一直做下去.

引理 10.5.9 对于任何整数 m, $s \geqslant 0$, $F_{m,s}$ 与 y_l $(l \geqslant s+1)$ 无关.

证明 当 $m+s \leqslant 3$ 时, 从已经得到的 $F_{m,s}$ 中, 可以看出满足欲证的结论.

对于 $m+s \geqslant 4$ 时的一般情形, 假设 $F_{r,t}$ $(r+t \leqslant m+s-1,\ m,s \geqslant 0)$ 满足欲证的结论. 用数学归纳法, 往证 $F_{m,s}$ 满足欲证的结论.

当 $m=0$ 时, 由式 (10.5.9) 的第一式即知, 这种情形不足道.

当 $m=1$ 时, 用式 (10.5.9) 的第二式. 因为对于任何整数 $0 \leqslant i \leqslant s-1$, $i+(s-i-1)=s-1 \leqslant s = m+s-1$, 由归纳法假设, $F_{i,s-i-1}$ 与 y_l $(l \geqslant s-i)$ 无关. 由 $i \geqslant 0$, $F_{i,s-i-1}$ $(0 \leqslant i \leqslant s-1)$ 与 y_l $(l \geqslant s)$ 无关. 从而

$$F_{1,s} = \sum_{i=0}^{s-1} F_{i,s-i-1}y_{i+1}$$

与 y_l $(l \geqslant s+1)$ 无关.

当 $m=2$ 时, 用式 (10.5.9) 的第三式. 因为对于任何整数 $1\leqslant i\leqslant s, i+(s-i)=s\leqslant s+1=m+s-1$, 由归纳假设, $F_{i,s-i}$ 与 y_l $(l\geqslant s-i+1)$ 无关. 由 $i\geqslant 1$, $F_{i,s-i}$ $(1\leqslant i\leqslant s)$ 与 y_l $(l\geqslant s)$ 无关. 从而

$$F_{2,s}=a\delta_{0,s}+\sum_{i=1}^{s}F_{i,s-i}y_i$$

与 y_l $(l\geqslant s+1)$ 无关.

当 $m\geqslant 3$ 时, 用式 (10.5.9) 的第四式. 由归纳假设, $F_{m-2,s}$ 与 y_l $(l\geqslant s+1)$ 无关. 因为对于任何整数 $1\leqslant i\leqslant s$, $(i+m-2)+(s-i)=m+s-2\leqslant m+s-1$, 由归纳假设, $F_{i+m-2,s-i}$ 与 y_l $(l\geqslant s-i+1)$ 无关. 由 $i\geqslant 1$, $F_{i+m-2,s-i}$ $(1\leqslant i\leqslant s)$ 与 y_l $(l\geqslant s)$ 无关. 从而

$$\sum_{i=1}^{s}F_{i+m-2,s-i}y_i$$

与 y_l $(l\geqslant s+1)$ 无关. 从而

$$F_{m,s}=(m-1)F_{m-2,s}+\sum_{i=1}^{s}F_{i+m-2,s-i}y_i$$

与 y_l $(l\geqslant s+1)$ 无关. □

这个引理告诉我们, $F_{m,s}$ 是一个至多 s 个变元 $\boldsymbol{y}_s=(y_1,y_2,\cdots,y_s)$ 的函数.

引理 10.5.10 对于任何整数 $m,\ s\geqslant 0$, $F_{m,s}$ 是 $\boldsymbol{y}_s$ 的一个至多 s 次多项式.

证明 当 $m+s\leqslant 3$ 时, 容易验证 $F_{m,s}$ 是 $\boldsymbol{y}_s$ 的一个至多 s 次多项式. 对于 $m+s\geqslant 4$ 时的一般情形, 可以假设 $F_{r,t}$ $(r+t\leqslant m+s-1)$ 是 $\boldsymbol{y}_t$ 的一个至多 t 次多项式. 用数学归纳法, 往证 $G_{m,s}$ 是 $\boldsymbol{y}_s$ 的一个至多 s 次多项式.

在式 (10.5.9) 的基础上, 当 $m=0$ 时, 这种情形不足道.

当 $m=1$ 时, 因为对于任何整数 $0\leqslant i\leqslant s-1, i+(s-i-1)=s-1\leqslant m+s-1$, 由归纳假设, $F_{i,s-i-1}$ 为 $\boldsymbol{y}_{s-i-1}$ 的一个至多 $s-i-1$ 次多项式. 因为 $i\geqslant 0$, $F_{i,s-i-1}$ 至多是 $\boldsymbol{y}_{s-1}$ 的一个 $s-1$ 次多项式. 考虑到 y_i $(i\leqslant s-1)$ 至多为 $\boldsymbol{y}_s$ 的一个 s 次多项式. 从而, 用式 (10.5.9) 的第二式, $F_{1,s}$ 至多是 $\boldsymbol{y}_s$ 的一个 s 次多项式.

当 $m=2$ 时, 利用式 (10.5.9) 的第三式. 因为对于任何整数 $1\leqslant i\leqslant s, i+(s-i)=s\leqslant m+s-1$, 用归纳假设, $F_{i,s-i}$ 是 $\boldsymbol{y}_{s-i}$ 的一个至多 $s-i$ 次多项式. 因为 $i\geqslant 1$, 所以 $F_{i,s-i}$ 至多是 $\boldsymbol{y}_{s-1}$ 的一个 $s-1$ 次多项式. 再考虑到 $i\leqslant s$, $F_{i,s-i}$ 至多为 $\boldsymbol{y}_s$ 的一个 s 次多项式. 从而, $F_{2,s}$ 为 $\boldsymbol{y}_{2s}$ 的一个至多 s 次多项式.

当 $m\geqslant 3$ 时, 利用式 (10.5.9) 的第四式. 由归纳假设, $F_{m-2,s}$ 是 $\boldsymbol{y}_s$ 的一个至多 s 次多项式. 因为对于任何整数 $1\leqslant i\leqslant s$, $(i+m-2)+(s-i)=m+s-2\leqslant$

$m+s-1$, 用归纳假设, $F_{i,s-i}$ 是 $\boldsymbol{y}_{s-i}$ 的一个至多 $s-i$ 次多项式. 因为 $i\geqslant 1$, 所以 $F_{i,s-i}$ 至多是 $\boldsymbol{y}_{s-1}$ 的一个 $s-1$ 次多项式. 再考虑到 $i\leqslant s$, $F_{i,s-i}$ 至多为 $\boldsymbol{y}_s$ 的一个 s 次多项式. 从而, $F_{m,s}$ 为 $\boldsymbol{y}_s$ 的一个至多 s 次多项式.

综上所述, 就得欲证的结论. □

这个引理表明, 对任何给定整数 $s\geqslant 0$, 所有 $F_{m,s}$ 都只含有限项, 而且它的项数有一个不依赖 m 的上界.

引理 10.5.11 对于任何整数 $m,\ s\geqslant 0$, $F_{m,s}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$ 当且仅当 $a\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$.

证明 如果对任何整数 $m,\ s\geqslant 0$, $F_{m,s}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$ 但 $a\notin\mathcal{R}_+$, 则 $F_{0,0}=a$, 与方程式 (10.5.2) 始条件中的 $a\in\{\mathcal{R}\}_+$ 矛盾. 从而, 必要性得证.

反之, 对于 $a\in\{\mathcal{R}\}_+$, 从已经求出的 $F_{m,s}$ $(0\leqslant m+s\leqslant 3)$ 中可以看出, 这些 $F_{m,s}\in\mathcal{R}\{\boldsymbol{y}\}$. 对于 $m+s\geqslant 4$ 时的一般情形, 可以假设对于任何整数 $r,t\geqslant 0$, 当 $r+t\leqslant m+s-1$ 时, 都有 $F_{r,t}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$. 用数学归纳法, 往证 $F_{m,s}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$.

在式 (10.5.9) 的基础上, 当 $m=0$ 时, 这种情形不足道.

当 $m=1$ 时, 因为对于任何整数 $0\leqslant i\leqslant s-1$,

$$i+(s-i-1)=s-1\leqslant m+s-1,$$

由归纳假设, $F_{i,s-i-1}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$. 从而, 用式 (10.4.12) 的第二式, $F_{1,s}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$.

当 $m=2$ 时, 利用式 (10.5.9) 的第三式. 因为 $i+(s-i)=s\leqslant m+s-1$, 用归纳假设, 已经知道 $F_{i,s-i}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$. 从而, $F_{2,s}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$.

当 $m\geqslant 3$ 时, 利用式 (10.5.9) 的第四式. 由归纳假设, $F_{m-2,s}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$, 第一项属于 $\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$. 在第二项中, 因为对于任何整数 $1\leqslant i\leqslant s$,

$$(i+m-2)+(s-i)=m+s-2\leqslant m+s-1,$$

用归纳假设, $F_{i+m-2,s-i}\in\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$. 从而, 第二项也属于 $\mathcal{R}_+\{\boldsymbol{y}\}$.

综上所述, 即得欲证的结论. □

至此, 可以考虑方程式 (10.5.2) 解的表达式了.

定理 10.5.3 令 $\tilde{f}^{\text{un}}$ 为方程式 (10.5.2) 的解. 对于任何整数 $m,\ s\geqslant 0$, 记

$$\tilde{F}^{\text{un}}_{m,s}=\left[\partial_x^m\tilde{f}^{\text{un}}\right]_{\boldsymbol{y}}^s=U_{m,s},$$

则 $U_{m,s}$ 有如下有限正项和表达式:

$$U_{m,s}=\begin{cases}a, & m=s=0,\\ 0, & m=0,\ s\geqslant 1,\ \text{或}\ m\not\equiv s(\bmod 2),\ m\geqslant 1,\ s\geqslant 0,\\ \dfrac{am!}{2^t t!}, & s=0,\ m=2t\geqslant 1,\\ ay_1, & m=s=1,\\ (m-1)U_{m-2,1}+\dfrac{a(m-1)!}{2^t t!}y_1, & s=1,\ m=2t+1,\ t\geqslant 1,\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{s-1}U_{i,s-i-1}y_{i+1}, & m=1,\ s=2t+1,\ t\geqslant 1,\\ (m-1)U_{m-2,s}+\displaystyle\sum_{i=1}^{s}U_{i+m-2,s-i}y_i, & s\geqslant 2,\ m\geqslant 2,\ m\equiv s(\bmod 2).\end{cases}$$

(10.5.13)

证明　当 $m=s=0$, 由方程式 (10.5.2) 的始条件得到.

当 $m=0,\ s\geqslant 1$, 或 $m\not\equiv s(\bmod 2),\ m\geqslant 1,\ s\geqslant 0$ 时, 分别由式 (10.5.9) 的第一式或引理 10.5.5 给出.

当 $s=0,\ m=2t\geqslant 1$ 时, 由引理 10.5.6 给出.

当 $m=s=1$ 时, 由式 (10.5.11) 的第二式给出.

当 $s=1,\ m=2t+1,\ t\geqslant 1$ 时, 由式 (10.5.11) 的第三式给出.

当 $m=1,\ s=2t+1,\ t\geqslant 1$ 时, 由式 (10.5.9) 的第二式给出.

当 $s\geqslant 2,\ m\geqslant 2,\ m\equiv s(\bmod 2)$ 时, 由式 (10.5.11) 的第四式给出. □

继续看一看, 当 $3\leqslant m+s\leqslant 6$ 时, $U_{m,s}\ (=F_{m,s})$ 的值. 由引理 10.5.5, 只需讨论 $m+s=4$ 和 $m+s=6$ 时的情形.

当 $m+s=4$ 时, 因为已知 $U_{4,0}=3a$ 和 $U_{0,4}=0$, 故只需求 $U_{3,1}$, $U_{2,2}$ 和 $U_{1,3}$.

求 $U_{3,1}$. 由式 (10.5.13), 有

$$U_{3,1}=(3-1)U_{1,1}+\frac{a2!}{2}y_1=2(ay_1)+ay_1,$$

即 $U_{3,1}=3ay_1$.

求 $U_{2,2}$. 由式 (10.5.13), 有

$$U_{2,2}=(2-1)U_{2-2,2}+\sum_{i=1}^{2}U_{i,2-i}y_i=U_{1,1}y_1+U_{2,0}y_2=(ay_1)y_1+ay_2,$$

即 $U_{2,2}=ay_1^2+ay_2$.

求 $U_{1,3}$. 由式 (10.5.13), 有

$$U_{1,3}=\sum_{i=0}^{2}U_{i,2-i}y_{i+1}=U_{0,2}y_1+U_{1,1}y_2+U_{2,0}y_3,=(ay_1)y_2+(a)y_3,$$

即 $U_{1,3}=ay_1y_2+ay_3$.

当 $m+s=6$ 时, 除已知 $U_{6,0}=15a$ 和 $U_{0,6}=0$ 外, 有 $U_{5,1}=4U_{3,1}+3ay_1=15ay_1$,

$$\begin{aligned}U_{1,5}&=\sum_{i=0}^{5-1}U_{i,4-i}y_{i+1}\\&=U_{0,4}y_1+U_{1,3}y_2+U_{2,2}y_3+U_{3,1}y_4+U_{4,0}y_5,\\&=(ay_1y_2+ay_3)y_2+(ay_1^2+ay_2)y_3+(3ay_1)y_4+(3a)y_5\\&=ay_1y_2^2+3ay_1y_4+ay_1^2y_3+2ay_2y_3+3ay_5.\end{aligned}$$

只剩下 $U_{4,2}$, $U_{3,3}$ 和 $U_{2,4}$. 读者可自行写出.

例 10.5.1 在曲面上, 普通地图以根点次和非根点剖分向量为参数的根同构分类. 若在方程式 (10.5.2) 中, 取 $a=1$, 则有

$$\begin{cases}f=1+x^2f+x^3\dfrac{\partial f}{\partial x}+x\displaystyle\int_{\boldsymbol{y}}y\delta_{x,y}(uf\big|_{u=x}),\\ f|_{x=0,\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}}=1.\end{cases}\tag{10.5.14}$$

这就是, 在 [76] 中, 为了讨论曲面上普通地图以根点次和非根点剖分向量为参数的根同构分类数而提出的那个方程.

记 $K_{m,s}=U_{m,s}\big|_{a=1}$, 则 $K_{m,s}$ 为在曲面上普通地图以根点次 m 和非根点剖分向量 $\boldsymbol{n}$ $(s=\pi(\boldsymbol{n}))$ 的根同构分类数的分布.

如果 $\tilde{f}^{\text{un}}$ 为方程式 (10.5.14) 的解, 则由定理 10.5.2, 对于任何整数 $m,\ s\geqslant 0$, $\left[\partial_x^m\tilde{f}^{\text{un}}\right]_{\boldsymbol{y}}^s=K_{m,s}$. 从而, 由定理 10.5.3, $K_{m,s}$ 有如下有限正项和表示:

$$K_{m,s}=\begin{cases}1, & m=s=0,\\ 0, & m=0,\ s\geqslant 1,\ \text{或}\ m\not\equiv s(\text{mod }2),\ m\geqslant 1,\ s\geqslant 0\ ,\\ \dfrac{m!}{2^tt!}, & s=0,\ m=2t\geqslant 1,\\ y_1, & m=s=1,\\ (m-1)K_{m-2,1}+\dfrac{(m-1)!}{2^tt!}y_1, & s=1,\ m=2t+1,\ t\geqslant 1,\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{s-1}K_{i,s-i-1}y_{i+1}, & m=1,\ s=2t+1,\ t\geqslant 1,\\ (m-1)K_{m-2,s}+\displaystyle\sum_{i=1}^{s}K_{i+m-2,s-i}y_i, & s\geqslant 2,\ m\geqslant 2,\ m=s(\text{mod }2).\end{cases}\tag{10.5.15}$$

例如, 前面已经得到 $U_{1,5}=ay_1y_2^2+3ay_1y_4+ay_1^2y_3+2ay_2y_3+3ay_5$. 这就意味着, $K_{1,5}=y_1y_2^2+3y_1y_4+y_1^2y_3+2y_2y_3+3y_5$.

在 $K_{1,5}$ 的五项中, 第一项 $y_1y_2^2$ 为一个有两条棱的路, 根顶点的次为 1, 只有一种定根方式, $\pi(\boldsymbol{n})=1+2\times2=5$, 其中 $\boldsymbol{n}=(1,2)$. 图 10.5.1 显示了第二项到第五项. 例如, 第二项 $3y_1y_4=2a+b$, 第三项 $y_1^2y_3=c$, 第四项 $2y_2y_3=d+e$, 第五项 $3y_5=f+g+h$.

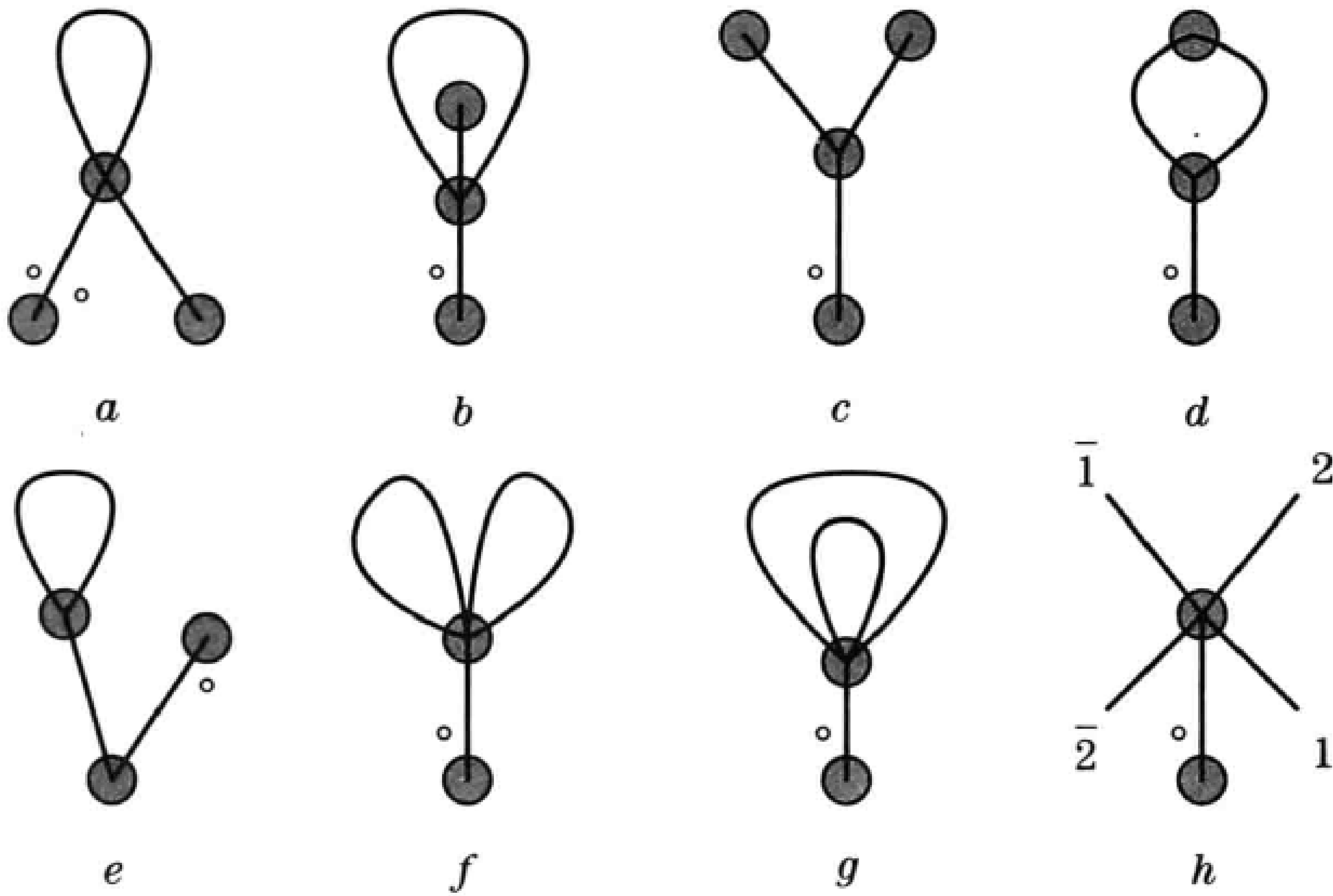


图 10.5.1　曲面上普通地图依点剖分向量的根同构类

10.6 注　记

1. 因为可以证明限端地图在曲面上, 以根点次和非根顶点按次剖分向量为参数的根同构类的计数函数, 满足方程式 (10.1.1), 由定理 10.1.2, 方程式 (10.1.2) 的解, 当取 $a=1$ 时, 就是这个计数函数. 令 $F^{\mathrm{rd}}_{m,\boldsymbol{n}}$ 是根点次为 m 和非根顶点按次剖分向量为 $\boldsymbol{n}$ 的限端地图在曲面上根同构类的数目, 可知它们每一类的基准图在曲面上的嵌入数为

$$\left|\mu(\mathcal{G}^{\mathrm{rd}}_{m,\boldsymbol{n}})\right|=(m-1)!\left|\mathcal{G}^{\mathrm{rd}}_{m,\boldsymbol{n}}\right|(\underline{i-1})!^{\boldsymbol{n}},\tag{10.6.1}$$

其中 $\mathcal{G}^{\mathrm{rd}}_{m,\boldsymbol{n}}$ 为根点次 m 和非根顶点按次剖分向量 $\boldsymbol{n}$ 基准图的集合, 和

$$(\underline{i-1})!^{\boldsymbol{n}}=\prod_{i\geqslant1}(i-1)!^{n_i}.$$

记 $t=\mathrm{aut}_{1/2}(G)$ 为图 G 的自伴同构群的阶,

$$\mathcal{I}^{\mathrm{rd}}_{m,\boldsymbol{n}}=\{t\big|\exists G\in\mathcal{G}^{\mathrm{rd}}_{m,\boldsymbol{n}},\ t=\mathrm{aut}_{1/2}(G)\},\tag{10.6.2}$$

则根据 [77] 中的定理 4.1,

$$F^{\mathrm{rd}}_{m,\boldsymbol{n}}=\sum_{t\in\mathcal{I}^{\mathrm{rd}}_{m,\boldsymbol{n}}}\frac{m+s}{t}\big|\mu(\mathcal{G}^{\mathrm{rd},t}_{m,\boldsymbol{n}})\big|,\tag{10.6.3}$$

其中 $s=\boldsymbol{i}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{i}=(1,2,3,\cdots)$, $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3,\cdots)$.

从而, 式 (10.1.14) 中的 $\widetilde{F}_{m,s}=F^{\mathrm{rd}}_{m,s}$, 自然 $\widetilde{F}_{m,\boldsymbol{n}}=F^{\mathrm{rd}}_{m,\boldsymbol{n}}$ 有如下的直接显式:

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_{m,s}&=\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}^{\mathrm{rd}}_{m,s}}\Big(\sum_{t\in\mathcal{I}^{\mathrm{rd}}_{m,\boldsymbol{n}}}\frac{m+s}{t}\big|\mu(\mathcal{G}^{\mathrm{rd},t}_{m,\boldsymbol{n}})\big|\Big)\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}\quad(\text{用引理 10.1.10})\\&=\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}^{\mathrm{rd}}_{m,s}}\Big(\sum_{t\in\mathcal{I}^{\mathrm{rd}}_{m,\boldsymbol{n}}}\frac{(m+s)(m-1)!}{t}\big|\mathcal{G}^{\mathrm{rd},t}_{m,\boldsymbol{n}}\big|\Big)\big((\underline{i-1})!\boldsymbol{y}\big)^{\boldsymbol{n}}.\end{aligned}\tag{10.6.4}$$

从式 (10.1.13) 可以看出, $E_{m,s}$ 的每一项的系数不是含有因子 a, 就是含有因子 1. 令 $\mathcal{J}_{m,s}(a)=\{\boldsymbol{n}\big|$ 在 $E_{m,s}$ 中, 项 $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}$ 的系数含因子 $a\}$, $\mathcal{J}_{m,s}(\bar{a})=\{\boldsymbol{n}\big|$ 在 $E_{m,s}$ 中, 项 $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}$ 的系数不含因子 $a\}$. 记

$$\lambda_{m,s}(\boldsymbol{n})=\begin{cases}a, & \boldsymbol{n}\in\mathcal{J}_{m,s}(a),\\ 1, & \boldsymbol{n}\in\mathcal{J}_{m,s}(\bar{a}),\end{cases}\tag{10.6.5}$$

则由定理 10.1.2, 在方程式 (10.1.2) 的解中, $E_{m,s}$ 有如下直接显式:

$$E_{m,s}=\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}_{m,s}}\Big(\sum_{t\in\mathcal{I}^{\mathrm{rd}}_{m,\boldsymbol{n}}}\frac{\kappa_{m,s}(\boldsymbol{n})}{t}\big|\mathcal{G}^{\mathrm{rd},t}_{m,\boldsymbol{n}}\big|\Big)\big((\underline{i-1})!\boldsymbol{y}\big)^{\boldsymbol{n}},\tag{10.6.6}$$

其中

$$\kappa_{m,s}(\boldsymbol{n})=\lambda_{m,s}(\boldsymbol{n})(m+s)(m-1)!.\tag{10.6.7}$$

2. 因为无桥 (或无割) 地图在曲面上, 以根点次和非根顶点按次剖分向量为参数的根同构类的计数函数, 满足当 $a=1$ 时的方程式 (10.2.1), 由定理 10.2.2, 方程式 (10.2.2) 的解, 当取 $a=1$ 时, 就是这个计数函数. 令 $F^{\mathrm{nc}}_{m,\boldsymbol{n}}$ 是根点次为 m 和非根顶点按次剖分向量为 $\boldsymbol{n}$ 的无桥地图在曲面上根同构类的数目, 则它们每一类的基准图在曲面上的嵌入数为

$$\big|\mu(\mathcal{G}^{\mathrm{nc}}_{m,\boldsymbol{n}})\big|=(m-1)!\big|\mathcal{G}^{\mathrm{nc}}_{m,\boldsymbol{n}}\big|(\underline{i-1})!^{\boldsymbol{n}},\tag{10.6.8}$$

其中 $\mathcal{G}^{\rm nc}_{m,\boldsymbol{n}}$ 是根点次为 m 和非根顶点按次剖分向量为 $\boldsymbol{n}$ 的基准图的集合.

记 $t=\mathrm{aut}_{1/2}(G)$ 为图 G 的自伴同构群的阶,

$$\mathcal{I}^{\rm nc}_{m,\boldsymbol{n}}=\{t\big|\,\exists G\in\mathcal{G}^{\rm nc}_{m,\boldsymbol{n}},\ t=\mathrm{aut}_{1/2}(G)\},\tag{10.6.9}$$

则根据 [77] 中的定理 4.1,

$$F^{\rm nc}_{m,\boldsymbol{n}}=\sum_{t\in\mathcal{I}^{\rm nc}_{m,\boldsymbol{n}}}\frac{m+s}{t}\big|\mu(\mathcal{G}^{{\rm nc},t}_{m,\boldsymbol{n}})\big|,\tag{10.6.10}$$

其中 $s=\boldsymbol{i}\boldsymbol{n}^{\rm T}$, $\boldsymbol{i}=(1,2,3,\cdots)$, $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3,\cdots)$.

从而, 式 (10.2.13) 中的 $H_{m,s}=\hat{G}_{m,s}$ 有如下的直接显式:

$$\begin{aligned}H_{m,s}&=\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}^{\rm nc}_{m,s}}\Big(\sum_{t\in\mathcal{I}^{\rm nc}_{m,\boldsymbol{n}}}\frac{m+s}{t}\big|\mu(\mathcal{G}^{{\rm nc},t}_{m,\boldsymbol{n}})\big|\Big)\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}\quad(\text{用引理 }10.2.10)\\&=\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}^{\rm nc}_{m,s}}\Big(\sum_{t\in\mathcal{I}^{\rm nc}_{m,\boldsymbol{n}}}\frac{(m+s)(m-1)!}{t}\big|\mathcal{G}^{{\rm nc},t}_{m,\boldsymbol{n}}\big|\Big)\big((\underline{i-1})!\boldsymbol{y}\big)^{\boldsymbol{n}}.\end{aligned}\tag{10.6.11}$$

从式 (10.2.12) 可以看出, $K_{m,s}$ 中每一项的系数不是含有因子 a, 就是含有因子 1. 令 $\mathcal{J}_{m,s}(a)=\{\boldsymbol{n}|$ 在 $K_{m,s}$ 中, 项 $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}$ 的系数含因子 $a\}$, $\mathcal{J}_{m,s}(\bar{a})=\{\boldsymbol{n}|$ 在 $K_{m,s}$ 中, 项 $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}$ 的系数不含因子 $a\}$. 记

$$\lambda(\boldsymbol{n})=\begin{cases}a,&\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}_{m,s}(a),\\1,&\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}_{m,s}(\bar{a}),\end{cases}\tag{10.6.12}$$

则由定理 10.2.2, 在由式 (10.2.12) 给出的方程式 (10.2.2) 的解中, $K_{m,s}$ 有如下直接显式:

$$K_{m,s}=\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}^{\rm nc}_{m,s}}\Big(\sum_{t\in\mathcal{I}^{\rm nc}_{m,\boldsymbol{n}}}\frac{\kappa_{m,s}(\boldsymbol{n})}{t}\big|\mathcal{G}^{{\rm nc},t}_{m,\boldsymbol{n}}\big|\Big)\big((\underline{i-1})!\boldsymbol{y}\big)^{\boldsymbol{n}},\tag{10.6.13}$$

其中

$$\kappa_{m,s}(\boldsymbol{n})=\lambda(\boldsymbol{n})(m+s)(m-1)!.\tag{10.6.14}$$

3. 因为无环地图在曲面上, 以根点次和非根顶点按次剖分向量为参数的根同构类的计数函数, 满足当 $a=1$ 时的方程式 (10.3.2), 由定理 10.3.2, 方程式 (10.3.2) 的解, 当取 $a=1$ 时, 就是这个计数函数. 令 $F^{\rm nl}_{m,\boldsymbol{n}}$ 是根点次为 m 和非根顶点按次剖分向量为 $\boldsymbol{n}$ 的无环地图在曲面上根同构类的数目, 则它们每一类的基准图在曲面上的嵌入数为

$$\big|\mu(\mathcal{G}^{\rm nl}_{m,\boldsymbol{n}})\big|=(m-1)!\big|\mathcal{G}^{\rm nl}_{m,\boldsymbol{n}}\big|(\underline{i-1})!^{\boldsymbol{n}},\tag{10.6.15}$$

其中 $\mathcal{G}^{\rm nl}_{m,\boldsymbol{n}}$ 是根点次为 m 和非根顶点按次剖分向量为 $\boldsymbol{n}$ 的基准图的集合.

记 $t=\mathrm{aut}_{1/2}(G)$ 为图 G 的自伴同构群的阶,

$$\mathcal{I}^{\rm nl}_{m,\boldsymbol{n}}=\{t\big|\,\exists G\in\mathcal{G}^{\rm nl}_{m,\boldsymbol{n}},\ t=\mathrm{aut}_{1/2}(G)\},\tag{10.6.16}$$

则根据 [77] 中的定理 4.1,

$$F^{\rm nl}_{m,\boldsymbol{n}}=\sum_{t\in\mathcal{I}^{\rm nl}_{m,\boldsymbol{n}}}\frac{m+s}{t}\big|\mu(\mathcal{G}^{{\rm nl},t}_{m,\boldsymbol{n}})\big|,\tag{10.6.17}$$

其中 $s=\boldsymbol{i}\boldsymbol{n}^{\rm T}$, $\boldsymbol{i}=(1,2,3,\cdots)$, $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3,\cdots)$.

从而, 式 (10.3.12) 中的 $N_{m,s}$ 有如下直接显式:

$$\begin{aligned}N_{m,s}\big|_{a=1}&=\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}^{\rm nl}_{m,s}}\Big(\sum_{t\in\mathcal{I}^{\rm nl}_{m,\boldsymbol{n}}}\frac{m+s}{t}\big|\mu(\mathcal{G}^{{\rm nl},t}_{m,\boldsymbol{n}})\big|\Big)\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}\quad(\text{用引理 10.3.9})\\&=\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}^{\rm nl}_{m,s}}\Big(\sum_{t\in\mathcal{I}^{\rm nl}_{m,\boldsymbol{n}}}\frac{(m+s)(m-1)!}{t}\big|\mathcal{G}^{{\rm nl},t}_{m,\boldsymbol{n}}\big|\Big)\big((\underline{i-1})!\boldsymbol{y}\big)^{\boldsymbol{n}}.\end{aligned}\tag{10.6.18}$$

从式 (10.3.12) 可以看出, $N_{m,s}$ 中的每一项系数含一个 a 的多项式因子, 记为 $a_{\boldsymbol{n}}$. 由定理 10.3.2, 在由式 (10.3.12) 给出的方程式 (10.3.2) 的解中, $N_{m,s}$ 有如下直接显式:

$$N_{m,s}=\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}^{\rm nl}_{m,s}}\Big(\sum_{t\in\mathcal{I}^{\rm nl}_{m,\boldsymbol{n}}}\frac{\nu_{\boldsymbol{n}}}{t}\big|\mathcal{G}^{{\rm nl},t}_{m,\boldsymbol{n}}\big|\Big)\big((\underline{i-1})!\boldsymbol{y}\big)^{\boldsymbol{n}},\tag{10.6.19}$$

其中

$$\nu_{\boldsymbol{n}}=a_{\boldsymbol{n}}(m+s)(m-1)!.\tag{10.6.20}$$

4. 因为 Euler 地图在曲面上, 以根点次和非根顶点按次剖分向量为参数的根同构类的计数函数, 满足当 $a=1$ 时的方程式 (10.4.2), 由定理 10.4.2, 方程式 (10.4.2) 的解, 当取 $a=1$ 时, 就是这个计数函数. 令 $F^{\rm El}_{m,\boldsymbol{n}}$ 是根点次为 $2m$ 和非根顶点按次剖分向量为 $\boldsymbol{n}=(y_2,y_4,y_6,\cdots)$ 的 Euler 地图在曲面上根同构类的数目, 则它们每一类的基准图在曲面上的嵌入数为

$$\big|\mu(\mathcal{G}^{\rm El}_{m,\boldsymbol{n}})\big|=(2m-1)!\big|\mathcal{G}^{{\rm El},t}_{m,\boldsymbol{n}}\big|(\underline{2i-1})!^{\boldsymbol{n}},\tag{10.6.21}$$

其中 $\mathcal{G}^{\rm El}_{m,\boldsymbol{n}}$ 是根点次为 $2m$ 和非根顶点按次剖分向量为 $\boldsymbol{n}$ 的基准图的集合.

记 $t=\mathrm{aut}_{1/2}(G)$ 为图 G 的自伴同构群的阶,

$$\mathcal{I}^{\rm El}_{m,\boldsymbol{n}}=\{t\big|\,\exists G\in\mathcal{G}^{\rm El}_{m,\boldsymbol{n}},\ t=\mathrm{aut}_{1/2}(G)\},\tag{10.6.22}$$

则根据 [77] 中的定理 4.1,

$$F_{m,\boldsymbol{n}}^{\mathrm{El}} = \sum_{t\in\mathcal{I}_{m,\boldsymbol{n}}^{\mathrm{El}}} \frac{2(m+s)}{t}\left|\mu(\mathcal{G}_{m,\boldsymbol{n}}^{\mathrm{El},t})\right|, \tag{10.6.23}$$

其中 $s=\boldsymbol{i}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}/2$, $\boldsymbol{i}=(2,4,6,\cdots)$, $\boldsymbol{n}=(n_2,n_4,n_6,\cdots)$.

从而, 式 (10.4.13) 中的 $G_{m,s}^{\mathrm{El}}$ 有如下直接显式:

$$\begin{aligned} G_{m,s}^{\mathrm{El}}\big|_{a=1} &= \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}_{m,s}^{\mathrm{El}}}\Big(\sum_{t\in\mathcal{I}_{m,\boldsymbol{n}}^{\mathrm{El}}}\frac{2m+2l}{t}\left|\mu(\mathcal{G}_{m,\boldsymbol{n}}^{\mathrm{El},t})\right|\Big)\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}} \quad (\text{用引理 } 10.4.8) \\ &= \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}_{m,s}^{\mathrm{El}}}\Big(\sum_{t\in\mathcal{I}_{m,\boldsymbol{n}}^{\mathrm{El}}}\frac{(2m+2l)(2m-1)!}{t}\left|\mathcal{G}_{m,\boldsymbol{n}}^{\mathrm{El},t}\right|\Big)\big((\underline{2i-1})!\boldsymbol{y}\big)^{\boldsymbol{n}}. \end{aligned} \tag{10.6.24}$$

从式 (10.4.13) 可以看出, $G_{m,s}^{\mathrm{El}}$ 的每一项的系数不是含有因子 a, 就是含有因子 1. 令 $\mathcal{J}_{m,s}(a)=\{\boldsymbol{n}|$ 在 $G_{m,s}^{\mathrm{El}}$ 中, 项 $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}$ 的系数含因子 $a\}$, $\mathcal{J}_{m,s}(\bar{a})=\{\boldsymbol{n}|$ 在 $G_{m,s}^{\mathrm{El}}$ 中, 项 $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}$ 的系数不含因子 $a\}$. 记

$$\eta(\boldsymbol{n})=\begin{cases} a, & \boldsymbol{n}\in\mathcal{J}_{m,s}(a), \\ 1, & \boldsymbol{n}\in\mathcal{J}_{m,s}(\bar{a}), \end{cases} \tag{10.6.25}$$

则由定理 10.4.2, 在由式 (10.4.13) 给出的方程式 (10.4.2) 的解中, $G_{m,s}^{\mathrm{El}}$ 有如下直接显式:

$$G_{m,s}^{\mathrm{El}} = \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}_{m,s}^{\mathrm{El}}}\Big(\sum_{t\in\mathcal{I}_{m,\boldsymbol{n}}^{\mathrm{El}}}\frac{\theta_{m,\boldsymbol{n}}}{t}\left|\mathcal{G}_{m,\boldsymbol{n}}^{\mathrm{El},t}\right|\Big)\big((\underline{2i-1})!\boldsymbol{y}\big)^{\boldsymbol{n}}, \tag{10.6.26}$$

其中

$$\theta_{m,\boldsymbol{n}}=\eta(\boldsymbol{n})(2m+2l)(2m-1)!. \tag{10.6.27}$$

5. 因为一般地图在曲面上, 以根点次和非根顶点按次剖分向量为参数的根同构类的计数函数, 满足当 $a=1$ 时的方程式 (10.5.2), 由定理 10.5.2, 方程式 (10.5.2) 的解, 当取 $a=1$ 时, 就是这个计数函数. 令 $F_{m,\boldsymbol{n}}^{\mathrm{gl}}$ 是根点次为 m 和非根顶点按次剖分向量为 $\boldsymbol{n}$ 的一般地图, 在曲面上根同构类的数目, 则它们每一类的基准图在曲面上的嵌入数为

$$\left|\mu(\mathcal{G}_{m,\boldsymbol{n}}^{\mathrm{gl}})\right|=(m-1)!\left|\mathcal{G}_{m,\boldsymbol{n}}^{\mathrm{gl}}\right|(\underline{i-1})!^{\boldsymbol{n}}, \tag{10.6.28}$$

其中 $\mathcal{G}_{m,\boldsymbol{n}}^{\mathrm{gl}}$ 是根点次为 m 和非根顶点按次剖分向量为 $\boldsymbol{n}$ 的基准图的集合.

记 $t=\mathrm{aut}_{1/2}(\mathrm{G})$ 为图 G 的自伴同构群的阶,

$$\mathcal{I}^{\mathrm{gl}}_{m,\boldsymbol{n}}=\{t\big|\exists G\in\mathcal{G}^{\mathrm{gl}}_{m,\boldsymbol{n}},\ t=\mathrm{aut}_{1/2}(G)\},\tag{10.6.29}$$

则根据 [77] 中的定理 4.1,

$$F^{\mathrm{gl}}_{m,\boldsymbol{n}}=\sum_{t\in\mathcal{I}^{\mathrm{gl}}_{m,\boldsymbol{n}}}\frac{m+s}{t}\big|\mu(\mathcal{G}^{\mathrm{gl},t}_{m,\boldsymbol{n}})\big|,\tag{10.6.30}$$

其中 $s=\boldsymbol{i}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{i}=(1,2,3,\cdots)$, $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3,\cdots)$.

从而, 式 (10.5.13) 中的 $U_{m,s}$ 有如下直接显式:

$$\begin{aligned}U_{m,s}\big|_{a=1}&=\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}^{\mathrm{gl}}_{m,s}}\Big(\sum_{t\in\mathcal{I}^{\mathrm{gl}}_{m,\boldsymbol{n}}}\frac{m+s}{t}\big|\mu(\mathcal{G}^{\mathrm{gl},t}_{m,\boldsymbol{n}})\big|\Big)\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}\quad(\text{用引理 10.5.10})\\&=\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}^{\mathrm{gl}}_{m,s}}\Big(\sum_{t\in\mathcal{I}^{\mathrm{gl}}_{m,\boldsymbol{n}}}\frac{(m+s)(m-1)!}{t}\big|\mathcal{G}^{\mathrm{gl},t}_{m,\boldsymbol{n}}\big|\Big)\big((\underline{i-1})!\boldsymbol{y}\big)^{\boldsymbol{n}}.\end{aligned}\tag{10.6.31}$$

从式 (10.2.12) 可以看出, $U_{m,s}$ 的每一项的系数不是含有因子 a, 就是含有因子 1. 令 $\mathcal{J}_{m,s}(a)=\{\boldsymbol{n}|$ 在 $U_{m,s}$ 中, 项 $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}$ 的系数含因子 $a\}$, $\mathcal{J}_{m,s}(\bar{a})=\{\boldsymbol{n}|$ 在 $K_{m,s}$ 中, 项 $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{n}}$ 的系数不含因子 $a\}$. 记

$$\xi(\boldsymbol{n})=\begin{cases}a, & \boldsymbol{n}\in\mathcal{J}_{m,s}(a),\\ 1, & \boldsymbol{n}\in\mathcal{J}_{m,s}(\bar{a}),\end{cases}\tag{10.6.32}$$

则由定理 10.5.2, 在由式 (10.5.12) 给出的方程式 (10.5.2) 的解中, $U_{m,s}$ 有如下直接显式:

$$U_{m,s}=\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{J}^{\mathrm{gl}}_{m,s}}\Big(\sum_{t\in\mathcal{I}^{\mathrm{gl}}_{m,\boldsymbol{n}}}\frac{\chi_{m,\boldsymbol{n}}}{t}\big|\mathcal{G}^{\mathrm{gl},t}_{m,\boldsymbol{n}}\big|\Big)\big((\underline{i-1})!\boldsymbol{y}\big)^{\boldsymbol{n}},\tag{10.6.33}$$

其中

$$\chi_{m,\boldsymbol{n}}=\xi(\boldsymbol{n})(m+s)(m-1)!.\tag{10.6.34}$$

6. 对于方程式 (10.1.2)、式 (10.2.2)、式 (10.3.2)、式 (10.2.2) 和方程式 (10.5.2), 均可用无穷矩阵考虑它们解的直接显式, 以及如何通过直接求解, 得到如式 (10.6.6)、式 (10.6.13)、式 (10.6.19)、式 (10.6.26) 和 式 (10.6.33) 所示的显式问题.

参考文献

[1] Bender E A, Wormald N C. The number of loopless planar maps [J]. Discrete Math., 1985, 54: 235–237.

[2] Birkhoff G. Lattice theory [J]. 3rd ed. Providence: AMS, 1967.

[3] Blissard J. Theory of generic equations [J]. Quad. J. Pure Appl. Math., 1861, 4: 279–305.

[4] Blissard J. Theory of generic equations [J]. Quad. J. Pure Appl. Math., 1862, 5: 58–75.

[5] Brown W G. On the existence of square roots in certain rings of power series [J]. Math. Ann., 1965, 158: 82–89.

[6] Brown W G. Enumerations of quadrangular dissections of the disc [J]. Canad. J. Math., 1965, 17: 302–307.

[7] Cai J L, Liu Y P. The number of nearly 4-regular planar maps [J]. Utilitas Math., 2000, 58: 243–254.

[8] Cai J L, Liu Y P. The enumeration of general rooted planar maps [J]. Acta Math. Sin., Eng. Series, 2005, 21: 215–224.

[9] 蔡俊亮, 刘效丽, 刘彦佩. 带根 2-连通 3-正则平面地图计数 [J]. 数学学报, 2006, 49: 605–612.

[10] Dong F M, Liu Y P. Counting rooted near-triangulations on the sphere [J]. Discrete Math., 1993, 123: 35–45.

[11] Hao R X, Liu Y P. Enumeration of general rooted maps on the torus [J]. OR Trans., 2002, 6 (1): 19–28.

[12] Harary F, Tutte W T. The number of plane trees with given partition [J]. Mathematika, 1964, 11: 99–101.

[13] Harary F, Tutte W T. On the order of the group of a planar map [J]. J. Combin. Theory, 1966, 1: 394–395.

[14] Harary F, Prins G, Tutte W T. The number of plane trees [J]. Akad. van W., Proc., 1964, 67: 319–329.

[15] Li Z X, Liu Y P. Enumeration of loopless maps on the projective plane [J]. J. Appl. Math. Comp., 2002, 10: 145–155.

[16] Liu Y P. On the number of rooted c-nets [R/J]. Combin. Optim. CORR 83-35, Uni. Waterloo, 1983; J. Combin. Theory, 1984, B36: 118–123.

[17] Liu Y P. Enumeration of rooted separable planar maps [R/J]. Combin. Optim. CORR 82-4, Uin. Waterloo, 1982; Utilitas Math., 1984, 25: 77–94.

[18] Liu Y P. Counting rooted planar maps [R/J]. Combin. Optim. CORR 83-26, Uin. Waterloo, 1983; J.Math. Res. Expos., 1984, (3): 37–46.

[19] Liu Y P. Chromatic sum equations for rooted planar maps [C/J]. Contributed to the 15th S-E Conf. Combin. Graph Theory and Comp., Baton Rouge, 1984; Cong. Numer., 1984, 45: 275–280.

[20] Liu Y P. Enumerating rooted loopless planar maps [R/J]. Combin. Optim. CORR 83-4, Uni. Waterloo, 1983; Acta Math. Appl. Sinica, English Series, 1985, 2: 14–26.

[21] 刘彦佩. 不可分离平面地图节点剖分计数方程 [J]. 科学通报, 1985, 30: 646–649.

[22] 刘彦佩. 一些节点剖分计数问题 [J]. 科学通报, 1985, 30: 1521–1524.

[23] Liu Y P. A functional equation for enumerating nonseparable planar maps with vertex partition [J]. Science Bulletin, 1986, 31: 73–77.

[24] Liu Y P. Some emumerating problems of maps with vertex partition [J]. Science Bulletin, 1986, 31: 1009–1014.

[25] 刘彦佩. 不可分离 Euler 平面地图节点剖分计数方程 [J]. 科学通报, 1986, 31: 81–84.

[26] 刘彦佩. 有根外平面地图节点剖分计数方程 [J]. 科学通报, 1986, 31: 1045–1048.

[27] 刘彦佩. 不可分离外平面地图节点剖分计数方程 [J]. 科学通报, 1986, 31: 1681–1684.

[28] Liu Y P. A functional equation of enumerating nonseparable Eulerian planar maps with vertex partition [J]. Science Bulletin, 1986, 31: 941–945.

[29] Liu Y P. Enumeration of rooted outerplanar maps with vertex partition [J]. Science Bulletin, 1987, 32: 295–299.

[30] Liu Y P. Enumeration of non-separable outerplanar maps with vertex partition [J]. Science Bulletin, 1987, 32: 1664–1668.

[31] Liu Y P. An Enumerating Equation of Simple Planar Maps with Face Partition [R]. RUTCOR Research Report RRR 36-87, Rutgers Uni., 1987; 关于简单平面地图依面剖分的计数方程 [J]. 应用数学学报, 1989, 12: 292–295.

[32] Liu Y P. An enumerating equation of rooted loopless planar maps with vertex partition [R]. RUTCOR Research Report RRR 36-87, Rutgers Uni., 1987; 有根无环平面地图节点剖分计数方程 [J]. 应用数学学报, 1989, 12: 213–217.

[33] 刘彦佩. 关于简单平面地图的计数 [J]. 数学学报, 1988, 31: 279–282.

[34] 刘彦佩. 有根不可分离外平面地图的计数 [J]. 科学通报, 1988, 33: 473.

[35] Liu Y P. Enumeration of simple planar maps [R/J]. RUTCOR Research Report RRR 36-87, Rutgers Uni., 1987; Utilitas Math., 1988, 34: 97–104.

[36] 刘彦佩. 关于平面地图的计数方程 [J]. 数学进展, 1989, 18: 446–460.

[37] Liu Y P. Enumeration of non-separable outerplanar maps [J]. Acta Math. Appl. Sinica: English Series, 1989, 5: 169–175.

[38] 刘彦佩. 有根无环平面地图节点剖分方程 [J]. 应用数学学报, 1989, 12: 213–217.

[39] 刘彦佩. 关于简单平面地图依面剖分计数方程 [J]. 应用数学学报, 1989, 12: 292–295.

[40] 刘彦佩. 有根平面偶地图的计数 [J]. 数学物理学报, 1989, 9: 21–28.

[41] Liu Y P. On the vertex partition equation of rooted loopless planar maps [J]. Acta Math. Scientia, 1990, 10: 167–172.

[42] 刘彦佩. 关于无环 Euler 节点剖分方程 [J]. 科学通报, 1990, 35: 1041–1044.

[43] Liu Y P. Chromatic enumeration for rooted outerplanar maps [J]. Chin. Ann. Math., 1990, 11B: 491–502.

[44] Liu Y P. On chromatic and dichromatic sum equations [J]. Discrete Math., 1990, 84: 169–179.

[45] Liu Y P. Recent Progress on Chromatic and Dichromatic Sum Equations of Planar Maps [R]. Research Report, Series A, No.4, Dept. Statistics, Uni. Rome "La Sapienza", 1990.

[46] Liu Y P. On the loopless Eulerian vertex partition equation [J]. Chinese Science Bulletin, 1991, 36: 1585–1589.

[47] 刘彦佩. 有根平面地图节点剖分计数 [J]. 应用数学与计算数学学报, 1991, 5: 1–20.

[48] Liu Y P. A new progress on chromatic and dichromatic sum equations for planar maps: Series Formelles et Combinatoire Algebrique [R]. Uni. Bordeaux I, 1991: 385–398.

[49] Liu Y P. On the number of Eulerian planar maps [R/J]. Research Report, Series A, No.24, Dept. Statistics, Uni. Rome "La Sapienza", 1989; Acta. Math. Scientia, 1992, 12: 418–423.

[50] Liu Y P. On the vertex partition equation of loopless Eulerian planar maps [J]. Acta Math. Appl. Sinica: English Series, v1992, 8: 45–58.

[51] Liu Y P. A note on the number of bipartite planar maps [J]. Acta Math. Scientia, 1992, 12: 85–88.

[52] Liu Y P. A note on the mumber of cubic planar maps [J]. Acta Math.Scientia, 1992, 12: 282–285.

[53] Liu Y P. A note on the number of loopless Eulerian planar maps [J]. J. Math. Res. Expos., 1992, 12: 165–170.

[54] Liu Y P. Dichromatic sum eqution for outerplanar maps [J]. Applied Math.: A J. Chinese Unis., 1993, 8: 64–68.

[55] Liu Y P. On functional equations arising from map enumerations [J]. Discrete Math., 1993, 123: 93–109.

[56] Liu Y P. Combinatorial invariants on planar graphs [J]. Acta Math. Sinica: New Series, 1995, 11: 211–220.

[57] Liu Y P. Enumerative Theory of Maps [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers; Beijing: Science Press, 1999.

[58] 刘彦佩. 组合泛函方程 [J]. 高校应用数学学报, 1999, 14A: 369–396.

[59] 刘彦佩. 数组合地图论 [M]. 北京: 科学出版社, 2001.

[60] 刘彦佩. 组合学中的一些泛函方程 [J]. 信阳师范学院学报: 自然科学版, 2002 15: 1–11.

[61] 刘彦佩. 组合泛函方程的新进展 [J]. 天津理工学院学报, 2002, 18(3): 1–4.

[62] 刘彦佩. 组合地图进阶 [M]. 北京: 北方交大出版社, 2003.

[63] 刘彦佩. 根瓣丛的普查 [J]. 信阳师范学院学报: NS, 2004, 17:

[64] 刘彦佩. 地图的代数原理 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[65] 刘彦佩. 数组合地图论 [M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2008.

[66] 刘彦佩. 依节点剖分数树的一种新方法 [J]. 中国科学, 2008, A38: 477–480.

[67] Liu Y P. General Theory of Map Census [M]. Beijing: Science Press, 2009.

[68] 刘彦佩. 图的可嵌入性理论 [J]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2010.

[69] 刘彦佩. 曲面四角化上的直差分方程 [J]. 昆明理工大学学报: 自然科学版, 2012, 37(3): 78–84.

[70] 刘彦佩. 曲面四角化偏微分方程 [J]. 昆明理工大学学报: 自然科学版, 2012, 37(5): 79–87, 94.

[71] 刘彦佩. 曲面上的偏微分方程 [J]. 玉林师范学院学报: 自然科学版, 2012, 33(2): 2–9.

[72] 刘彦佩. 图的不可定向最大亏格 [J]. 中国科学: 数学专辑 (I), 1979 (S1): 191–201.

[73] Liu Y P. Theory of Polyhedra [M]. Beijing: Science Press, 2008.

[74] Liu Y P. Introductory Map Theory [M]. Glendale: Kapa & Omega, 2010.

[75] Liu Y P. On a meson equation of surface type [J]. J. Kunming Univ. Sci. Tech.: NS, 2012, 37(1): 82–89.

[76] Liu Y P, A meson equation of surface type [J]. J. Jishou Univ.: NS, 2012, 37(1): 82–89.

[77] Mao L F, Liu Y P. Group action for enumerating maps on surfaces [J]. J. Appl. Math. & Comp., 2003, 13: 201–215.

[78] Mullin R C, Rota G C. On the foundations of combinatorial theory III, theory of binomial enumeration [M]//Harris B. Graph theory and Its Applications. New York: Academic Press, 1970: 167–213.

[79] Ren H, Liu Y P. Enumeration of rooted planar Halin maps [J]. Applied Math.: JCU, 1999, B14: 117–121.

[80] Ren H, Liu Y P. Number of one-faced maps on the projective plane [J]. J. Northern Jiaotong Univ., 1999, 23: 68–70.

[81] Ren H, Liu Y P. On the number of regular maps on the projective plane [J]. Utilitas Math., 1999, 56: 201–209.

[82] Ren H, Liu Y P. Counting rooted Eulerian maps on the projective plane [J]. Acta Math. Scientia, 2000, 20: 169–174.

[83] Ren H, Liu Y P. Counting rooted near-triangulations on the cylinder [J]. J. Math. Res. & Expos., 2000, 20: 529–533.

[84] Ren H, Liu Y P. Enumerating near 4-regular maps on the sphere and the torus [J]. Discrete Appl. Math., 2001, 110: 273–288.

[85] Ren H, Liu Y P. 4 regular maps on the Klein bottle [J]. J. Combin. theory, 2001, B82: 118–155.

[86] Ren H, Liu Y P. Enumeration of simple bipartite maps on the sphere and the projective plane [J]. Discrete Math., 2002, 242: 187–200.

[87] Ren H, Liu Y P. The number of loopless 4-regular maps on the projective plane [J]. J. Combin. Theory, 2002, B84: 84–99.

[88] Ren H, Liu Y P. Enumeration of Eulerian maps on the torus [J]. J. Math. Res. & Expos., 2002, 22(1): 42–48.

[89] 任韩, 邓默, 刘彦佩. 射影平面上不可分近–三角剖分地图的计数 [J]. 数学物理学报, 2005, 35A: 839–845.

[90] Roman S M, Rota G C. The umbral culculas [J]. Adv. Math., 1978, 27: 95–188.

[91] Rota G C. The number of partitions of a set [J]. Amer. Math. Monthly, 1964, 71: 498–504.

[92] Rota G C, Kahaner D. Odlyzko A, On the foundations of combinatorial theory VIII: Finite operator calculus [J]. J. Math. Anal. Appl., 1973, 42: 684–760.

[93] Rota G C, Taylor B D. The classical umbral calculus [J]. SIAM J. Math. Amal., 1994, 25: 694–711.

[94] Rota G C, Shen J, Taylor B D. All polynomial of binomial type are represented by Abel polynomials [J]. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa CI Sci., 1997, 25(4): 731–738.

[95] Tutte W T. A Census of planar triangulations [J]. Canad. J. Math., 1962, 14: 21–38.

[96] Tutte W T. A census of Hamiltonian polygons [J]. Canad. J. Math. Soc., 1962, 68: 402–417.

[97] Tutte W T. A census of slicings [J]. Canad. J. Math., 1962, 14: 708–722.

[98] Tutte W T. A new branch of enumerative graph theory [J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1962, 68: 500–504.

[99] Tutte W T. A census of planar maps [J]. Canad. J. Math., 1963, 15: 249–271.

[100] Tutte W T. The number of planted plane trees with a given partition [J]. Amer. Math. Monthly, 1964, 71: 272–277.

[101] Tutte W T. On the enumeration of four-coloured maps [J]. SIAM J. Appl. Math, 1969, 17: 454–460.

[102] Tutte W T. On dichromatic polynomials [J]. J. Combin. Theory, 1967, 2: 301–320.

[103] Tutte W T. Chromatic solutions II [J]. Canad. J. Math., 1982, 34: 952–960.

[104] Tutte W T. Dichromatic sums for rooted maps [J]. Proc. Sympos. Pure Math., 1971, 19: 235–245.

[105] Xu Y, Liu Y P. The number of pan-fan maps on the projective plane [J]. Utilitas Math., 2007, 72: 279–286.

[106] Zhang Y L, Liu Y P. Cai J L. Enumeration of unicursal planar near-triangulations [J]. Ars Combin., 2010, 97: 383–388.

索 引